

Nonlinear Stochastic Dynamics and Fault
Identification of Gear Transmission System

齿轮传动系统的非线性 随机动力学与故障辨识

王靖岳◇著



科学出版社

齿轮传动系统的非线性随机 动力学与故障辨识

王靖岳 著



科学出版社

北京

内 容 简 介

本书针对具有非光滑性、非线性、随机性和时滞性的齿轮传动系统,就随机扰动下齿轮传动系统的非线性动力学模型、分岔与混沌振动、系统参数合理匹配、混沌振动控制、故障振动信号辨识等问题进行了探究。相关成果可为齿轮传动系统的设计、制造、故障诊断技术提供参考。

本书适用于学习和研究机械系统动力学与故障辨识的读者,包括机械、车辆、交通、航空、电力、冶金、化工等相关专业的高年级本科生、研究生、教师,以及相关的科研人员和工程技术人员等。

图书在版编目(CIP)数据

齿轮传动系统的非线性随机动力学与故障辨识/王靖岳著. —北京:科学出版社, 2017.12

ISBN 978-7-03-055877-0

I. ①齿… II. ①王… III. ①齿轮传动装置-非线性力学-动力学-研究 ②齿轮传动装置-故障诊断-研究 IV. ①TH132.41

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第305761号

责任编辑:王喜军/责任校对:王 瑞
责任印制:吴兆东/封面设计:壹选文化

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

北京中石油彩色印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2017年12月第 一 版 开本:720×1000 1/16

2017年12月第一次印刷 印张:12

字数:242 000

定价:78.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前 言

齿轮传动系统是应用最广的运动或动力传递装置，是车辆、机械、航空航天、冶金、电力、煤炭、石化、核能等许多行业中的关键机械设备。它的动力学行为和工作性能对整个机械设备系统有着重要的影响。目前，国内外对含有齿轮静态传动误差、齿侧间隙和时变啮合刚度的齿轮传动系统的建模问题已经日趋成熟，对系统的线性振动分析也基本能满足实际工程的需要。人们对齿轮传动系统进行研究，通常将其视为一种确定性动力系统，但在实际工作过程中，制造误差、加工误差、装配误差、磨损、润滑、温度和运行环境变化等因素将导致齿轮传动系统的内外部激励和系统参数具有不确定性，从而使确定性齿轮传动系统变为随机系统。因此，研究其非线性随机动力学行为具有重要的理论价值和工程意义。另外，齿轮传动系统一旦发生故障就将引起机械设备失效。如果对齿轮传动系统提前进行诊断就可以有效地避免意外事故发生，消除继发损坏，节约大量维护费用。因此，研究齿轮传动系统的故障诊断技术，对于保障设备的安全运行、避免灾难性事故的发生和减少重大经济损失具有十分重要的意义。

本书针对具有非光滑性、非线性、随机性和时滞性的齿轮传动系统，就随机扰动下齿轮传动系统的非线性动力学模型、分岔与混沌振动、系统参数合理匹配、混沌振动控制、故障振动信号辨识等问题进行了探究。

本书分为 6 章。第 1 章研究随机扰动下齿轮传动系统的非线性随机动力学模型问题。利用蒙特卡罗法和中心极限定理得到齿轮啮合频率、阻尼比、啮合刚度、齿侧间隙等随机扰动以及输入力矩引起的随机扰动，再结合齿轮啮合频率、阻尼比、啮合刚度、齿侧间隙和输入力矩等因素，建立齿轮传动系统的非线性随机动力学模型，利用牛顿定律建立系统的动力学方程，应用 4~5 阶变步长的 Runge-Kutta 法对动力学方程进行数值求解并阐述其有效性。第 2 章分析随机扰动下齿轮传动系统的非线性动力学特性。利用系统的分岔图、相图、功率谱图、时间历程图、Poincaré 映射图和最大 Lyapunov 指数等手段分析系统的分岔和混沌振动，指出系统发生分岔的种类以及通往混沌振动的途径。在特定的系统参数下，给出系统稳定运动的区间。第 3 章针对具有非线性间隙和扰动的随机齿轮传动系统，研究随机扰动对齿轮传动系统非线性动力学的影响。应用中心极限定理和蒙特卡罗法，并结合分岔图、相图、时间历程图、功率谱图、Poincaré 映射图和最大 Lyapunov 指数分析激励频率、齿侧间隙、阻尼比、啮合刚度和输入力矩等参数

