金榜图书 JINBANG BOOKS · SINCE 1997 北京时代巨流文化有限公司

全国各大考研辅导机构**通用教材**

2019 李永乐·王式安 考研数学系列

考研数学复习全书

数学二

主编◎李永乐 王式安 武忠祥 季文铎

编委◎王式安 刘喜波 李永乐 季文铎 武忠祥 胡金德 蔡燧林

国家行政学院出版社

金榜图书

全国各大考研辅导机构**通用教材**

2019 李永乐·王式安 考研数学系列

考研数学复习全书

数学二

主编◎李永乐 王式安 武忠祥 季文铎

编委◎王式安 刘喜波 李永乐 季文铎 武忠祥 胡金德 蔡燧林

国家行政学院出版社

图书在版编目(CIP)数据

考研数学复习全书. 数学二/李永乐等主编. —北京:国家行政学院出版社,2017.11

ISBN 978-7-5150-2031-0

Ⅰ.①考… Ⅱ.①李… Ⅲ.①高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 276057 号

书　　名	考研数学复习全书·数学二
作　　者	李永乐　王式安　武忠祥　季文铎
责任编辑	李雪菲
出版发行	国家行政学院出版社 (北京市海定区长春桥路 6 号 100089) (010)68922366 68929037 http://cbs.nsa.gov.cn
编 辑 部	(010)68928866
经　　销	新华书店
印　　刷	三河市恒彩印务有限公司
版　　次	2017 年 12 月北京第 1 版
印　　次	2017 年 12 月北京第 1 次印刷
开　　本	787 毫米×1092 毫米　16 开
印　　张	27
字　　数	486 千字
书　　号	ISBN 978-7-5150-2031-0
定　　价	77.80 元

金榜考研数学系列及使用说明

考研数学满分150分,数学在考研科目中的比重明显,同时又因数学学科本身的特点,考生的数学成绩历年来总是差别很大,因此有得数学者得考研之说。既然数学对考研成绩的意义如此重要,就有必要探讨一下影响数学成绩的主要因素。

本书编写老师们根据多年的命题经验和阅卷经验总结,发现考研数学命题的灵活性非常大,反映在命题中,不仅仅表现在一个知识点与多个知识点的考查难度不同,更多的是表现在考查多个知识点的综合上,这些题目在表达上多一个字或多一句话,难度都会千差万别。正是这些综合型题目拉开了考试成绩的距离,而构成这些难点的主要因素,实际上是最基础的基本概念、定理和公式的综合。同时,从阅卷反映的问题来看,考生答错题目的主要原因也是对基本概念、定理和公式记忆和掌握得不够熟练所致。总结为一句话,那就是:要想数学拿高分,就必须熟练掌握、灵活运用基本概念、定理和公式。

基于此,李永乐、王式安考研数学辅导团队结合多年来的考研辅导和研究,精心编写了本系列图书,目的就在于帮助考生有计划有步骤的完成数学复习,从基本概念、定理和公式的记忆,到对其的熟练运用,循序渐进。

一、本系列重点图书和复习建议

每年硕士研究生入学数学考试的时间一般都安排在上午,考生们可将数学的复习时间安排在每天上午。基础、强化阶段,每天至少应安排2小时来复习数学,对于数学基础较差的同学建议提早复习基础知识,每天再多花点时间来做做习题。

重点图书	复习建议
《考研数学复习全书》	重视基础积累,纵向学习,夯实知识点 由于全书的编写起点是学完大学数学课程,所以建议基础薄弱的同学,先花点时间整体的看看书中的理论知识,然后再看例题。以章或节为单位,学习新内容前要复习前面的内容,按照规律来复习,经过必要的重复会起到事半功倍的效果。系统复习,打好基础,特别是对大纲中要求的基本概念、理论、方法要系统理解和掌握。完成基础准备。另外按章节顺序完成相应的配套练习题,通过练习检验你是否真正地掌握了。
《数学基础过关660题》	在完成基础知识的学习后,有针对的做一些练习。熟练掌握定理公式和解题技巧,加强知识点的前后联系,体系化,系统化,分清重难点,让复习周期尽量缩短。 虽说书中都是选择题和填空题,同学们不要轻视,也不要一开始就盲目做题。看到一道题,要能分辨出是哪个知识点,考什么,然后做题过程中看看自己是否掌握了,应用的定理、公式的条件是否熟悉。这样才是真正做一道题。
《数学历年真题权威解析》	通过真题,进一步提高解题能力和技巧,达到实际考试的要求 第一阶段,看看各年真题,熟悉题型和常考点。 第二阶段,进行专项复习。 书中将真题按考点进行分类。对重点题型和自己薄弱的内容进行突破,达到全面掌握,不留考点空白。 第三阶段,按年份,逐年练习。

