



21世纪全国高等院校汽车类**创新型**应用人才培养规划教材

车辆试验设计与数据处理

张京明 主编



教材预览、申请样书



微信公众号: pup6book



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

21 世纪全国高等院校汽车类创新型应用人才培养规划教材

车辆试验设计与数据处理

主 编 张京明

副主编 罗念宁 任殿波



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

内 容 简 介

本书由两部分内容组成：第一部分为车辆试验设计的基础理论与方法，包括线性系统分析基础、相似理论、测量误差理论、正交试验设计及均匀试验设计；第二部分为数据处理技术，包括随机过程概论、试验数据分析过程、谱密度分析及试验数据的回归分析。本书以工程应用为背景，内容编排力求系统、实用。

本书可作为高等工科大学车辆工程专业的硕士研究生教材，也可作为该专业高年级学生的选修教材，还可供从事汽车研究、设计、试验等工作的专业技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

车辆试验设计与数据处理 / 张京明主编. —北京：北京大学出版社，2017.8

(21世纪全国高等院校汽车类创新型应用人才培养规划教材)

ISBN 978-7-301-28660-9

I. ①车… II. ①张… III. ①汽车试验—试验设计—高等学校—教材 ②汽车试验—数据处理—高等学校—教材 IV. ①U467

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 203331 号

书 名 车辆试验设计与数据处理

CHELIANG SHIYAN SHEJI YU SHUJU CHULI

著作责任者 张京明 主编

策划编辑 童君鑫 刘晓东

责任编辑 李娉婷

标准书号 ISBN 978-7-301-28660-9

出版发行 北京大学出版社

地 址 北京市海淀区成府路 205 号 100871

网 址 <http://www.pup.cn> 新浪微博：@北京大学出版社

电子信箱 pup_6@163.com

电 话 邮购部 62752015 发行部 62750672 编辑部 62750667

印 刷 者 北京鑫海金澳胶印有限公司

经 销 者 新华书店

787 毫米×1092 毫米 16 开本 21 印张 486 千字

2017 年 8 月第 1 版 2017 年 8 月第 1 次印刷

定 价 49.00 元

未经许可，不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有，侵权必究

举报电话：010-62752024 电子信箱：fd@pup.pku.edu.cn

图书如有印装质量问题，请与出版部联系，电话：010-62756370

前 言

科学试验和理论研究的密切结合是近代科学技术的一个显著特点。理论以试验为基础，试验需要理论作指导，两者互相依赖、相辅相成，加速了科学技术的发展。然而，实践毕竟是一切理论活动的基础，任何一种理论，只有在科学试验得到证实后才能成立，通过试验证实理论，通过试验发展理论。试验是理论工作的前提，理论工作上不去，常常是因为试验上不去，试验有了突破，理论就跟着上一层楼，这是科学史上屡见不鲜的事实。在工程技术中，任何一个成功的产品都是设计和试验密切结合的产物。设计过程就是试验过程，试验贯穿在整个设计工作的始终。任何设计思想、理论计算无一不经过试验的验证。在许多复杂的实际问题中，试验又常是解决问题的仅有办法。因此，科学试验十分重要。

根据车辆工程专业硕士研究生相关课程的教学要求，本书的内容以邬慧乐、邱毓强老师主编的《汽车拖拉机试验学》为主要内容，结合车辆工程问题的特点，增加了均匀试验设计及其应用方面的内容；增加了部分相关理论的实际应用方面的内容。全书内容力求体现研究生应学习的试验设计的理论及其数据处理方法。

本书共分9章，前5章为车辆试验设计的基本理论和方法，后4章为数据处理的基本理论和方法。第1章主要介绍了线性系统分析基础理论；第2章介绍相似理论的3个定理、相似准则的求法、相似准则形式转换和模型试验数据的处理、设计模型准则和近似模型；第3章介绍随机误差的分布规律、直接测量参数测定值的处理、间接测量参数(函数)的误差分析、系统误差、异常数据的取舍；第4章介绍正交试验设计的基本方法及应用；第5章介绍均匀试验设计的基本方法及应用；第6章介绍随机过程的一般概念及其相关性、功率谱密度函数、平稳过程的线性变换及应用；第7章介绍数据分析的过程、程序疲劳试验的载荷谱编制；第8章介绍谱密度的处理方法、频率响应函数和凝聚函数处理、谱分析应用实例——道路表面不平度数字谱分析；第9章介绍一元线性回归分析、一元非线性回归的转化、试验数据的图像表示。