的随机扰动对系统产生分岔和混沌振动的影响。第 4 章研究随机扰动下齿轮传动系统的参数合理匹配问题。在高速、低速、重载、轻载等不同运行工况下,分析齿轮传动系统的载荷比、齿频比、阻尼比、齿侧间隙和啮合刚度等各个随机参数对系统发生分岔和混沌振动区间的影响,并合理匹配各参数使系统运行在稳定的运动状态。第 5 章针对非线性随机齿轮传动系统,研究齿轮传动系统混沌振动的控制,并提出可行、合理的控制策略。研究控制参数的选取范围对预控制周期轨道的影响。利用数值仿真验证本章所运用的反馈控制法和非反馈控制法的可行性和有效性。第 6 章研究齿轮传动系统的故障辨识。首先建立随机扰动下含磨损故障的齿轮传动系统非线性动力学模型,然后就齿轮磨损故障的冲击信号特点,运用小波去噪理论、数学形态学和频率切片小波变换方法提出基于 Symlets A 小波族形态去噪和频率切片小波变换的故障信号辨识方法;用数值仿真例子说明本书所提方法的可行性和有效性。针对滚动轴承点蚀故障的特点,运用数学形态学、自相关理论和经验模态分解法提出基于自相关形态滤波和经验模态分解的故障信号辨识方法,并用实验验证该方法的有效性和优越性。

本书在撰写过程中得到了很多同行专家的大力帮助,还参考了许多国内外专家和学者的专著和论文,在此深表感谢!

感谢辽宁省自然科学基金(20170540786)、中国博士后科学基金(2017M610496)、机械传动国家重点实验室开放基金(SKLM-T-KFKT-201605)和沈阳理工大学机械设计理论重点学科开放基金(4771004kfx08)的资助!

由于作者水平有限,书中难免存在一些不妥之处,敬请广大读者批评指正。

作 者

2017 年 10 月

目 录

前言

第 1 章 齿轮传动系统的非线性随机动力学模型	1
1.1 齿轮传动系统所受激励的类型	3
1.1.1 内部激励	3
1.1.2 外部激励	3
1.1.3 随机扰动激励	5
1.2 齿轮啮合的时变刚度	6
1.2.1 方波形式的刚度	7
1.2.2 有限元回归法得出的刚度	7
1.2.3 有限次谐波形式的刚度	8
1.3 非线性齿侧间隙	8
1.3.1 齿侧间隙的概念	8
1.3.2 齿侧间隙的影响因素	9
1.4 齿轮传动误差	10
1.4.1 齿轮传动误差的概念	10
1.4.2 齿轮传动误差的分类	10
1.5 齿面摩擦与磨损	11
1.5.1 齿面摩擦	11
1.5.2 齿面磨损	12
1.6 齿轮传动系统非线性随机模型与方程	12
1.6.1 单自由度齿轮传动系统非线性随机模型与运动微分方程	12
1.6.2 多自由度齿轮传动系统非线性随机模型与运动微分方程	14
1.7 本章小结	18
第 2 章 齿轮传动系统的非线性随机动力学分析	19
2.1 方程的求解方法及其有效性	19
2.1.1 方程的求解方法	19
2.1.2 方法的有效性	20
2.2 非线性系统解的形式	23
2.2.1 周期运动及其稳定性	23

