数理逻辑与集合论

房元霞 赵汝木 盛秀艳 编著

科学出版社

数理逻辑与集合论

房元霞　赵汝木　盛秀艳　编著

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书的内容为数理逻辑和集合论，共8章.第1～5章是数理逻辑部分：第1～3章是数理逻辑，包括命题逻辑、谓词逻辑及其公理化理论；第4章是简单模态逻辑，第5章是利用基础知识分析基础教育阶段数学教学中遇到的问题.在每一节中将本节内容所渗透的重要的思想方法提炼出来放在后面，以期利于读者对内容的深入理解和对数学思想方法的进一步思考.第6～8章是集合论部分，包括集合、关系、函数、实数集与基数等基础知识.

本书主要适合中小学数学教师或师范院校数学专业学生阅读，也可作为大学离散数学的教科书，还可供从事计算机科学、人工智能等方面的科技人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

数理逻辑与集合论/房元霞，赵汝木，盛秀艳编著. —北京：科学出版社，2016.1

ISBN 978-7-03-046908-3

Ⅰ.①数… Ⅱ.①房… ②赵… ③盛… Ⅲ.①数理逻辑 ②集论
Ⅳ.①O141 ②O144

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第310662号

责任编辑：王 静/ 责任校对：张凤琴
责任印制：霍 兵/ 封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
大厂书文印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2015年12月第 一 版 开本：720×1000 1/16
2015年12月第一次印刷 印张：15 1/4
字数：307 000

定价：49.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

集合论是德国数学家康托尔(G. Cantor)于19世纪末创立的,它在数学中占有独特的地位.由于集合语言简洁,概括性强,它的基本概念已经成为全部数学的基础.虽然中小学数学课程并不直接涉及集合论理论,但由于集合语言已成为近现代数学的基础语言之一,所以中小学数学课程自然要涉及集合的语言及其研究问题的思想方法.小学数学课程中的加法,要根据两个集合的基数求其并集的基数;高中数学课程《数学(必修1)》第一章就介绍了集合的一些基础知识,学习集合语言是为用集合语言描述函数概念、表示数学对象做准备.

逻辑是数学语言的语法,在数学中逻辑用语的作用是至关重要的,数学内容的表达离不开逻辑用语.现代数学的发展表明:逻辑方法在数学中的普遍应用使得数学更加依赖逻辑;同时,数学方法在逻辑中普遍应用直接促成了逻辑的发展.要进行正确表达和思维就需要逻辑,数学离不开逻辑,数学课程与数学教学也离不开逻辑,所以《普通高中数学课程标准(实验)》中规定了常用逻辑用语,并且在各种版本的高中数学课程《数学(选修1-1)》与《数学(选修2-1)》中得到了体现.

从近年来一些中学数学杂志上刊载的有关简易逻辑与集合语言方面的文章来看,部分中学数学老师可能没有学习过相应的课程,还不能达到准确、熟练地驾驭,教学中会遇到一些不知可否、似是而非、难以决断的问题.我们认为有补充数学语言方面的基础知识的必要.借承担山东省教育科学规划课题"中小学数学课程语言基础研究"的机会,结合十余年《离散数学》课程教学的经验,将作者对数理逻辑语言及集合语言的思考进行较系统的整理,并对数学基础语言中所渗透的数学思想方法加以提炼,最终形成书稿.

在本课题的研究过程中,得到了聊城大学教师教育研究院院长陈黎明教授、聊城大学数学科学学院院长赵建立教授的大力支持.作者的研究生井玉潇、张旭和赵冉冉帮助校订了书稿.本书的出版得到聊城大学课程与教学论学科专项基金、山东省研究生教育创新计划项目(项目编号:SDYY10072)的资助,在此一并表示衷心的感谢.本书写作过程中参考了大量的文献和资料,在此特向相关作者表示诚挚的谢意.

本书共8章.第1～5章是数理逻辑部分:第1～3章是数理逻辑,第4章是简单模态逻辑,第5章是利用基础知识分析基础教育阶段数学教学中遇到的问题.在每一节中,将内容所应用的重要的思想方法整理在后面,以利于读者对内容的深入

理解和对数学思想方法的进一步思考. 第 6～8 章是集合论部分,包括集合、关系、函数、实数集与基数等基础知识.