本书由哈尔滨工业大学张京明担任主编，罗念宁、任殿波担任副主编。全书由张京明统稿，负责内容规划，并编写第1~5章；罗念宁编写第6~7章；任殿波编写第8~9章。

在本书的编写过程中，编者引用了参考文献中的部分内容，包括书中没有注明的部分参考资料，特向其作者表示深切的谢意。

由于编者学识有限，书中难免有不当之处，敬请读者给予批评指正。

编 者

2017年3月

目 录

上篇 试验设计

第 1 章	线性系统分析基础	3
1.1	概述	4
1.2	傅里叶分析	6
1.3	拉普拉斯变换	16
1.4	传递函数及机械阻抗	22
1.5	脉冲响应和频率响应函数	33
第 2 章	相似理论	38
2.1	概述	39
2.2	相似理论	39
2.3	相似准则的求法	47
2.4	相似准则形式的转换和模型试验数据的处理	60
2.5	设计模型准则和近似模型	61
2.6	相似理论应用举例	64
第 3 章	测量误差理论	85
3.1	概述	86
3.2	随机误差的分布规律	89
3.3	测量列与测量结果的精密度	93
3.4	直接测量参数测定值的处理	101
3.5	间接测量参数(函数)的误差分析	107
3.6	系统误差	115
3.7	异常数据的取舍	121
第 4 章	正交试验设计	126
4.1	概述	127
4.2	正交表的构造	128
4.3	正交试验设计的基本方法	132
4.4	考虑交互作用的试验设计	139
4.5	试验数据的结构	145
4.6	试验数据的方差分析	151
4.7	正交表的灵活应用	162



第 5 章 均匀试验设计	166
5.1 概述	167
5.2 均匀设计表及其使用表	168
5.3 试验结果的计算与分析	174
5.4 不等水平均匀设计	177
5.5 混合因素均匀设计	178
5.6 均匀试验设计应用实例	182

下篇 数据处理

第 6 章 随机过程概论	199
6.1 随机过程的一般概念	200
6.2 平稳过程	204
6.3 随机过程的相关性	207
6.4 功率谱密度函数	214
6.5 平稳过程的线性变换	219
6.6 线性变换在系统分析中的应用	222
第 7 章 试验数据分析	228
7.1 数据分析的一般流程	229
7.2 采样及预处理	232
7.3 模拟数据处理	238
7.4 数字数据处理	247
7.5 程序疲劳试验的载荷谱编制	250
第 8 章 谱密度分析技术	258
8.1 谱密度的模拟处理	259
8.2 谱窗、泄漏和平滑	264
8.3 谱密度数字处理 (I)——相关函数法	272
8.4 快速傅里叶变换	276
8.5 谱密度数字处理 (II)——FFT 法	284
8.6 频率响应函数和凝聚函数处理	287
8.7 谱分析应用实例——道路表面不平度数字谱分析	288
第 9 章 试验数据的回归分析	298
9.1 概述	299
9.2 一元线性回归分析	300
9.3 一元非线性回归的转化	313
9.4 试验数据的图像表示	320
参考文献	325

上 篇



试 验 设 计

科学试验从生产实践中独立出来，成为人类认识自然、改造自然的一种独特活动伴随着现代科学技术的发展。由于科学试验与近代科学技术及现代化的关系十分密切，因此现代科学试验的范围和规模均在与日俱增，而且其增加的速度更是越来越快。