2.2.2	拟(准、概)周期运动	25
2.2.3	周期运动的分岔	25
2.2.4	混沌振动及产生路径	25
2.3	非线性系统解的分析方法和数值分析	27
2.3.1	分析方法	27
2.3.2	数值分析	29
2.4	本章小结	39
第3章	随机扰动对齿轮传动系统动力学的影响分析	40
3.1	内部参数激励随机扰动对系统特性的影响	40
3.1.1	啮合频率的随机扰动对系统特性的影响	40
3.1.2	齿侧间隙的随机扰动对系统特性的影响	49
3.1.3	阻尼比的随机扰动对系统特性的影响	57
3.1.4	啮合刚度的随机扰动对系统特性的影响	65
3.2	外部激励随机扰动对系统运动特性的影响	72
3.2.1	外部激励的随机扰动	72
3.2.2	输入力矩引起的随机扰动对系统运动特性的影响	72
3.3	本章小结	80
第4章	齿轮传动系统的参数合理匹配分析	81
4.1	系统参数对运动特性的影响	81
4.1.1	载荷比对系统运动特性的影响	81
4.1.2	齿频比对系统运动特性的影响	83
4.1.3	阻尼比对系统运动特性的影响	85
4.1.4	齿侧间隙对系统运动特性的影响	96
4.1.5	啮合刚度对系统运动特性的影响	99
4.2	系统参数的合理匹配分析	111
4.2.1	参数合理匹配的分析方法及选取原则	111
4.2.2	实例分析	111
4.3	本章小结	113
第5章	齿轮传动系统混沌振动的控制	114
5.1	反馈法控制	115
5.1.1	线性控制法	115
5.1.2	非线性控制法	125
5.2	非反馈法控制	137
5.2.1	外加周期信号法	141

5.2.2	外加恒定载荷法	143
5.2.3	位相法	145
5.3	本章小结	148
第 6 章	齿轮传动系统的故障辨识	149
6.1	基于 Symlets A 小波族形态去噪和频率切片小波变换的磨损故障 检测方法	156
6.1.1	基本原理	156
6.1.2	含齿面磨损故障的系统运动微分方程	159
6.1.3	仿真分析	160
6.2	基于自相关形态滤波和 EMD 的轴承故障检测方法	163
6.2.1	基本原理	163
6.2.2	实例验证	164
6.2.3	对比分析	169
6.3	本章小结	170
参考文献	171

第1章 齿轮传动系统的非线性随机动力学模型

迄今为止,国内外学者已经提出了很多形式的齿轮传动系统模型。根据轮齿啮合过程中所涉及的不同非线性因素,模型可以被分为以下四种形式^[1]。

(1) 线性时不变模型 (linear time invariant model, LTIM)。

此类模型不考虑齿侧间隙、啮合刚度时变特性和啮合误差等非线性因素^[2,3],可应用于齿轮传动系统固有频率的计算^[4,5]。

(2) 线性时变模型 (linear time variant model, LTVM)。

此类模型仅考虑系统中啮合刚度和滚动轴承支承刚度的时变特性,不考虑齿侧间隙和啮合误差等非线性因素^[6]。

(3) 非线性时不变模型 (nonlinear time invariant model, NTIM)。

此类模型仅考虑系统中齿侧间隙和滚动轴承间隙的非线性,不考虑时变刚度^[7]。

(4) 非线性时变模型 (nonlinear time variant model, NTVM)。

此类模型同时考虑啮合刚度、齿侧间隙、啮合误差等时变和非线性因素^[8-12]。另外,根据系统模型的自由度数,又可以分为以下几类。

(1) 单对齿轮副的单自由度模型。

此类模型主要用来研究齿轮传动系统的扭转振动^[13-16]。

(2) 单对齿轮副的多自由度模型。

此类模型主要用来研究齿轮传动系统的弯、扭、摆等耦合振动^[17,18]。

(3) 不考虑传动轴和轴承的多对齿轮副啮合的多自由度模型。

此类模型主要研究当齿轮传动轴和轴承刚度较大时齿轮传动系统的振动特性^[19,20],如齿轮的拍击问题和齿轮传动系统的间隙非线性振动等^[21,22]。

(4) 考虑箱体、传动轴、轴承和多对齿轮副的多自由度模型。

此类模型主要研究齿轮传动系统和结构系统的噪声和振动特性^[23]。

由于齿轮时变啮合刚度、安装误差、静态传递误差、加工误差、齿轮间隙、齿轮故障和齿面摩擦等因素的存在,齿轮传动系统在工作过程中显示出某些非线性特性,如次谐波响应、超谐波响应、分岔和混沌等^[24],所以齿轮传动系统是一个复杂的强非线性动力系统。另外,制造、加工、装配的误差、磨损、润滑、温度和运行环境变化等因素将导致齿轮传动系统的内外部激励和系统参数具有不确定性^[25]。Tobe等^[26,27]通过实验证明了齿轮系统传递误差中随机成分的存在,并建立了系统的统计动力学方程,运用统计线性化方法和矩方程求解得到响应的前两

