10堂极简概率课

TEN GREAT IDEAS ABOUT CHANCE

关于概率，你不能不知道的10个伟大思想

[美] 佩尔西·戴康尼斯（Persi Diaconis）
[美] 布赖恩·斯科姆斯（Brian Skyrms）/著
胡小锐/译

TEN GREAT IDEAS ABOUT CHANCE

10堂极简概率课

TEN GREAT IDEAS ABOUT CHANCE

[美] 佩尔西·戴康尼斯（Persi Diaconis）
[美] 布赖恩·斯科姆斯（Brian Skyrms）/著
胡小锐/译

中信出版集团 | 北京

图书在版编目（CIP）数据

10堂极简概率课/（美）佩尔西·戴康尼斯，（美）布赖恩·斯科姆斯著；胡小锐译. -- 北京：中信出版社，2019.4（2019.8重印）
书名原文：TEN GREAT IDEAS ABOUT CHANCE
ISBN 978-7-5086-9920-2

I. ①1… II. ①佩… ②布… ③胡… III. ①概率论－普及读物 IV. ①O211-49

中国版本图书馆CIP数据核字（2019）第009811号

10堂极简概率课

著　　者：［美］佩尔西·戴康尼斯　［美］布赖恩·斯科姆斯
译　　者：胡小锐
出版发行：中信出版集团股份有限公司
（北京市朝阳区惠新东街甲4号富盛大厦2座　邮编　100029）
承 印 者：中国电影出版社印刷厂

开　　本：880mm × 1230mm　1/32　　印　　张：9.5　　字　　数：200千字
版　　次：2019年4月第1版　　印　　次：2019年8月第2次印刷
京权图字：01-2018-4678　　广告经营许可证：京朝工商广字第8087号
书　　号：ISBN 978-7-5086-9920-2
定　　价：49.00元

前 言

这本书是由我们在斯坦福大学合作教授了约10年的一门课程衍生而来的。这是一门大型的混合性课程，听课的人是本科生或研究生，他们分别来自哲学、统计学和一些交叉学科。随着课程的不断发展，我们越来越相信它的内容应该可以吸引更多的听众。学习这门课的一个先决条件，就是接触过一门概率论或统计学的课程，这本书的读者同样需要满足这个条件。但是，考虑到某些读者可能是在很久以前学过这类课程，我们在书中以附录的形式，对概率论进行了一次简要的复习。

这本书涉及的内容包括历史、概率和哲学。我们不仅介绍了概率论发展过程中的一些伟大思想及其历史，还致力于探索这些思想的哲学意义。一位阅读过本书初稿的读者抱怨说，读到最后，他仍然不了解我们关于概率的哲学观点，原因或许是我们过于中立。这个问题现在已经解决了，你会发现我们是彻头彻尾的贝叶斯学派，是贝叶斯（Thomas Bayes）、拉普拉斯（Pierre-Simon Laplace）、拉姆齐（Frank Ramsey）和菲尼蒂（Bruno de Finetti）的信徒。有人认为贝叶斯学派是与频率学派相对立的，而我们并不否认频率的重要性，或者讨论客观概率的价值。不仅如此，我们还会在合理的置信度框架内统一考虑这些问题。

在这本书的开头，我们与先驱者一起思考，涉及的工具很简单。但到了后半部分，我们将回到当下，不可避免地会接触到一些技术性细节。

为了保证行文简洁流畅，我们将把某些细节内容放到附录中，大家可以根据需要查阅。我们还做了大量注释，以方便读者深入挖掘自己感兴趣的内容。在这本书的最后，我们列出了一份参考书目。此外，脚注也给出了较为详细的解释。