重点图书	复习建议
《数学历年真题权威解析·试卷版》	考前真题真练，提高应考技巧 仿照真实试卷，独立试卷，答题卡，答题纸。模拟考场真实环境。按照考试的要求在规定时间去做一套真题，调动所有知识储备，调整心态，快速进入考试状态。做过的真题，自己要整理，总结的自己的薄弱环节，针对性复习，加深记忆。
《高等数学辅导讲义》	单科强化 武忠祥老师的高数教学讲稿改编而成，系统阐述了高等数学的基础知识。例题都是经过严格筛选、归纳。多年经验总结，对同学们的重点、难点的把握更准确、更有针对性。认真研读，做到举一反三。
《线性代数辅导讲义》	单科强化 李永乐老师的代数教学讲稿改编而成，系统阐述了线性代数的基础知识。例题都是经过严格筛选、归纳。多年经验总结，对同学们的重点、难点的把握更准确、更有针对性。认真研读，做到举一反三。
《概率论与数理统计辅导讲义》	单科强化 王式安老师的概率教学讲稿改编而成，系统阐述了概率论与数理统计的基础知识。例题都是经过严格筛选、归纳。多年经验总结，对同学们的重点、难点的把握更准确、更有针对性。认真研读，做到举一反三。
《李永乐数学决胜冲刺6+2》	冲刺模拟题 通过整套题的训练，进行总结和梳理。不同于重点题型的练习，需要全面的知识，要综合应用。必要时复习一下基本概念、公式、定理，准确记忆。

备注：以上内容仅供参考。各位同学可以根据自身的能力和学习习惯进行调整。

二、本书使用说明

本书是考研数学内容的全面阐述，可以应用于考研复习的各个阶段。全书在重视基本概念、理论的同时，着重数学思想、方法的理解和应用。编者团队还精心编写了相当数量的例题，对解题思路、方法做了归纳总结。相信通过这本书的学习，同学们能完全掌握考研数学的内容和方法。

同时本书的重难点，经典题型还配有视频讲解，扫描二维码就可观看。可帮助同学们更好地理解概念，掌握做题技巧。详细操作步骤可见封二“本书二维码扫码使用说明”。

随书赠送的《分阶习题同步训练》，习题编写还是加了些难度和综合性的，目的并不是为了难为学生，主要是为了让大家能够发现学习中的薄弱环节。

使用本书的同时，也可以配合使用本书作者编写的《基础过关660题》、《数学历年真题权威解析》等，提高复习效率。

前言

为了帮助广大考生能够在较短的时间内，准确理解和熟练掌握考试大纲知识点的内容，全面提高解题能力和应试水平，本书编写团队依据15年的命题与阅卷经验，并结合10多年的考研辅导和研究精华，精心编写了本书，真正起到帮助同学们提高综合分析和综合解题的能力。

一、本书的编排结构

全书分二篇，分别是高等数学、线性代数，各篇按大纲设置章节，每章的编排如下：

1. **考点与要求**　设置本部分的目的是使考生明白考试内容和考试要求，从而在复习时有明确的目标和重点。

2. **内容精讲**　本部分对考试大纲所要求的知识点进行全面阐述，并对考试重点、难点以及常考知识点进行深度剖析。

3. **例题分析**　本部分对历年考题所涉及的题型进行归纳分类，总结各种题型的解题方法，注重对所学知识的应用，以便能够开阔考生的解题思路，使所学知识融会贯通，并能灵活地解决问题。针对以往考生在解题过程中普遍存在的问题及常犯的错误，给出相应的注意事项，对有难度的例题给出解题思路的分析，以便加强考生对基本概念、公式和定理等内容的理解和正确运用。