本书适合中小学数学教师或师范院校数学专业学生阅读,也可作为高等院校离散数学专业学生的教材,还可供从事计算机科学、人工智能等方面的科技人员参考.

由于作者学识、水平有限,书中不当之处在所难免,敬请读者批评指正.

房元霞

2014 年 12 月于聊城大学

目　　录

集合论部分

数理逻辑部分

数理逻辑简介

1. 逻辑与数理逻辑

"逻辑"一词是英文 logic 的音译，源于古希腊语中的 logos 一词，其意为思想、理性、言辞、规律性、推理等，古希腊学者用这个词来命名推理论证的学问. 逻辑学是研究思维形式结构及其规律和逻辑方法的科学. 直观地说，逻辑是研究推理方法的学科，逻辑提供确定论据是否成立的规则与方法，最早由古希腊学者亚里士多德（公元前 384～前 322）[1]创建. 由于研究的对象和方法各有侧重，所以分为形式逻辑、辩证逻辑和数理逻辑.

逻辑特别关注推理的正确性，重点研究命题之间的关系，而不是一个具体命题的内容. 例如，凡绿色植物都含有叶绿素，菠菜是绿色植物，所以菠菜含有叶绿素.

这里，逻辑并不能说明这些命题本身是否为真，但是，如果前两个命题为真，逻辑就可以保证结论命题"菠菜含有叶绿素"也为真.

数理逻辑又称符号逻辑、理论逻辑. 它是数学的一个分支，是用数学方法研究逻辑或形式逻辑的学科. 其研究对象是把证明和计算这两个直观概念进行符号化以后的形式系统，它是从量的侧面来研究思维规律的. 希尔伯特[2]（D. Hilbert，1862～1943）说："它是把数学上形式化的方法应用到逻辑领域的结果."数理逻辑是数学基础、数学语言不可缺少的组成部分. 虽然名称中有逻辑两字，但并不属于单纯逻辑学范畴.

---

① 亚里士多德：世界古代史上伟大的百科全书式的科学家. 他的写作涉及逻辑学、修辞学、物理学、生物学、教育学、心理学、政治学、经济学、美学、博物学等，他的思想对人类产生了深远的影响. 他创立了形式逻辑学，丰富和发展了哲学的各个分支学科，对科学等做出了巨大的贡献.

② 希尔伯特：对 20 世纪数学有深刻影响的数学家之一. 他领导了著名的哥廷根学派，使哥廷根大学成为当时世界数学研究的重要中心，并培养了一批对现代数学发展做出重大贡献的杰出数学家. 希尔伯特的数学工作可以划分为几个不同的时期，每个时期他几乎都集中精力研究一类问题. 按时间顺序，他的主要研究内容有不变量理论、代数数域理论、几何基础、积分方程、物理学、一般数学基础，其间穿插的研究课题有狄利克雷原理和变分法、华林问题、特征值问题、希尔伯特空间等. 在这些领域中，他都做出了重大的或开创性的贡献. 希尔伯特认为，科学在每个时代都有它自己的问题，而这些问题的解决对于科学发展具有深远意义. 在 1900 年巴黎国际数学家大会上，希尔伯特发表了题为"数学问题"的著名讲演. 他根据过去特别是 19 世纪数学研究的成果和发展趋势，提出了 23 个最重要的数学问题. 这 23 个问题统称希尔伯特问题，后来成为许多数学家力图攻克的难关，对现代数学的研究和发展产生了深刻的影响，并起到了积极的推动作用. 希尔伯特问题中有些现已得到圆满解决，有些至今仍未解决.

2. 数理逻辑的产生与发展

用数学的方法研究逻辑系统的思想一般可以追溯到德国数学家莱布尼茨[①](G. W. Leibniz,1646～1716).他认为经典的传统逻辑必须改造和发展,使其更为精确和便于演算.他提出了一种设想:"如果能够创造一套表达概念的符号语言,并且把人类的推理过程用某种公式表示出来,那么就能发明一种思维演算,把逻辑推理过程转化为计算过程.这样,解决人与人之间争论的困难就可以像做一道数学题那样给以解决."他在研究数学证明时,第一次尝试把字母演算的思想推广到逻辑中去,成为数理逻辑的创始人.由于当时的社会条件所限,他的想法并没有实现.但是他的思想却是现代数理逻辑部分内容的萌芽.