在科学发展的初期，科学试验只是少数科学家的个别活动，不仅从事科学研究的人数很少，使用的设备也很简陋。与这种小规模的手工业式的科学试验相反，现在大规模科学试验工作拥有庞大的试验队伍，使用着各种精密、优良、大型的仪器设备，在十分广阔的范围里，进行各种深入的研究活动。例如，为了进行各种车辆试验而建设起来的试验场，是一个占地面积几十平方公里的大型综合性试验基地。它包括各种车辆实际可能遇到的一切典型使用条件的模拟设施，如能进行车速超过 200km/h 的高速环行跑道，能进行各种性能测试的道路，能进行强化试验的各种路面、地面，有各种坡道、滑台、涉水池以及相应的室内试验设备。汽车可以在这种试验场中完成各种性能、寿命试验。虽然这种设施耗费巨大，投资数以亿计，但是由于在试验场里能深入研究汽车产品的各种性能，缩短试验周期，提高试验结果的可比性和试验工作的安全性，在人力、物力和时间上都得到明显的效益，如台车昼夜行驶里程可达到 2000km，强化路面试验行驶 1600km 相当于一般使用中行驶 160000km，强化程度达到 1:100。所以这种试验场已经成为现代汽车工业不可缺少的典型试验设施。又如研究汽车空气动力学特性的风洞，为了模拟真实使用条件，风洞尺寸越来越大，从模型风洞到整车风洞。在这种风洞里可以试验各种类型车辆的全尺寸原型，不仅如此，为了模拟气候条件，研究汽车对各种气候的适应性，还出现了全天候风洞，温度可以在-40~+50℃进行调节。风洞中还常装有程序控制的转鼓试验台。在这类风洞中不仅可以研究车辆的各种空气动力学特性，而且可以研究稳定性、动力性、燃料经济性、制动性以及冷起动、冷却、通风、空调等气候适应性方面的问题。通过这些大规模试验设备，可以精确地观察研究各种客观真实情况。

汽车工业的研究中心常常拥有数千研究人员，是一个包括许多学科、许多专业、许多科学技术领域的大规模科学试验集体。因此，现代科学技术试验工作已经具有大规模现代化工业生产的形式。由于科学技术试验发生了如此深刻的变化，因而出现了许多新的情况，提出了许多新的问题。例如，怎样组织试验，怎样设计试验，怎样合理选用测试技术，怎样处理试验数据等。总之，为了适应现代化科学技术试验的要求，需要研究科学技术试验本身的一



些问题，需要从各行各业各种具体试验方法中抽出那些具有共性的内容，归纳提炼成为规律性的认识，这样形成一个新的科学技术领域，一门关于试验的科学，即所谓试验工程学。这门关于试验的科学是科学技术试验的产物，在学术界引起了广泛的兴趣，它将极大地推动科学技术试验工作的开展，在现代化建设中，起着不可估量的作用。

车辆试验设计理论在车辆工程学科的教学科研实践中也得到了体现。因此，本篇试图从车辆各种具体试验设计方法中概括那些带共性的基本理论、基本技术，为从事本领域工作的人们打下一定的基础。

第 1 章

线性系统分析基础



教学目标

通过本章的学习，掌握线性系统的基础知识，为试验设计与数据处理打下基础。



教学要求

知识要点	能力要求	相关知识	权重
系统与系统分析	掌握系统与系统分析的基本内容	系统的概念与类型 系统分析的内容与特点	10%
傅里叶分析	掌握傅里叶分析的基本原理	周期函数、非周期函数、 δ -函数的傅里叶变换、性质；频谱	25%
拉普拉斯变换	掌握拉普拉斯变换的基本原理	拉普拉斯变换的概念、性质及微分方程的拉普拉斯解法	25%
传递函数及机械阻抗	掌握传递函数、机械阻抗的基本知识	传递函数、机械阻抗的概念及计算方法	30%
脉冲响应函数和频率响应函数	掌握脉冲响应函数和频率响应函数的基本概念	任意函数输入下的系统响应；频率响应函数的图像	10%



1.1 概 述

1.1.1 系统

系统是由若干相互联系、相互作用的元素，为实现一定的目的而组成的有机整体。

一个仪器、一种设备、一辆汽车、一台拖拉机……，凡是由许多元素组成的有机整体都可以称为系统。系统有大有小，可简可繁，而且形态种类众多，不仅有由物质组成的自然系统，而且有由事组成的人为系统。例如，大型科学试验的组织和管理就是一个人为系统。

外界对系统的影响称为系统的激励或输入，在外界激励的作用下，系统的变化称为响应或输出。图 1.1 所示为简单系统的输入、输出示意图。



图 1.1 简单系统的输入、输出示意图

复杂系统是由一些基本系统组成的。基本系统连接成复杂系统的主要形式有串联、并联和反馈。如果上一基本系统的输出直接作为下一系统的输入，则称为串联系统[图 1.2(a)]。如果同一输入加在所有基本系统的输入端上，而诸系统的输出之和构成总的输出[图 1.2(b)]，则称为并联系统。如果把系统输出量的一部分或全部返回到输入端，称为反馈系统[图 1.2(c)]。反馈结果起了加强输入量作用的称为正反馈；起了削弱作用的称为负反馈。输入端与输出端之间存在反馈的系统称闭环系统，反之称为开环系统。