阶矩。Wang 等^[28]分析了一个考虑时变刚度、荷载和齿轮传动误差的动态随机模拟模型。仿真系统的输入是高斯白噪声过程与谐波误差,输出是齿轮的旋转振动加速度;并用实验验证了所提出模型的正确性。Kumar 等^[29]分析了随机误差幅值和转速对动载系数的影响情况。Neriya 等^[30]分析了单级斜齿轮传动系统在随机误差激励下的动态响应。Sato 等^[31]研究了随机误差激励下齿轮传动系统的间隙非线性。Feng 等^[32]研究了随机误差和随机间隙的单级齿轮系统稳定性。Pfeiffer 等^[33]分析了在随机白噪声激励下齿轮传动系统的拍击现象。Guerine 等^[34, 35]研究了弯曲刚度、扭转刚度、阻尼系数、质量、摩擦系数等随机参数对单级齿轮传动系统动态响应的影响及综合影响规律。鲍春梅^[36]在不考虑齿面摩擦时研究随机参数和随机外激励下齿轮传动系统的响应。卢剑伟等^[37]建立了参数随机激励下的非线性齿轮传动系统动力学模型,利用蒙特卡罗法对其进行分析,探讨了齿侧间隙、激励频率、阻尼比等参数的随机扰动对系统动态特性的影响,为更好地控制系统振动提供了理论支持,也为其他随机非线性动力系统建模分析提供了借鉴;随后他们又在文献[38]中分析了随机装配侧隙对齿轮传动系统动力学特性的影响。魏永祥等^[39-42]认为物理参数和几何参数均为随机变量,建立在随机载荷激励下齿轮转子系统的扭转振动方程;利用 Newmark 逐步积分法将随机方程转换成拟静力学控制方程;然后系统动态位移反应的均值和方差公式由求解随机变量函数数字特征的矩法得出;研究表明几何参数的随机性是系统位移响应最大的影响因素;随后,随机参数齿轮系统动力可靠度的均值和方差值由可靠度的公式求出,并与蒙特卡罗法进行了比较,验证了所提出方法的可行性和有效性。熊兴波^[43]用图胞映射法对齿轮非线性随机系统进行了全局特性分析。孙志礼等^[44]对齿轮间隙非线性随机参数系统的振动响应可靠度进行了计算。王倩倩等^[45]对齿轮传动系统的随机振动、传递误差的可靠性和灵敏度进行了深入分析。陈会涛等^[46]分析了随机内外部激励对含时变啮合刚度和齿侧间隙的单级齿轮传动系统动态特性的影响。胡鹏等^[47]建立了多级齿轮传动系统的非线性动力学模型;在此模型中考虑了齿侧间隙、齿轮综合误差和时变啮合刚度等非线性影响因素,并将齿轮传动系统中的相关几何参数、载荷参数和物理参数看做随机变量而得到了随机振动模型;分析了动态传递误差对随机参数的无量纲均值灵敏度,分析结果为提高系统的平稳性提供了依据。廖映华等^[48]建立了两级分流式人字齿轮传动系统的非线性动力学模型;在此模型中考虑了轴承变形、啮合刚度、啮合误差和齿侧间隙等因素;研究了啮合刚度、啮合误差的随机性对动态啮合力及动态支承力的影响规律,为系统动力学优化以及动态可靠性优化奠定了基础。综上,在建立齿轮传动系统动力学模型时,需要根据分析目的、内外部激励情况的不同而建立不同类型的模型。