4. **习题分阶**　只有适量的练习才能巩固所学的知识，数学复习离不开做题。为了使考生更好地巩固所学知识，提高实际解题能力，本书作者精心优化设计了一定数量的练习题，供考生练习，以便使考生在熟练掌握基本知识的基础上，达到轻松解答真题的水平。同时，本书对精选的练习题，进行了难度分阶，从基础概念到综合应用，层层递进，实现练习、巩固、提高三维一体。

二、本书的主要特色

1. **权威打造**　命题专家和阅卷专家联袂打造，站在命题专家的角度命题，站在阅卷专家的角度解题，为考生提供最权威的复习指导。

2. **综合提升**　与其他同类图书相比，本书加强了考查知识点交叉出题的综合性，真正起到帮助考生提高综合分析和综合解题的能力。

3. **分析透彻** 本书既从宏观层面把握考研对知识的要求，又从微观层面对重要知识点进行深入细致的剖析，让考生思路清晰、顺畅。

4. **一题多解** 对于常考热点题型，均给出巧妙、新颖、简便的几种解法，拓展考生思维，锻炼考生知识应用的灵活性。这些解法均来自各位专家多年教学实践总结和长期命题阅卷经验。

5. **贴心服务** 本书赠送《分阶习题同步训练》，以便于考生迅速检验学习效果，巩固所学内容。

建议考生在使用本书时不要就题论题，而是要多动脑，通过对题目的练习、比较、思考，总结并发现题目设置和解答的规律性，真正掌握应试解题的金钥匙，从而迅速提高知识水平和应试能力，取得理想分数。

另外，为了更好地帮助同学们进行复习，"李永乐考研数学辅导团队"特在新浪微博上开设答疑专区，同学们在考研数学复习中，遇到任何问题，均可在线留言，教师团队将尽心为你解答。请访问 weibo. com@清华李永乐考研数学辅导团队。

清华李永乐
考研数学辅导团队

微信公众号

最后，本书的成稿还要感谢考研数学原命题组组长单立波老师在编校过程中所付出的心血。

希望本书能为同学们的复习备考带来帮助。书中的不足和疏漏之处，恳请读者批评指正。

祝同学们复习顺利、心想事成、考研成功！

编 者

2017 年 12 月

目录

第一篇 高等数学

第1篇

高等数学

第一章　函数　极限　连续

考点与要求

理解 掌握 函数的概念及其表示法，复合函数与分段函数，基本初等函数的性质及其图形，极限的概念与左、右极限的概念以及它们之间的关系，极限的性质及其运算法则，极限存在的两个准则并用它们判别极限的存在性，两个重要极限，无穷小与无穷大的概念以及它们之间的关系，无穷小的比较的概念并会用等价无穷小替换定理求极限，几个重要的等价无穷小，洛必达法则，佩亚诺余项泰勒公式并用它求某些极限，函数的连续与左、右连续，闭区间上连续函数的性质（有界性，最大最小值定理，介值定理，零点定理）.

了解 会用 函数的单调性、奇偶性、周期性与有界性，建立简单应用问题的函数关系，反函数与隐函数的概念，参数方程所表示的函数，初等函数的概念，判别函数的间断点及其类型，基本初等函数的连续性及初等函数的连续性，利用积分和式求某些极限.

1　函　数

内容精讲

一、定义

定义 1.1.1（邻域） 设 $\delta > 0$，实数集 $U_\delta(x_0) = \{x \mid |x - x_0| < \delta\}$ 称为 x_0 的 δ 邻域，如果不必说及邻域半径 δ 的大小，则简记为 $U(x_0)$，称为 x_0 的某邻域，$\mathring{U}_\delta(x_0) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$ 称为 x_0 的去心 δ 邻域，类似地有记号 $\mathring{U}(x_0)$ 及相应的名称.

此外还有 x_0 的左（右）半 δ 邻域与 x_0 的左（右）半去心 δ 邻域等概念.