佩尔西 · 戴康尼斯
布赖恩 · 斯科姆斯

目 录 | CONTENTS

第4课 频率与概率之间有什么关系？

第5课 如何用数学方法解决概率问题？

第6课 贝叶斯定理如何改变了世界？

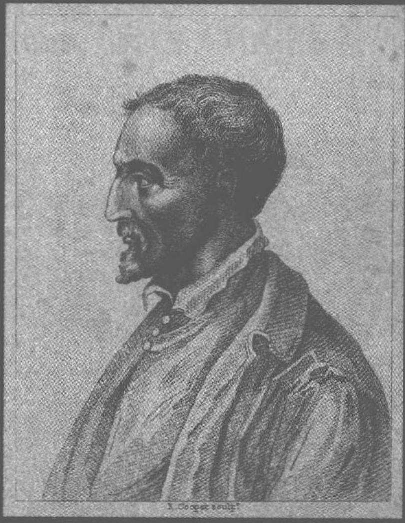
第7课 菲尼蒂定理与可交换概率

第8课 如何用图灵机生成随机序列？

附 录 概率辅导课

第 1 课

概率是可以测度的



吉罗拉莫·卡尔达诺（Gerolamo Cardano）

要搞清楚一门学科的本质，认真研究该学科的开创者的想法是一条可行的路径。事实上，某些基础性哲学问题从一开始就是显而易见的。关于概率，我们的第1堂课要介绍的第一个伟大思想是：概率是可以测度的。这个观点的形成时间是16—17世纪，过程为何如此漫长，这个问题至今仍然是一个谜。希腊神话中有命运女神堤喀（Tyche）；德谟克利特（Democritus）及其追随者假设，构建宇宙的所有原子都会受到某种物质偶然性的影响；卢克莱修（Lucretius）在《物性论》（*De Rerum Natura*）中指出，这种偶然性就是原子的偏离；古埃及人和古巴比伦人学会了用指关节骨或骰子玩概率游戏，到了罗马时期，这种游戏流行开来，士兵们通过抽签决定基督斗篷的归属。后来，古希腊学园派怀疑论者将概率视为人生的指南。[1]不过，这些时期似乎都没有出现有关概率的定量理论。[2]

想一想，我们是怎么测量东西的？[3]以长度为例，我们会先找到一个长度标准，然后计数某个东西包含多少个这样的标准长度。比如，在我们用脚步测量距离时，这个长度标准就是我们的脚。但是，不同的脚有可能得出不同的测量结果，因此，1522年，有人提议改进法定路德（杆）的确定方法。如图1–1所示，当人们从教堂鱼贯而出时，将排成一列的

图 1-1　法定路德的确定

16个人的脚的总长度设定为法定路德。[4]从图1–1可以看出，这些人的脚长度不一，但通过一群人来设定这个长度单位具有明显的平均效应，因此很多人接受了这个方法。不过，当时似乎还没有人明确提出平均数这个概念。

我们有必要指出，这个方法存在哲学上的异议。我们的目的是定义长度，但在用脚长测量距离时，我们已经假定我们采用的长度标准等长。[5]因此，这是一个循环论证的过程。

任何有头脑的人都不会因为这个异议而放弃用脚长测量距离的方法。我们的测量活动就始于此，最终建立并完善了长度的概念。脚的长度因人而异，路德会长短不一，标准米尺的长度在足够高的精度条件下也会各不相同。借助物理学知识，我们可以不断改进长度测量方法。因此，这确实是一个循环论证的过程，但它并不是一个致命的缺陷，反而为我

们指明了一条趋于完善的道路。[①]

概率的测度同样如此。在测度之前，我们先要找到（或者制造）同等可能性的情况，然后计数这些情况发生的次数。于是，事件A的概率，记作$P(A)$，为

$$P(A)=\frac{\text{事件}A\text{发生的次数}}{\text{所有可能发生的事件的次数}}$$

注意，从上式可知：

1. 概率永远不会是负值；
2. 如果所有可能发生的情况中均包含事件A，则$P(A)=1$；
3. 如果事件A和事件B不会同时发生，则$P(A\text{或}B)=P(A)+P(B)$。