本章首先讨论齿轮传动系统啮合的动态激励的类型,然后讨论各种主要的激励。在此基础上,建立随机扰动下齿轮传动系统的非线性随机动力学模型,推导

出系统的动力学微分方程。

1.1 齿轮传动系统所受激励的类型

被广泛应用的属于弹性机械系统的齿轮传动系统在动态激励下将产生动态响应。因此, 齿轮传动系统动力学的首要问题就是研究动态激励的基本原理, 确定它的类型和性质。

动态激励主要包括内部激励、外部激励以及随机扰动所产生的激励。

1.1.1 内部激励

内部激励是指齿轮啮合过程中所产生的动态, 通常简化为周期函数。它主要包括三种形式: 误差激励、刚度激励和啮合冲击激励。

误差激励是由齿轮加工、安装误差引起的齿廓表面相对于理想齿廓位移的偏移; 它是一种周期性位移激励。研究误差激励对系统的影响、了解各种加工误差与系统动态特性的关系, 能指导设计精度等级。

刚度激励是由于啮合齿对数变化导致啮合综合刚度随时间周期变化而引起齿轮啮合力周期变化。同时刚度激励是参数激励, 这样就使齿轮系统处于参数振动状态, 这种振动属于自激振动。在某种程度上, 正是齿轮系统的这种自激振动确定了其系统动力学的基本性质和基本特性, 决定了进行分析研究必须采用的理论和方法, 刚度激励主要与齿轮副的设计参数有关。

啮合冲击激励是由于齿轮的受载变形和加工误差, 齿轮在进入和退出啮合时, 啮入和啮出点的位置会偏离理论啮合点, 产生线外啮合, 使啮合齿面产生冲击。

1.1.2 外部激励

外部激励是指除齿轮副啮合的内部激励外, 其他如原动机(电动机和发动机)、负载和联轴器等因素对齿轮啮合与齿轮系统所产生的动态激励。产生系统外部激励的原因有齿轮几何偏心、旋转质量不平衡、原动机的输入力矩、负载扭矩波动及与传动系统相关零部件的激励特性(如滚动轴承的时变刚度、离合器的非线性等)。由齿轮几何偏心引起齿轮啮合过程的大周期误差是以位移形式参与系统激励的。旋转质量不平衡产生的离心力和惯性力将引起转子动力学耦合问题。由于齿轮几何偏心和旋转质量不平衡主要是由齿轮加工误差引起的, 因此常常把它们与内部激励一起研究^[24]。

表 1.1~表 1.3 所示为外部激励的主要形式^[2]。其中, 表 1.1 是各种随时间变

化的激励，它们与系统的状态无关，是系统的外部动态激励；表 1.2 是与系统运动历程有关的激励，是系统中的时变动态激励，也称为参数激励；表 1.3 是与系统中某些自由度间的相对运动有关的激励。

表 1.1 各种随时间变化的激励

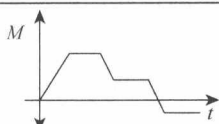



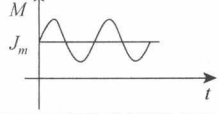
序号	类型	图示	产生的原因
1	转矩（阶梯形）		负载力矩，作用在任意零部件上的外力矩
2	波动形转矩		同步电动机的输出力矩
3	周期性转矩		发动机输出力矩
4	随机性转矩		外界干扰力矩
5	周期性惯性力矩		

表 1.2 与系统运动历程有关的激励

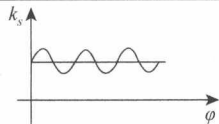
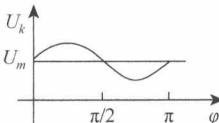
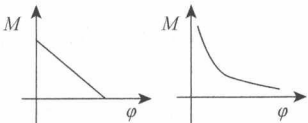
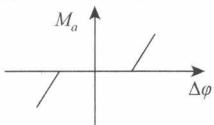
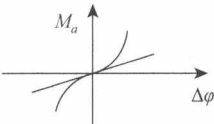
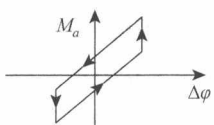
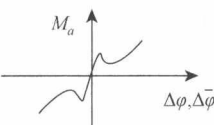
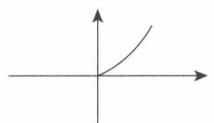
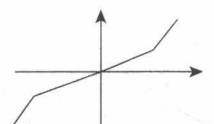
序号	类型	图示	产生的原因
1	周期性时变刚度		滚动轴承时变刚度
2	周期性时变位移		万向联轴器
3	规则型变化力矩		直流电动机输出力矩