引入 ∞ 的（去心）邻域一词在今后的叙述上会带来一些方便，这是指 $U = \{x \mid |x| > X\}$，其中 X 为充分大的正数.

定义 1.1.2（函数） 设有两个变量 x 与 y，X 是一个非空的实数集. 若存在一个对应规则 f，使得对于每一个 $x \in X$，按照这个规则，y 有唯一确定的实数值与之对应，则称 f 是定义在 X 上的一个函数，x 称为自变量，X 称为函数 f 的定义域，y 称因变量. 函数 f 在 $x \in X$ 对应的 $y = f(x)$，$x \in X$ 的函数值所成的集合，常记为 Y，$Y = \{y \mid y = f(x), x \in X\}$，称为函数的值域，以后“实数”的“实”字常省去，习惯上，也称 y 或 $f(x)$ 为 x 的函数.

在定义域的不同部分用不同的解析式子表示的函数称为分段函数.

【注】 分段函数是一个函数，不能认为每一段是一个函数、是多个函数.

常见的几种分段函数:

绝对值函数(其图像如图 1-1)

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0. \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

符号函数(其图像如图 1-2)

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0. \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

它表示 x 的符号. 显然有 $|x| = x\operatorname{sgn} x$, $x \in (-\infty, +\infty)$.

取整函数$[x]$,它表示不超过 x 的最大整数. 例如,$[3.2] = 3$,$[4] = 4$,$[-\pi] = -4$. 一般地,$[x] = n$,当 $n \leqslant x < n+1$,$n = \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots$.

$y = [x]$ 的图像如图 1-3,显然有性质:对于 $x \in (-\infty, +\infty)$,有$[x] \leqslant x < [x] + 1$,且$[x+1] = [x] + 1$.

狄里克雷函数 $D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数时} \\ 0, & x \text{ 为无理数时} \end{cases}$.

狄里克雷函数无法描绘出它的图像.

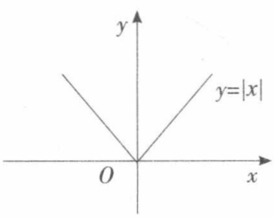

图 1–1

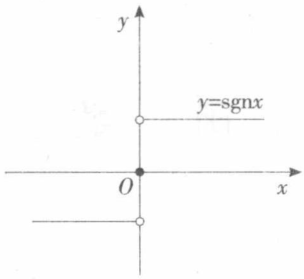

图 1–2

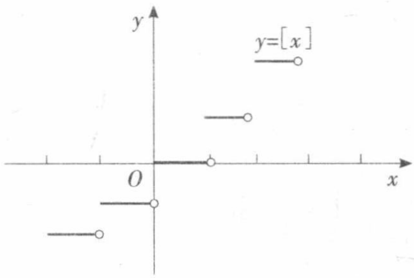

图 1–3

定义 1.1.3(隐函数) 设 x 在某数集 X 内每取一个值时,由方程 $F(x,y) = 0$ 可唯一确定一个 y 的值,则称由 $F(x,y) = 0$ 确定一个隐函数 y,虽然不一定能将 y 明显地解出来.

定义 1.1.4(参数式表示的函数) 设 $x = x(t)$,$y = y(t)$. 若 x 在某数集 X 内每取一个值时,由 $x = x(t)$ 可唯一确定一个 t 的值,并且对于此 t,由 $y = y(t)$ 可确定唯一的一个 y 的值,则称由参数式 $x = x(t)$,$y = y(t)$ 确定了 y 为 x 的函数.

定义 1.1.5(函数的单调性) 设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义,如果对于任意的 $x_1 \in X$,$x_2 \in X$,$x_1 < x_2$,就一定有 $f(x_1) \leqslant f(x_2)$,($f(x_1) \geqslant f(x_2)$)则称 $f(x)$ 在 X 上是单调增加(减少)的. 如果一定有 $f(x_1) < f(x_2)$,($f(x_1) > f(x_2)$)则称 $f(x)$ 在 X 上是严格单调增加(减少)的.