此外，某个事件不会发生的概率等于1与该事件发生概率的差：

$$P(\text{非}A)=1-P(A)\text{。}$$

这个概念虽然十分简单，但如果运用得巧妙得当，就会产生令人惊讶的效果。我们以生日问题为例。如果不考虑闰年，并且假设出生日期的概率均相等，每个人的生日相互独立（即没有双胞胎），那么房间内的所有人中至少有两个人的生日在同一天的概率是多少？如果你以前没有见过这个问题，它的答案肯定会让你大吃一惊。

一群人中有人生日在同一天的概率等于1减去所有人生日均不相

① 促使等概率这个概念逐步完善的道路是什么？继续阅读这本书，你就会找到答案。

同的概率。第二个人与第一个人的生日不同的概率为（364/365）。如果前两个人的生日不同，那么第三个人的生日与他们俩都不相同的概率为（363/365），以此类推。因此，N个人中有人生日相同的概率为

$$1-\left(\frac{364}{365}\times\frac{363}{365}\times\cdots\times\frac{365-N+1}{365}\right)。$$

如果你对同额赌注感兴趣，就可以利用上述公式，找到使输赢概率趋近1/2的N的值。当房间里一共有23个人时，生日相同的概率会略高于1/2。如果房间里有50个人，这个概率就会接近97%。

人们经常利用生日问题来考虑一些令人吃惊的巧合情况，因此生日问题出现了很多变种。比如，两个美国人的生日相同，而且他们的父亲、祖父和曾祖父生日相同的可能性大到令人吃惊的程度。为帮助大家应对这些问题，本堂课内容的附录部分给出了一些有用的近似值。最后，本书在结尾部分又利用这些近似值，证明了菲尼蒂定理。现在，大家只要知道“等可能情况”这个基本结构应用广泛和深入就可以了。

概率测度的开始

创建等概率情况，最有效的方法莫过于抛掷质地均匀的骰子，或者从洗好的一副牌中抽取扑克牌。概率的测度就是从这里开始的。我们不知道首创者是谁，但数学家、医生、占星家吉罗拉莫·卡尔达诺早在16世纪研究赌博游戏时就明明白白地提到过这个概念。[6]卡尔达诺有时以赌博为生，因此他对等概率假设非常敏感。此外，他对动过手脚的骰子以及其他作弊手法都了如指掌：“……骰子有时并不诚实，可能是因为它

被打磨过，也可能是因为它被削扁了（这很容易被人看穿），还可能是因为相对应的两面受到挤压而变得扁平了……牌类游戏的作弊手段更是层出不穷。”[7]

17世纪早期，伽利略（Galileo）给他的赞助人托斯卡纳大公爵写了一封简短的信，回答了后者提出的一个关于骰子的问题。公爵认为，通过计算可能情况得出的答案似乎是错误的。投掷三枚骰子时，得到10点和11点的数字组合方式各有6种，9点和12点同样如此。“……但是，众所周知，骰子玩家通过长期观察发现，掷出10点和11点的可能性比9点和12点的可能性更大。”[①]这是怎么一回事呢?

伽利略答道，他的赞助人在计算得到9点和10点的可能情况时，把三个3点计作一种可能，把两个3点和一个4点也计作一种可能，这种方法是错误的。伽利略指出，后者涵盖了三种可能的组合，它们彼此之间的不同点就在于是哪枚骰子掷出了4点。

<4, 3, 3>，<3, 4, 3>，<3, 3, 4>。

前者的确只有一种可能，即<3, 3, 3>。伽利略完全掌握了排列组合的相关知识，似乎并没有觉得这是什么新鲜事物。

在构建等概率情况时，伽利略和卡尔达诺似乎都隐晦地使用了独立性这个概念。他们认为，对于每一枚骰子，抛掷后得到6个面中的每一个的概率都相等，在抛掷三枚骰子时，得到216个可能结果中的每一个的

---

① 这个问题的表述有一个奇怪的地方，那就是对长期观察这个表达的解释。观察必须持续进行很长时间。根据伽利略的计算，得到9点的概率是25/216，约等于0.116；得到10点的概率是27/216，约等于0.125。两者相差0.009，约等于1/100。大家可以计算一下需要观察的次数，当作一次练习。