1848 年英国数学家布尔[②](G. Boole,1815～1864)出版了《逻辑的数学分析》一书,创造了一套表示逻辑推理中的基本概念,如"并且"、"非"、"或者"等符号,并建立了这些符号的运算规则,得到了有名的"布尔代数".命题演算的一个具体模型就是逻辑代数.逻辑代数也称为开关代数,它的基本运算是逻辑加、逻辑乘和逻辑非,也就是命题演算中的"或"、"与"、"非",运算对象只有两个数,即 1 和 0,相当于命题演算中的"真"和"假".逻辑代数的运算特点如同电路分析中的开和关、高电位和低电位、导电和截止等现象一样,都只有两种不同的状态,因此,它在电路分析中得到广泛的应用.

利用电子元件可以组成相当于逻辑加、逻辑乘和逻辑非的门电路,也就是逻辑元件,还能把简单的逻辑元件组成各种逻辑网络.这样,任何复杂的逻辑关系都可以由逻辑元件经过适当的组合来实现,从而使电子元件具有逻辑判断的功能,因此,在自动控制方面有重要的应用.

布尔利用代数的方法研究逻辑问题,初步奠定了数理逻辑的基础.1897 年,德国的数学家弗雷格[③](G. Frege,1848～1925)在《表意符号》中引进了谓词符号和量词符号,建立了比较严格的相当于谓词演算的逻辑演算系统.在谓词演算里,把命题的内部结构分析成具有主词和谓词的逻辑形式,由命题变项、逻辑联结词和量词构成命题,然后研究这些命题之间的逻辑推理关系.

---

① 莱布尼茨:德国最重要的自然科学家、数学家、物理学家、历史学家和哲学家,与牛顿同为微积分的创建人.莱布尼茨在数学方面的成就是巨大的,他的研究及成果渗透到高等数学的许多领域.1673 年莱布尼茨制造了一个能进行加、减、乘、除及开方运算的计算机,系统提出了二进制的运算法则,为计算机的现代发展奠定了坚实的基础.在形式逻辑方面,他区分和研究了理性的真理(必然性命题)、事实的真理(偶然性命题),并在逻辑学中引入了"充足理由律",后来被人们认为是一条基本思维定律.他设想把数学方法应用于逻辑,把逻辑推理变成纯符号的演算.

② 乔治·布尔:英国数学家,1848 年布尔出版了 *The Mathematical Analysis of Logic*,1854 年出版了 *The Law of Thought*.这是布尔最著名的著作,书中介绍了以他的名字命名的布尔代数.

③ 弗雷格:德国数学家、逻辑学家和哲学家,是数理逻辑和分析哲学的奠基人.

命题变项就是指除了含有常项以外还含有变项的逻辑公式. 常项是指一些确定的对象或者确定的属性和关系;变项是指一定范围内的任何一个,这个范围称为变项的论域. 命题变项和命题演算不同,它无所谓真和假. 如果以一定的对象概念代替变项,那么命题变项就成为真的或假的命题了. 如果命题变项加上全称量词或者存在量词,那么它就成为全称命题或者特称命题了.

数理逻辑建立以后,非欧几何的诞生,促使人们去研究非欧几何和欧氏几何的无矛盾性,进而推动了数理逻辑的迅速发展. 1903 年英国哲学家、逻辑学家罗素①(B. Russell,1872～1970)提出了几乎动摇了整个数学基础的"罗素悖论",正是逻辑矛盾悖论的提出,促使数学界研究集合论的无矛盾性问题,进而产生了数理逻辑的重要分支——公理集合论.

非欧几何的产生和罗素悖论的提出,促使数学家们为了研究数学系统的无矛盾性,需要以数学理论的概念、命题、证明等作为研究对象,研究数学系统的逻辑结构和证明的规律性,这样又产生了数理逻辑的另一分支——证明论.