表 1.3 与相对运动状态有关的激励

序号	类型	图示	产生的原因
1	侧隙		齿式联轴器
2	非线性转矩		柔性联轴器
3	干摩擦力矩		负载
4	滑移力矩		摩擦离合器
5	指数力矩		飞轮力矩
6	分段线性力矩		

1.1.3 随机扰动激励

本书除了考虑齿轮啮合频率、阻尼比、啮合刚度、齿侧间隙和输入力矩之外，还考虑齿轮啮合频率、阻尼比、啮合刚度、齿侧间隙等的随机扰动以及输入力矩引起的随机扰动。本书用蒙特卡罗法来产生随机扰动。

蒙特卡罗法也称随机模拟、统计模拟或数字模拟^[49]。蒙特卡罗法的基本原理如下^[50]。

设事件出现的概率为 $P(A)$ ，在 N 次独立试验中，事件 A 出现的频数为 m 。Bernoulli 大数定律指出，对于任意 $\varepsilon > 0$ ，有

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} P \left\{ \left| \frac{m}{N} - P(A) \right| < \varepsilon \right\} = 1 \quad (1.1)$$

设 s_1, s_2, \dots, s_N 是 N 个独立的随机变量, 若它们来自同一母体, 分布相同, 且具有相同的有限均值 $E(s_i) = u (i=1, 2, \dots, N)$, 根据 Kolmogorov 大数定律, 当 $N \rightarrow +\infty$ 时, 对于任意 $\varepsilon > 0$, 有

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} P \left\{ \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s_i - u \right| < \varepsilon \right\} = 1 \quad (1.2)$$

蒙特卡罗法是从同一母体中抽出简单子样来做抽样实验。根据简单子样定义, s_1, s_2, \dots, s_N 是 N 个具有独立同分布的随机变量, 由式 (1.1) 和式 (1.2) 可知, 当 N 足够大时, 频率 m/N 以概率 1 收敛于 $P(A)$, $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s_i$ 以概率 1 收敛于 u 。

齿轮啮合频率、阻尼比、啮合刚度、齿侧间隙和输入力矩的随机扰动往往近似地服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 。其中, μ 为正态分布的均值, σ^2 为正态分布的方差, 可根据具体情况选取 μ 和 σ^2 的大小。这样可求出齿轮啮合频率、阻尼比、啮合刚度、齿侧间隙和输入力矩的随机扰动量。例如, 齿轮啮合频率的随机扰动量符合正态分布 $N(0, 0.000\ 005^2)$, 即 $\mu = 0$, $\sigma = 0.000\ 005$, 取值范围为 $(-0.000\ 02, 0.000\ 02)$, 符合 3σ 准则 (也称拉依达准则), 在时间范围 $[50\text{s}, 80\text{s}]$ 内所产生的随机数如图 1.1 所示。

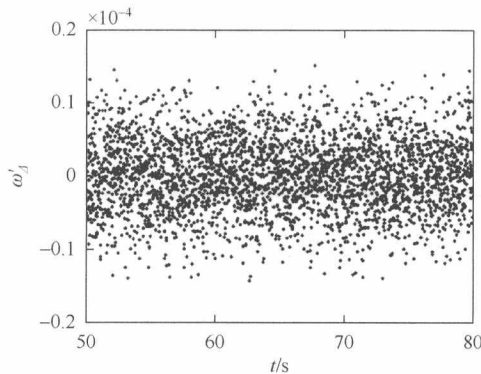


图 1.1 齿轮啮合频率的随机扰动量

1.2 齿轮啮合的时变刚度

啮合刚度是指在整个啮合区内参与啮合的各对齿轮的综合效应。齿轮啮合时参与啮合的齿轮对是随时间周期变化的, 所以齿轮对的啮合刚度也呈现周期性变化^[51]。啮合刚度主要与齿轮弯曲应力和齿轮变形有关, 要得到啮合刚度就要求得齿轮的弹性变形。