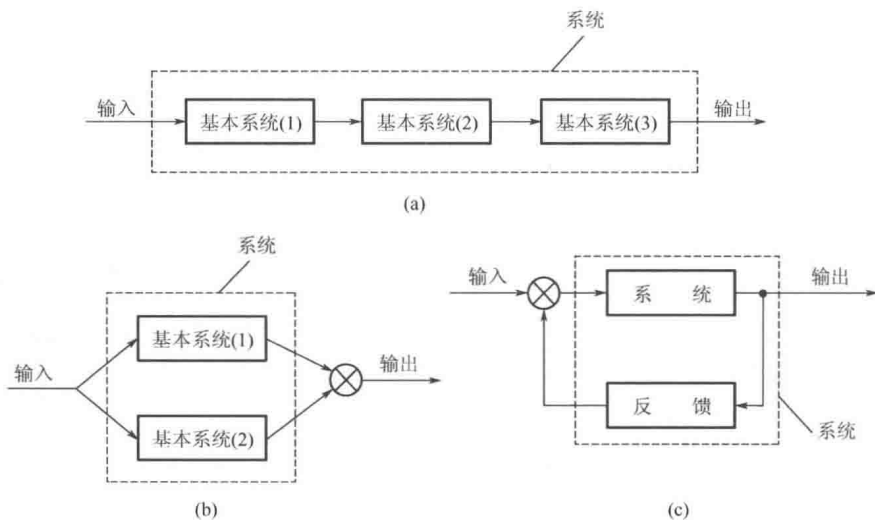


图 1.2 串联、并联和反馈系统框图

1.1.2 系统分析

建立描述系统的数学模型，确定系统的输入和输出关系，研究系统对激励的响应关系是系统分析的主要内容。

数学模型可以根据各种物理定律，例如机械系统中的牛顿定律，电气系统中的克希霍夫定律而导出，也可以通过试验的方法来建立。

如果微分方程是未知函数及其各阶导数的一次方程,则称此方程是线性的。凡是能用线性方程描述的系统称为线性系统。工程技术上遇到的问题多属线性问题,或者在特定范围内可看成线性的。

现代线性系统理论的主要特点如下。

(1) 研究对象一般是多变量线性系统,而经典理论主要以单输入单输出系统为研究对象。因此,现代线性系统理论具有大得多的适用范围。

(2) 除输入变量和输出变量外,还着重考虑描述系统内部状态的状态变量,而经典理论只考虑系统的外部性能(输入与输出的关系)。因此,现代线性系统理论所考虑的问题更为全面且更为深刻。

(3) 在分析和综合方法方面以时域方法为主,兼而采用频域方法。而经典理论主要采用频域方法。因此,现代线性系统理论能充分利用这两种方法。而时域方法对动态描述要更为直观。

(4) 使用更多的数学工具,除经典理论中使用的拉普拉斯变换外,现代线性系统理论大量使用线性代数、矩阵理论和微分方程理论,对某些问题还使用泛函分析、群论、环论、范畴论和复变函数论等较高深的数学工具。因此,现代线性系统理论能探讨更一般更复杂的问题。

线性系统服从可加性和齐次性原理。

可加性表示系统的多个输入之和的输出,等于各个单个输入所得输出的代数和,即

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \quad (1-1)$$

其中, $f(x_1 + x_2)$ 为系统在 x_1 和 x_2 两个输入联合作用下的输出, $f(x_1)$ 、 $f(x_2)$ 分别为系统在单独输入 x_1 或 x_2 时的输出。

齐次性表示常数倍输入的输出,等于此输入所得输出的常数倍,即

$$f(cx) = cf(x) \quad (1-2)$$

其中, c 为常数。

线性系统的可加性和齐次性原理说明,一个激励的存在,并不影响另一个激励引起的响应。因此,多个激励同时作用在线性系统的总效果,可以逐个分析单个激励的效果,然后把这些效果加起来就得到了总效果。

例如,图 1.3(a) 所示的线性系统,它在多个输入 x_1 、 x_2 、 \dots 、 x_r 的作用下的响应为 y 。假若激励 x 与 y 的关系,用下列微分方程描述

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = x_1 + x_2 + \dots + x_r \quad (1-3)$$