1910～1913 年,罗素与怀特海②(A. N. Whitehead,1861～1947)出版了长篇巨著《数学原理》,给出了命题演算与谓词演算的完整的系统,但是它们的完备性仍然没有获得. 1918 年瑞士数学家贝尔奈斯③(P. Bernays,1888～1977)在他的"执教资格"论文中表述并证明了命题演算的完备性. 1928 年德国数学家希尔伯特与阿克曼④(W. Ackerman,1896～1962)出版《数理逻辑基础》,将谓词演算的完备性作为悬而未决的问题表述出来. 1929 年奥地利数学家哥德尔⑤(K. Godel,1906～1978)在他的博士论文中证明了谓词演算的完备性. 至此,逻辑演算的体系最终完成,莱布尼茨关于数理逻辑的思想得以实现.

3. 数理逻辑的内容

数理逻辑代表一种新的倾向,要求系统地使用符号和公式语言,并将逻辑思维

---

① 罗素:英国哲学家、数学家、逻辑学家、历史学家,无神论和不可知论者,也是 20 世纪西方最著名、影响最大的学者和和平主义社会活动家,诺贝尔文学奖获得者. 罗素也被认为是与弗雷格、维特根斯坦和怀特海一同创建了分析哲学,他与怀特海合著的《数学原理》,对逻辑学、数学、集合论、语言学和分析哲学有着巨大影响.

② 怀特海:英裔美籍数学家、哲学家,因其数理逻辑、科学哲学和形而上学方面的成就而闻名于世,也是 20 世纪最伟大的哲学家之一.

③ 贝尔奈斯:在 1917～1934 年是希尔伯特研究逻辑和数学基础的助手和合作者,我国的莫绍揆(音 kui)1947 年曾师从贝尔奈斯,研究数理逻辑和数学基础.

④ 阿克曼:德国数学家,最著名的成果是计算理论的重要例子——阿克曼函数,1928 年他与希尔伯特合著《数理逻辑基础》.

⑤ 哥德尔:数学家、逻辑学家和哲学家,其最杰出的贡献是哥德尔不完全性定理和连续统假设的相对协调性证明.

转换为计算过程. 20 世纪 30 年代前期，数理逻辑的发展与数学的发展紧密相连，互相促进，沿着这条路径产生了数理逻辑的四大分支：集合论、递归论、证明论和模型论. 最严格意义下的数理逻辑指纯逻辑演算. 广义的数理逻辑还包括已成为数学分支的集合论、证明论、模型论和递归论. 最广义的数理逻辑把各种非经典逻辑也包括在自己的范围之内.

20 世纪 40 年代，数理逻辑又与电子计算机的发明和发展产生了千丝万缕的联系，并成为计算机的重要基础理论之一. 可以预料，随着人类对自身思维的研究和模拟人的思维的不断深入，数理逻辑作为一种形式化的重要工具，必将发挥越来越大的作用，与此同时，数理逻辑自身也将得到进一步发展.

数理逻辑的研究内容概括地说是两个演算加上四论，两个演算为命题演算和谓词演算；四论为递归论、证明论、模型论、公理集合论. 其中命题演算和谓词演算是四论的共同基础. 本书将重点介绍命题逻辑（着眼于命题之间关系的分析）、谓词逻辑（着眼于命题内各构成要素间关系的分析）的思想与方法. 下面对其中的四论进行简单的说明，以便对数理逻辑有一个总的了解.

(1) 递归论（可计算性理论）：是研究解决问题的可行的计算方法和计算的复杂程度的一门学科，主要研究递归函数及其推广.

(2) 证明论：这是关于数学证明的理论，试图用元数学去研究一个数学形式系统的逻辑性质，论证某个数学形式系统的无矛盾性.

(3) 模型论：这是语义的理论，主要对各种数学理论系统建立模型，并研究各种模型间的关系及模型和数学系统之间的关系.

(4) 公理集合论：是用公理化方法重建（朴素）集合论的研究，也是集合论的元数学和集合论的新的公理的研究，是关于集合概念外延的逻辑理论.

上述内容中，逻辑演算和递归论与计算机科学与技术有着紧密的关系，是计算机科学技术的重要基础，也是本书中详细讨论的内容.

数理逻辑的主要特征之一是形式化，就是将数理逻辑的研究对象“数学推理”形式化. 推理都有前提、结论和推理规则，这些前提和结论都是命题，因而一个推理系统应包括命题、公理和推理规则，而形式化就是将推理系统符号化，形成一个形式系统.