啮合刚度模型主要有时不变刚度模型和时变刚度模型两种。在时不变刚度模型中, 用一个啮合周期内齿轮的平均刚度值来表示实际的刚度, 这种模型主要用在重点分析系统中其他非线性因素对动力学影响^[24]; 而时变刚度模型主要有以下三种表现形式。

1.2.1 方波形式的刚度

方波形式的刚度曲线如图 1.2 所示。可以理解为: 在单齿啮合区, 单对轮齿参与啮合, 刚度取最小值 k_{\min} ; 在双齿啮合区, 两对轮齿参与啮合, 刚度取最大值 k_{\max} ; k_{mean} 为刚度的平均值; 在单齿啮合阶段或双齿啮合阶段, 啮合刚度并不随啮合点的改变而变化^[52, 53]。

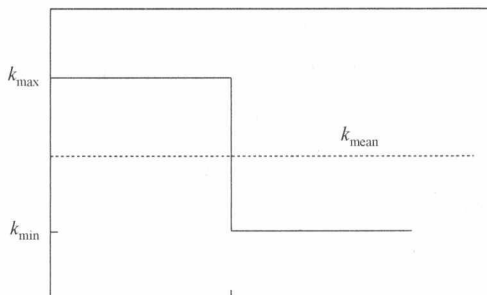


图 1.2 方波形式的刚度曲线

1.2.2 有限元回归法得出的刚度

利用有限元回归法得出的单齿啮合时的刚度为^[54-56]

$$k_i = (A_0 + A_1 X_i) + (A_2 + A_3 X_i) \frac{\bar{r}_i - R_i}{(1 + X_i)m}, \quad i=1,2 \quad (1.3)$$

式中,

$$\begin{aligned} A_0 &= 3.867 + 1.612Z_i - 0.02916Z_i^2 + 0.000155Z_i^3 \\ A_1 &= 17.060 + 0.7289Z_i - 0.01728Z_i^2 + 0.00009993Z_i^3 \\ A_2 &= 2.637 - 1.222Z_i + 0.02217Z_i^2 - 0.0001179Z_i^3 \\ A_3 &= 6.330 - 1.033Z_i + 0.02068Z_i^2 - 0.0001130Z_i^3 \end{aligned}$$

Z_i 、 m 、 R_i 、 X_i 、 \bar{r}_i 分别为齿数、模数、节圆半径、变位系数、啮合点到主、从动齿轮圆心的距离。其中, \bar{r}_i 为

$$\begin{cases} \bar{r}_1(t) = \sqrt{[(r_1 + r_2) \sin \alpha \sqrt{r_{a2}^2 r_2^2 \cos^2 \alpha + r_1 \omega_1 t}]^2 + r_1^2} \\ \bar{r}_2(t) = \sqrt{[\sqrt{r_{a2}^2 r_2^2 \cos^2 \alpha + r_1 \omega_1 t \cos \alpha}]^2 + r_1^2 \cos^2 \alpha} \end{cases} \quad (1.4)$$

式中, r_1 和 r_2 为主、从动齿轮的基圆半径; r_{a2} 为从动齿轮的齿顶圆半径; α 为压力角。

1.2.3 有限次谐波形式的刚度

啮合刚度是随时间周期变化的, 把啮合频率进行 Fourier 级数展开:

$$k(t) = k_{av} + \sum_{i=1}^n (k_{2i} \sin(i\omega t)) = k_{av} + \sum_{i=1}^n k_i \cos(i\omega t + \varphi_i) \quad (1.5)$$

式中, k_{av} 为平均刚度; k_i 为刚度的 i 阶谐波幅值; ω 为啮合频率; φ_i 为 i 阶谐波初相位, 且 $\varphi_i = \arctan(-k_{2i-1} / k_{2i})$, 令 $\bar{k}_i = \sqrt{k_{2i-1}^2 + k_{2i}^2}$ 。

一般计算过程中啮合刚度只取谐波基频部分^[57], 即 $i = 1$, 则

$$k(t) = k_{av} + k_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \quad (1.6)$$

由于这种刚度形式的数学表达式比较简单, 在齿轮非线性动力学的研究中应用比较广泛。Shen 等^[58]取 $i = 3$ 的情况下, 研究了直齿轮系统的次谐波和超谐波响应。