按线性系统可加性原理,图 1.3(a) 等效于图 1.3(b),图中 y_1 、 y_2 、 y_3 、 \dots 、 y_r 分别为系统 x_1 、 x_2 、 \dots 、 x_r 单独作用于同一系统所产生的响应,它们分别可以用下列微分方程表述

$$\left. \begin{aligned} a_n \frac{d^n y_1}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y_1}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy_1}{dt} + a_0 y_1 &= x_1 \\ a_n \frac{d^n y_2}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y_2}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy_2}{dt} + a_0 y_2 &= x_2 \\ &\vdots \\ a_n \frac{d^n y_r}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y_r}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy_r}{dt} + a_0 y_r &= x_r \end{aligned} \right\} \quad (1-4)$$



分别求出式(1-4)中各式的解，然后相加即可得到式(1-3)的解，即

$$y = y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_r$$

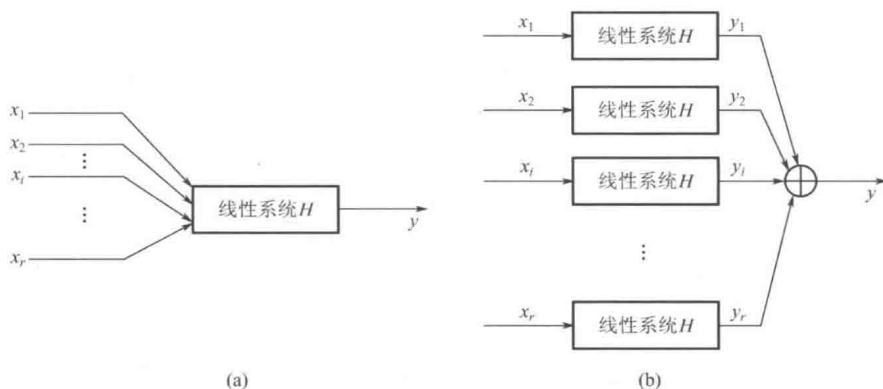


图 1.3 多输入作用下的系统响应

对于诸如式(1-4)之类的线性常微分方程，只要给定激励函数及其初始条件，便可用经典的微分方程理论求解。

除了用经典的方法解微分方程外，在工程实践上，还有一些不通过经典方法分析系统的途径。其中之一，是运用拉普拉斯变换的方法求解。运用拉普拉斯变换，不仅可简便地得到微分方程的解，而且还引出了线性系统传递函数的概念、脉冲响应函数和频率响应函数的概念，这些概念对系统分析非常重要，也是试验法求系统数学模型的基础。因此，在本章分别给以介绍。

此外，当运用线性系统的迭加原理研究系统时，傅里叶分析理论可以方便地把输入和输出函数分解成若干个不同频率的简谐函数之和。因此，本章也将介绍傅里叶分析的基本概念和性质。

1.2 傅里叶分析

傅里叶分析是把时间函数从时间域转换到频率域进行分析的有力工具。在进行系统分析时，不仅需要研究信号随时间变化的情况，还常常需要考虑其组成方面的问题，这就叫作从时间域转换到频率域上研究问题。信号在不同域上的特征，是从不同的角度对信号进行描述，以提取尽可能多的有用信息，供分析研究用。

1.2.1 周期函数的傅里叶级数

设 $x_T(t)$ 是周期为 T 的函数，如果在区间 $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ 上：①连续或只有有限个第一类间断点；②只有有限个极值点，则函数 $x_T(t)$ 可展开为

$$x_T(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos 2\pi n f_0 t + b_n \sin 2\pi n f_0 t] \quad (1-5)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_T(t) dt \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_T(t) \cos 2\pi n f_0 t dt \quad (n=1,2,3,\dots) \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_T(t) \sin 2\pi n f_0 t dt \quad (n=1,2,3,\dots) \end{aligned} \right\} \quad (1-6)$$

式(1-5)表明,周期函数可以用三角级数展开。 a_0 、 a_n 和 b_n 称为 $x_T(t)$ 的傅里叶系数, $f_0 = \frac{1}{T}$ 称为基频, $\frac{a_0}{2}$ 称为直流分量, $a_1 \cos 2\pi f_0 t + b_1 \sin 2\pi f_0 t$ 称为基波, $f_n = n f_0$ 称为谐频, $a_n \cos 2\pi n f_0 t + b_n \sin 2\pi n f_0 t$ 称为 n 阶谐波, $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ 为其振幅。周期函数的傅里叶级数展开,就是把它展成直流分量与所有 n 阶谐波的迭加。