定义 1.1.6(函数的奇、偶性) 设函数 $f(x)$ 在对称于原点的某数集 X 上有定义,并且对于任意 $x \in X$,必有 $f(-x) = f(x)$($f(-x) = -f(x)$),则称 $f(x)$ 在 X 上是偶(奇)函数.

在直角坐标系 xOy 中,偶函数的图像关于 y 轴对称,奇函数的图像关于坐标原点 O 对称.

定义 1.1.7(函数的周期性) 设 $f(x)$ 的定义域是数集 X,如果存在常数 $T > 0$,当 $x \in X$

时，有 $x \pm T \in X$，并且 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数，T 称为它的一个周期. 通常称的周期是指使 $f(x+T)=f(x)$ 成立的最小正数 T(如果存在的话).

定义 1.1.8(函数的有界性) 设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义，如果存在常数 M，当 $x \in X$ 时 $f(x) \leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 X 上有上界；如果存在 m，当 $x \in X$ 时 $f(x) \geqslant m$，则称 $f(x)$ 在 X 上有下界；如果 $f(x)$ 在 X 上既有上界又有下界，则称 $f(x)$ 在 X 上有界.

定义中的 m 与 M 分别为 $f(x)$ 在 X 上的下界与上界. 显然，如果 $m(M)$ 是 $f(x)$ 在 X 上的下(上)界，则比 m 小(比 M 大)的任何数，都是 $f(x)$ 在 X 上的下(上)界.

如果不论 M 多么大，总有 $x \in X$ 使 $f(x) > M$，则称 $f(x)$ 在 X 上无上界；类似地可以定义无下界.

定义 1.1.9(反函数) 设函数 $y=f(x)$ 的定义域是 X，值域是 Y. 如果对于 Y 内的每一个 y，由 $y=f(x)$ 可以确定唯一的 $x \in X$. 这样在 Y 上定义了一个函数，称为 $y=f(x)$ 的反函数，记为 $x=f^{-1}(y)$ 或 $x=\varphi(y)$，$y \in Y$.

由反函数的定义，有 $y \equiv f(f^{-1}(y))$，$y \in Y$；$x \equiv f^{-1}(f(x))$，$x \in X$.

有时，也常将 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 写成 $y=f^{-1}(x)$.

在同一坐标系中，$y=f(x)$ 与它的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的图形是一致的，而 $y=f(x)$ 与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

定义 1.1.10(复合函数) 设函数 $y=f(u)$ 的定义域是 D_f，函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域是 D_φ，值域是 R_φ. 若 $D_f \cap R_\varphi \neq \varnothing$($\varnothing$ 表示空集)，则称函数 $y=f(\varphi(x))$ 为 x 的复合函数，它的定义域是 $\{x \mid x \in D_\varphi \text{ 且 } \varphi(x) \in D_f\}$. u 称为中间变量，x 称为自变量.

定义 1.1.11(基本初等函数) 下列一些函数称为基本初等函数：

① 常值函数：C(C 为常数)，$x \in \mathbf{R}$.

② 幂函数：x^a(a 为常数)，其定义域由 a 确定，但不论 a 如何，在 $(0,+\infty)$ 内总有定义.

③ 指数函数：a^x(常数 $a>0, a \neq 1$)，$x \in \mathbf{R}$.

④ 对数函数：$\log_a x$(常数 $a>0, a \neq 1$)，$x \in (0,+\infty)$.

⑤ 三角函数：$\sin x, x \in (-\infty,+\infty)$；$\cos x, x \in (-\infty,+\infty)$；

$$\tan x, x \in \left(k\pi-\frac{\pi}{2}, k\pi+\frac{\pi}{2}\right), k \in \mathbf{Z}; \cot x, x \in (k\pi,(k+1)\pi), k \in \mathbf{Z}.$$

⑥ 反三角函数：$\arcsin x, x \in [-1,1]$；$\arccos x, x \in [-1,1]$；

$\arctan x, x \in \mathbf{R}$；$\operatorname{arccot} x, x \in \mathbf{R}$.

定义 1.1.12(初等函数) 由基本初等函数经有限次加、减、乘、除及复合而成并用一个式子表示的函数称为初等函数.