本书也采用这种有限次谐波形式的时变啮合刚度。

1.3 非线性齿侧间隙

1.3.1 齿侧间隙的概念

齿轮啮合传动时, 为了在啮合齿廓之间形成润滑油膜, 避免因轮齿摩擦发热膨胀而卡死, 齿廓之间必须留有间隙, 此间隙称为齿侧间隙, 简称侧隙。在国标 GB 10095—1988 中, 它被定义为: 对于装配好的一对齿轮副, 当一个齿轮固定时, 另一个齿轮的晃动量, 其度量以分度圆上对应的弧长来计算。在齿轮传动系统动力学中, 一般均是考虑各齿轮在啮合线上的运动。齿侧间隙也可以定义为齿槽宽度相对于齿厚多出的部分^[59], 如图 1.3 所示。可以通过调节中心距和齿形加工来改变齿侧间隙的大小。为了表达齿侧间隙对齿轮啮合动力学的影响, 引入一类分段非线性模型^[60], 如图 1.4 和式 (1.7) 所示。

$$f(x) = \begin{cases} x - b, & x > b \\ 0, & -b \leq x \leq b \\ x + b, & x < -b \end{cases} \quad (1.7)$$

从图 1.5 中可以看出, 轮齿在啮合过程中, 可以分为三种情况^[24]。

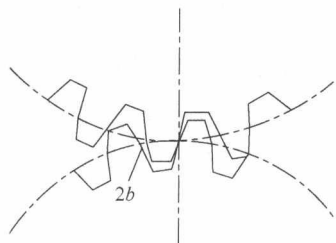


图 1.3 齿侧间隙

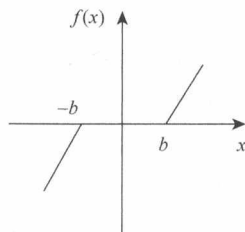
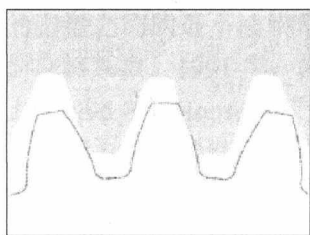
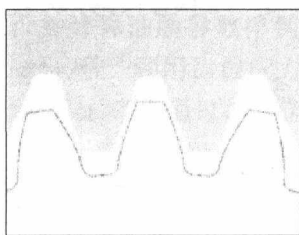


图 1.4 齿侧间隙与力的关系图

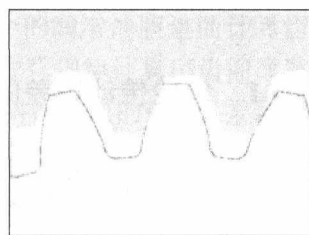
- (1) 当 $x > b$ 时, 轮齿正向啮合, 如图 1.5 (a) 所示;
- (2) 当 $-b \leq x \leq b$ 时, 轮齿脱齿, 如图 1.5 (b) 所示;
- (3) 当 $x < -b$ 时, 轮齿反向啮合, 如图 1.5 (c) 所示。



(a) 正向啮合



(b) 脱齿



(c) 反向啮合

图 1.5 齿轮啮合的三种状态

1.3.2 齿侧间隙的影响因素

影响齿侧间隙的因素有很多, 主要分为以下五大类^[59]。

(1) 设计的齿侧间隙容差。

容差可定义为两个配合尺寸间规定的最小尺寸差, 可由设计人员来控制。对于齿轮传动系统, 容差包括: ①啮合齿间的间隙; ②齿轮孔与配合轴间的间隙; ③齿轮轴与配合轴承间的间隙。

(2) 主要公差。

公差可定义为一个尺寸的允许变化量。

对于齿轮传动系统, 公差主要包括齿轮尺寸公差和中心距公差。它们是齿侧间隙的最大来源, 是不可避免的。

(3) 由次要的因素引起的齿轮中心偏移。

由公差或容差引起的径向间隙、安装误差、轴承的偏心, 以及由间隙等因素引起的齿侧间隙。但这类因素作用不明显, 小于第(2)类因素产生的齿侧间隙。