图 1.4 所示为一周期方波,该方波在区间 $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$

上的函数表示式为

$$x_T(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < \frac{T}{2} \\ -1 & -\frac{T}{2} \leq t < 0 \end{cases}$$

按式(1-6)有

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_T(t) dt = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_T(t) \cos 2\pi n f_0 t dt = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_T(t) \sin 2\pi n f_0 t dt$$

$$= \frac{2}{n\pi} (1 - \cos n\pi)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{当 } n = 2K \\ \frac{4}{(2K-1)\pi} & \text{当 } n = 2K-1 \end{cases} \quad (K=0,1,2,3,\dots)$$

把傅里叶系数代入式(1-5)得

$$x_T(t) = \frac{4}{\pi} \left[\sin 2\pi f_0 t + \frac{1}{3} \sin 6\pi f_0 t + \dots + \frac{1}{2K-1} \sin(2K-1)\pi f_0 t + \dots \right]$$

上式说明,方波可以用一系列正弦波的迭加表示,所取项数越多,近似程度越好。图 1.5 所示为方波 $x_T(t)$ 与展开波形的关系。

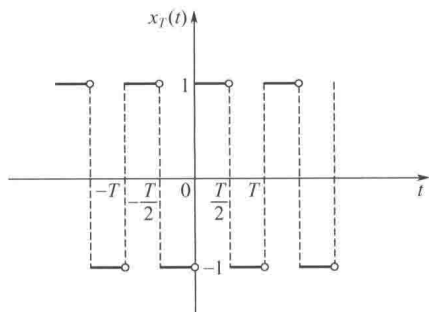


图 1.4 周期方波

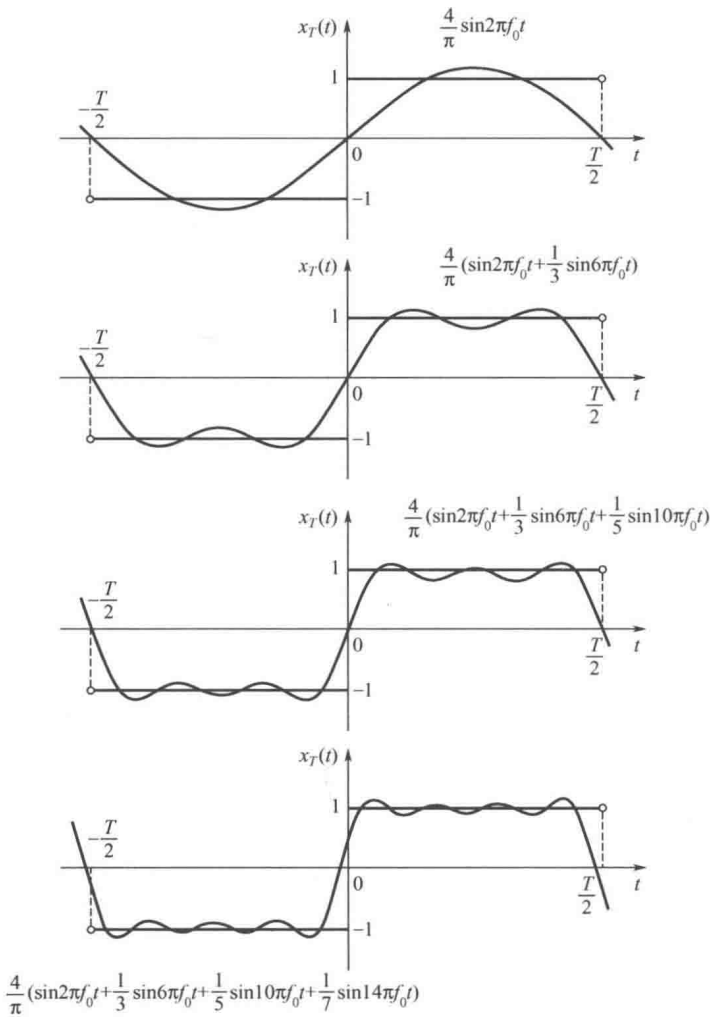


图 1.5 方波与展开波形的关系

1.2.2 傅里叶级数的复指数形式

实用上，周期函数的傅里叶级数常用指数形式表达，应用欧拉公式

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta &= \frac{1}{2}(e^{j\theta} + e^{-j\theta}) \\ \sin \theta &= \frac{1}{2j}(e^{j\theta} - e^{-j\theta}) \end{aligned} \right\} \quad (1-7)$$