二、重要性质、定理、公式

1. 关于奇偶性

定理 1.1.1(关于函数的奇偶性)

(1) 奇 × 奇为偶函数；

(2) 奇 × 偶为奇函数；

(3) 偶 × 偶为偶函数；

(4) 奇函数与奇函数复合为奇函数；

(5) 偶函数与偶函数复合为偶函数；

(6) 偶函数与奇函数复合为偶函数；

(7) 任一定义在对称于原点的数集 X 上的函数 $f(x)$，必可分解成一奇一偶函数之和：

$$f(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]+\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)].$$

2. 关于有界性、无界性的若干充分条件

定理 1.1.2(关于有界、无界的充分条件)

(1) 设 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 存在,则存在 $\delta > 0$,当 $-\delta < x - x_0 < 0$ 时,$f(x)$ 有界.

对 $x \to x_0^+, x \to x_0$ 有类似的结论.

(2) 设 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 存在,则存在 $X > 0$,当 $|x| > X$ 时,$f(x)$ 有界.

对 $x \to +\infty, x \to -\infty$ 有类似的结论.

(3) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

(4) 设 $f(x)$ 在数集 U 上有最大值(最小值),则 $f(x)$ 在 U 上有上(下)界.

(5) 有界函数与有界函数之和、积均为有界函数.

以上均为充分条件,其逆均不成立.

(6) 设 $\lim\limits_{x\to *} f(x) = \infty$,则 $f(x)$ 在 $*$ 的去心邻域内无界.但其逆不成立.

这里的 $*$ 可以是 $x_0, x_0^-, x_0^+, \infty, -\infty, +\infty$ 中 6 种情形的任一种.

例题分析

一、求分段函数的复合函数

【例 1】 设 $f(x) = \begin{cases} 2, & 当\ |x| < 1 \\ 0, & 当\ |x| \geqslant 1 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 0, & 当\ |x| \leqslant 2 \\ 1, & 当\ |x| > 2 \end{cases}$.

则 $f(g(x)) =$ ______, $g(f(x)) =$ ______.

解题思路 求 $f(g(x))$ 时,由外层函数 f,写出复合函数的表达式,并同时写出中间变量(即内层函数 g)的取值范围;然后按内层函数,即 $g(x)$ 的分段表达式,过渡到自变量的变化范围,得到分段表达式.对于求 $g(f(x))$ 亦类似.

【解】 应填 $f(g(x)) = \begin{cases} 2, & 当\ |x| \leqslant 2 \\ 0, & 当\ |x| > 2 \end{cases}$. $g(f(x)) \equiv 0, x \in (-\infty, +\infty)$.

由 $f(x)$ 的表达式,有 $f(g(x)) = \begin{cases} 2, & 当\ |g(x)| < 1 \\ 0, & 当\ |g(x)| \geqslant 1 \end{cases}$.

再由 $g(x)$ 的表达式知,$|g(x)| < 1 \Leftrightarrow |x| \leqslant 2$;$|g(x)| \geqslant 1 \Leftrightarrow |x| > 2$.从而得到

$$f(g(x)) = \begin{cases} 2, & 当\ |x| \leqslant 2 \\ 0, & 当\ |x| > 2 \end{cases}.$$

由 $g(x)$ 的表达式,有 $g(f(x)) = \begin{cases} 0, & 当\ |f(x)| \leqslant 2 \\ 1, & 当\ |f(x)| > 2 \end{cases}$.

再由 $f(x)$ 的表达式知,$|f(x)| \leqslant 2 \Leftrightarrow x \in (-\infty, +\infty)$;$|f(x)| > 2 \Leftrightarrow x \in \varnothing$.所以

$$g(f(x)) \equiv 0, 当\ x \in (-\infty, +\infty).$$

【评注】 这个例子中的 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上都有定义,分别有间断点 $x = \pm 1$ 与 $x = \pm 2$,但复合函数 $g(f(x)) \equiv 0$ 在 $x \in (-\infty, +\infty)$ 上却是连续的.

【例 2】 设 $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2, & 当\ x \leqslant 1 \\ \dfrac{1}{1-x}, & 当\ x > 1 \end{cases}$,则 $f(f(x)) =$ ______.