4. 数理逻辑在中国

1920 年，英国数学家罗素应邀来华讲学一年，这时数理逻辑开始传入中国. 1922 年，傅种孙等将罗素的《罗素算理哲学》翻译出版. 其后，汤璪（音 zǎo）真、朱言钧等对数理逻辑和数学基础作过介绍. 1926 年金岳霖在清华大学开设逻辑学课. 1927 年汪奠基的《逻辑和数学逻辑论》出版. 1937 年金岳霖的《逻辑》出版，其中有专门章节论及数理逻辑；同年，汪奠基的又一著作《现代逻辑》出版. 20 世纪 30 年

代后期及 40 年代初，沈有鼎、王宪钧、胡世华先后从国外学成回国，数理逻辑开始在中国发展.

本部分只涉及数理逻辑中最基本的、非形式的命题演算与谓词演算. 考虑到读者初学的困难和应用的需要，在材料的选择与处理上做了这样的安排：在命题演算部分尽可能"直观"，使得许多抽象的概念易于学习；在命题演算的推理演绎部分和谓词演算部分则多少带有"公理化"、"形式化"的味道，即从最必需的公理(有效式)和推理规则出发进行演绎推理，通过"赋值"、"解释"等概念将有关内容与日常生活联系起来.

数学中的判断就是命题，逻辑是数学的语言，学习逻辑推理可以判定命题的正确性，因而在数学中可以帮助我们正确认识知识的成立；学习逻辑推理也是获得、推出新知识的重要方法，因而是全面掌握数学知识所必需的；学习逻辑推理可以获得整理科学知识的重要方法和论证思想的工具，也是概括的重要形式；学习逻辑推理可以培养抽象思维和严格的逻辑思维能力.

1 命题逻辑及其思想方法

命题逻辑也称命题演算，是数理逻辑中最基本的部分. 命题逻辑是研究命题如何通过一些逻辑联结词构成复合命题和逻辑推理的方法. 如果把命题看成运算的对象，如同代数中的数字、字母、代数式或函数一样，而把逻辑联结词看成运算符号，就像代数中的“加、减、乘、除”一样，那么由简单命题组成复合命题的过程就可以当成逻辑运算的过程，即命题的演算. 逻辑运算同代数运算一样具有一定的性质，满足一定的运算规律.

1.1 命题与联结词

1.1.1 命题及其表示

数理逻辑是研究推理的数学分支，而推理必须包含前提(条件)和结论，且前提和结论又都是由陈述句组成的，因而陈述句就成了推理的基本要素. 但并不是所有的陈述句都是推理的要素，数理逻辑中所要求的是能判断真假而不是可真可假的陈述句，称这样的陈述句为命题. 在命题逻辑中，命题是最基本也是最小的研究单位(元素)，对命题的句子成分不再细分.

命题这个词来源于形式逻辑，而且在形式逻辑中应用很普遍. 因此，我们在这里要特别介绍一下命题在形式逻辑这个范畴内的含义. 一个命题总有一个“值”，称为真值. 真值只有“真”和“假”两种，凡与客观情况符合的命题称为真命题，真命题表达的判断正确；凡与客观情况不符合的命题称为假命题，假命题表达的判断错误. 任何命题的真值都是唯一的，一般地，只有能确定真值的陈述句才是命题. 也就是说，并不是所有的语句都能判别真假，不能判别真假的语句不是命题.

于是，判断给定的句子是否为命题，应先看其是否为陈述句，再判断它是否有唯一的真值.

例如，下面的语句为命题：

(1) 北京是中国的首都.

(2) 莱布尼茨是德国数学家.

(3) 乌鸦是白色的.

(4) π 是有理数.

例如，下面语句均不为命题：

(1) 这种解法对不对?

(2) 请把门关上!

(3) 这朵花真美啊!

(4) 祝你新年快乐!

例如,下面语句均为命题:

(1) 100 年后人类将登上火星.

(2) 地球外存在类似人类的智慧生物.

(3) 教学楼东边的那棵法桐树上有一万片叶子.

(4) 2020 年的元旦是晴天.

由于现在认知的限制,我们还不能确定前两个语句的真值,但它们的真值是客观存在的而且是唯一的.

“教学楼东边的那棵法桐树上有一万片叶子.”这句话虽然不能马上分辨其真假,但是只要足够认真、努力地去数一数,还是可以知道的.

虽然现在还不知道 2020 年的元旦是否为晴天,但到了那天,答案就揭晓了,因此它的真值客观存在,而且是唯一的,故为命题.