式中， $j = \sqrt{-1}$ 。

将式(1-7)代入式(1-5)，整理后得到

$$x_T(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n - jb_n}{2} e^{j2\pi n f_0 t} + \frac{a_n + jb_n}{2} e^{-j2\pi n f_0 t} \right] \quad (1-8)$$

如果令

$$C_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x_T(t) dt$$

$$C_n = \frac{a_n - jb_n}{2} = \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x_T(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

$$C_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2} = \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x_T(t) e^{j2\pi n f_0 t} dt \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

将上列三式归结为一个式子，并令 $f_n = n f_0$ ，则有

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x_T(t) e^{-j2\pi f_n t} dt \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (1-9)$$

于是式(1-8)可写为

$$\begin{aligned} x_T(t) &= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [C_n e^{j2\pi f_n t} + C_{-n} e^{-j2\pi f_n t}] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{j2\pi f_n t} \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \end{aligned} \quad (1-10)$$

这就是傅里叶级数的复指数形式，或者写为

$$x_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\int_{\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x_T(t) e^{-j2\pi f_n t} dt \right] e^{j2\pi f_n t} \quad (1-11)$$

需要说明的是，在式(1-10)或式(1-11)中，和式是对 $n = -\infty$ 到 $n = +\infty$ 累加的，因而出现“负频率”的概念，这一概念在物理上是无意义的，纯粹是为数学上运算的方便而引入的。

1.2.3 傅里叶变换

实践中经常遇到在有限区间内满足式(1-5)条件的非周期函数。显然，非周期函数不能直接运用傅里叶级数展开式。但是，可以把任何一个非周期函数 $x(t)$ ，看成是由某个周期函数 $x_T(t)$ 当 $T \rightarrow \pm\infty$ 时转化来的。为了说明这一点，构造周期函数 $x_T(t)$ ，使其在 $\left[\frac{-T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ 内等于非周期函数 $x(t)$ ，而在之外按周期 T 延拓出去，如图 1.6 所示。

不难看出， T 越大， $x(t)$ 与 $x_T(t)$ 相等的范围也越大，这表明当 $T \rightarrow \pm\infty$ 时，周期函数 $x_T(t)$ 便转化为 $x(t)$ ，即

$$\lim_{T \rightarrow \infty} x_T(t) = x(t)$$

联系式(1-11)，于是

$$x(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\int_{\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x_T(t) e^{-j2\pi f_n t} dt \right] e^{j2\pi f_n t}$$

记 $\Delta f = f_n - f_{n-1} = \frac{1}{T}$ ，当 $T \rightarrow \infty$ 时， $\Delta f \rightarrow 0$ ，则上式可写为



$$x(t) = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x_T(t) e^{-j2\pi f_n t} dt \right] e^{j2\pi f_n t} \Delta f \quad (1-12)$$

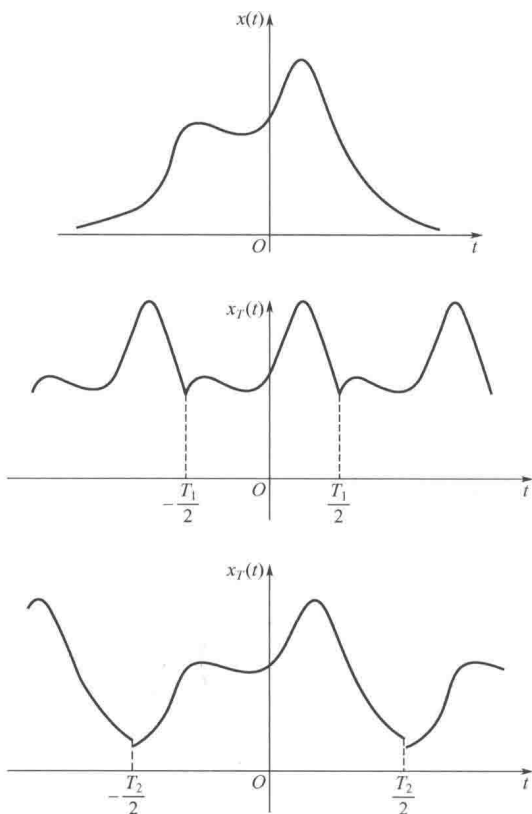


图 1.6 $x_T(t)$ 转化为 $x(t)$ 的示意图

考察式(1-12)方括弧内的积分, 当 $T \rightarrow \infty$ 时, 积分的上下限变为 $-\infty$ 和 $+\infty$, $x_T(t) \rightarrow x(t)$ 。同时, 离散频率 f_n 密布在整个 f 轴上, 成为连续频率 f 。因此, 式(1-12)中方括弧内的积分当 $T \rightarrow \infty$ 时, 可记为

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \quad (1-13)$$

代入式(1-12), 并按广义积分的概念, 可改写为

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \right] e^{j2\pi f t} df \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df \end{aligned} \quad (1-14)$$

以上是概念性的推导, 严格的数学推导表明, 只有满足条件

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty \quad (1-15)$$

式(1-13)及式(1-14)才成立。

通常, 式(1-13)称为函数的傅里叶变换, 而式(1-14)称为傅里叶逆变换, 并把 $x(t)$ 与 $X(f)$

间的傅里叶变换关系记作 $x(t) \leftrightarrow X(f)$ 。两式说明, 具备一定条件的非周期函数, 可由频率为 f 的波 $X(f)e^{j2\pi ft}$ 通过 f 从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 连续变化的无限迭加(积分也是一种迭加)而构成的。

1.2.4 傅里叶变换的性质

傅里叶变换有一系列性质, 列举如下。

1) 线性性质

若 $x(t) = a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$, 其中, a_1, a_2 为任意常数, 则

$$X(f) = a_1X_1(f) + a_2X_2(f) \quad (1-16)$$

式中, $x(t) \leftrightarrow X(f)$, $x_1(t) \leftrightarrow X_1(f)$, $x_2(t) \leftrightarrow X_2(f)$ 。

式(1-16)表明, 多个信号和的傅里叶变换等于各信号的傅里叶变换之和。

2) 翻转及共轭性质

若 $x(t) \leftrightarrow X(f)$, 则

$$x(-t) \leftrightarrow X(-f) \quad (1-17)$$

$$\overline{x(t)} \leftrightarrow \overline{X(-f)} \quad (1-18)$$

式中, $x(-t)$ 为 $x(t)$ 绕纵轴的翻转, 如图 1.7 所示; $X(-f)$ 为 $X(f)$ 的翻转; $\overline{x(t)}$ 为 $x(t)$ 的复共轭; $\overline{X(-f)}$ 为 $X(-f)$ 的复共轭。

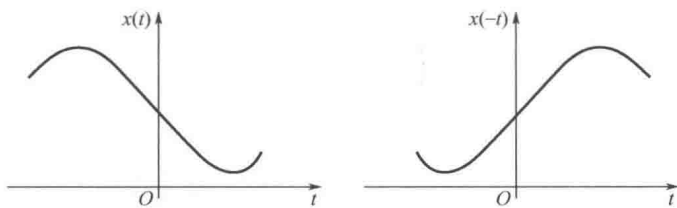


图 1.7 函数图形的翻转

3) 时移和频移性质

若 $x(t) \leftrightarrow X(f)$, 则

$$x(t - t_0) \leftrightarrow X(f)e^{-j2\pi ft_0} \quad (1-19)$$

$$X(f - f_0) \leftrightarrow x(t)e^{j2\pi f_0 t} \quad (1-20)$$

式中, t_0, f_0 分别为时移量和频移量。式(1-19)及式(1-20)表明, $x(t)$ 沿 t 轴位移 t_0 , 在频域内其傅里叶变换需乘以因子 $e^{-j2\pi ft_0}$, 即傅里叶变换的幅值不变而改变相位。 $X(f)$ 沿 f 轴位移 f_0 , 在时域内相应得时间函数需乘以因子 $e^{j2\pi f_0 t}$ 。

4) 卷积定理

卷积的概念: 对于任意两个函数 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$, 它们的卷积定义为

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau)x_2(t - \tau)d\tau \quad (1-21)$$

式中, 符号“*”代表卷积积分运算。其几何意义如图 1.8 所示。图 1.8(a)和图 1.8(b)分别画出了