所以,一个陈述句能否分辨真假与是否知道它的真假是两回事.

例 1.1.1　判断下列语句是否为命题.

(1)《西游记》的作者是吴承恩.

(2) 4 是素数.

(3) $1+1=2$(十进制数).

(4) 三角形的内角和是 $180°$.

(5) 请勿吸烟!

(6) π 大于 3 吗?

(7) 今天的阳光多么明媚!

(8) $x+y\geqslant 3(x,y\in \mathbf{R})$.

(9) 我正在说谎.

解　本题中(1) 是真命题,(2) 是假命题,(3) 是真命题.(4) 是命题,在欧氏几何中为真,在非欧几何中为假,故需根据上下文才能确定真值.一般而言,我们学习的都是欧氏几何,所以命题(4) 为真命题.(5) 是祈使句,(6) 是疑问句,(7) 是感叹句,这三个句子在语法上都不是陈述句,因而都不是命题.(8) 不是命题,根据 x,y 的不同取值情况,它可真可假,即无唯一的真值(在 1.2 节和谓词逻辑部分都将介绍与此相关的知识).(9) 是悖论.事实上,若(9) 为真,则(9) 的真值应为假;反之,若(9) 的真值为假,也就是“我正在说真话”为真,则(9)的真值应为真.于是(9) 的真值无法确定,显然不是命题.像(9) 这样由真推出假,又由假推出真的陈述句称为悖论,凡是悖论都不是命题.

对命题以及其真值的首次抽象,就是将命题和真值符号化,这里用小写英文字

母 $p,q,r,\cdots,p_i,q_i,r_i,\cdots(i=1,2,3,\cdots)$表示命题，自然用“1”表示真，用“0”表示假，于是命题的真值取值为 1 或 0. 在例 1.1.1 中，用 p,q,r,s 分别表示(1)，(2)，(3)，(4)中的命题，称为这些命题的符号化，表示方法如下所示.

p:《西游记》的作者是吴承恩.

q:4 是素数.

r:$1+1=2$.

s:三角形的内角和是 180°.

于是，p,q,r,s 就成了它所表示命题的代表，其中 p 的真值为 1，q 的真值为 0，r 的真值为 1，s 的真值为 1.

命题的真值还会因条件与环境而异，即命题的真假可能与该命题的范围、时间和空间有关. 如下面的语句：

(1) 人类即将进入 21 世纪.

(2) 现在是六点钟.

(3) $1+101=110$.

注意：(1) 在 2000 年前为真；2000 年后是假. (2) 如果对于北京时间是真，则对于美国纽约时间便是假. (3) 如果所说是二进制，则是一个真命题；如果所说是十进制，则是一个假命题. 尽管如此，它们的范围、时间、空间都是特定的，所以它们的真值也是客观存在而且是唯一的. 因此它们也是命题.

例 1.1.1 中，p,q,r,s 所表示的命题都是简单陈述句，在语言学中，它们都是简单句，都不能被分解成更简单的陈述句，数理逻辑中称这样基本的、原始的、不能再分解出更小命题的命题为简单命题或原子命题. 但在各种论述和推理中，所出现的命题多数不是简单陈述句，而是由简单命题通过联结词联结而成的陈述句，称这样的命题为复合命题. 复合命题不是最基本的，它们可以分解成更小的命题，或者说它们由更小的命题组合而成. 在语言学中，它们都是复句，构成复合命题的命题称为复合命题的支命题.

一般地，将“$\sqrt{2}$是有理数是不对的”视为复合命题，将“‘$\sqrt{2}$是有理数’是不对的”视为简单命题.

例 1.1.2　将下面这段陈述中所出现的原子命题符号化，并指出它们的真值，然后写出这段陈述.

$\sqrt{2}$是有理数是不对的；2 是偶素数；3 或 4 是素数；如果 3 是素数，则 4 也是素数；3 是素数当且仅当 4 是素数.

解　这段陈述中出现了 4 个原子命题，可将它们分别符号化为

p:$\sqrt{2}$是有理数；q:2 是偶数；r:2 是素数；s:3 是素数；t:4 是素数.

p,t 的真值为 0，p,r,s 的真值为 1. 将原子命题的符号代入这段陈述：