中国科学院数学与系统科学研究院
中国科学院华罗庚数学重点实验室

数学所讲座2016

张 晓　付保华　王友德　席南华　主编

科学出版社

中国科学院数学与系统科学研究院
中国科学院华罗庚数学重点实验室

数学所讲座 2016

张　晓　付保华　王友德　席南华　主编

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

中国科学院数学研究所一批中青年学者发起组织了数学所讲座，介绍现代数学的重要内容及其思想、方法，旨在开阔视野，增进交流，提高数学修养. 本书的文章系根据 2016 年数学所讲座 8 个报告的讲稿整理而成，按报告的时间顺序编排. 具体内容包括：K-等价与代数闭链、泰希米勒空间、高维仿真李代数、特殊拉格朗日方程、从太阳系的稳定性谈起、典型李群及其表示、随机分析与几何、引力的全息性质及其应用等.

本书可供数学专业的高年级本科生、研究生、教师和科研人员阅读参考，也可作为数学爱好者提高数学修养的学习读物.

图书在版编目(CIP)数据

数学所讲座. 2016/张晓等主编. —北京：科学出版社，2020. 5

ISBN 978-7-03-064651-4

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①数学-普及读物 Ⅳ. ①O1-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2020) 第 038792 号

责任编辑：李 欣 李香叶／责任校对：彭珍珍
责任印制：吴兆东／封面设计：王 浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京中石油彩色印刷有限责任公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2020 年 5 月第 一 版 开本：720 × 1000 1/16
2020 年 5 月第一次印刷 印张：13 插页：1
字数：262 000

定价：78.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

序

学术交流对促进研究工作、培养人才有着十分重要的作用, 尤其对以学者个人思维为主要研究方式的数学研究, 作用更显突出. 国际上, 学术水平很高、人才辈出的研究机构与大学, 也总是学术交流活动 (Seminar, Colloquium, Workshop) 十分活跃的地方.

国内现代科学的发展已有百年历史, 学术交流也伴随着产生和发展. 近三十多年改革开放的进程, 大大加速了学术交流与科学的发展. 从数学学科来说, 许多研究机构与大学涉及专门领域的讲座或专题讨论班(Seminar) 一般进行得比较好, 对参加者尤其是青年学者帮助较大, 从而参加者的积极性也比较高. 然而综合性的讨论班 (Colloquium) 情况就有显著的不同, 听众常常感到完全听不懂, 没有什么收获, 不感兴趣. 综合讨论班进行得不理想, 原因可能是多方面的, 例如, 从大学到研究生阶段, 基础就打得比较专门与单一; 研究工作长期局限于自己的专业领域, 对其他方面缺少了解与兴趣; 演讲人讲得过于专业, 没有深入浅出的本领; 听讲人有实用主义的观点, 如果演讲内容与自己的研究工作没有联系, 报告对自己没有直接帮助, 就对演讲不感兴趣, 如此等等. 长期下去, 我们仅仅熟悉自己的研究领域, 对数学的全貌与日新月异的发展缺乏了解. 不同的领域之间, 相当隔膜, 甚至缺乏共同的语言.

这些情况, 与出高质量的研究成果和高水平人才的目标是难以符合的, 也难以形成国际上有吸引力与影响力的数学研究中心. 为此, 中国科学院数学研究所席南华院士与一批出色的中青年学者发起, 组织了数学所讲座, 正是一种适合我国当前情况的综合讨论班. 进行了近两年, 效果是很好的. 演讲人虽然都是各领域的专家, 却做了认真与精心的准备, 将该领域的主要思想、成果、方法, 用深入浅出、通俗易懂的方式介绍给大家. 听众从白发苍苍的老教授到许多中青年学者以及广大的博士后、研究生, 都十分踊跃参加, 普遍感到开拓了视野, 增进了交流, 使学术气氛更为浓郁.

现在, 演讲的学者花费了许多时间与精力, 将演讲正式整理成文, 由科学出版社出版, 这是对我国数学发展很有意义的工作. 认真阅读这些文章, 将使我们对数学的有关领域有扼要的了解, 对数学里的“真”与“美”有更多的感悟, 提高数学修养, 促进数学研究与人才培养工作.

杨 乐

2011 年 12 月 10 日

前　言

“数学所讲座”始于 2010 年, 宗旨是介绍现代数学的重要内容及其思想、方法和影响, 拓展科研人员和研究生的视野, 提高数学修养和加强相互交流、增强学术气氛. 那一年的 8 个报告整理成文后集成《数学所讲座 2010》, 杨乐先生作序, 于 2012 年由科学出版社出版发行. 2011 年和 2012 年数学所讲座 16 个报告整理成文后集成《数学所讲座 2011—2012》, 于 2014 年出版发行. 2013 年数学所讲座 8 个报告整理成文后集成《数学所讲座 2013》, 于 2015 年出版发行. 2014 年数学所讲座的 8 个报告中的 7 个整理成文后集成《数学所讲座 2014》, 于 2017 年出版发行. 2015 年数学所讲座的 9 个报告整理成文后集成《数学所讲座 2015》, 于 2018 年出版发行. 这些文集均受到业内人士的欢迎. 这对报告人和编者都是很大的鼓励.

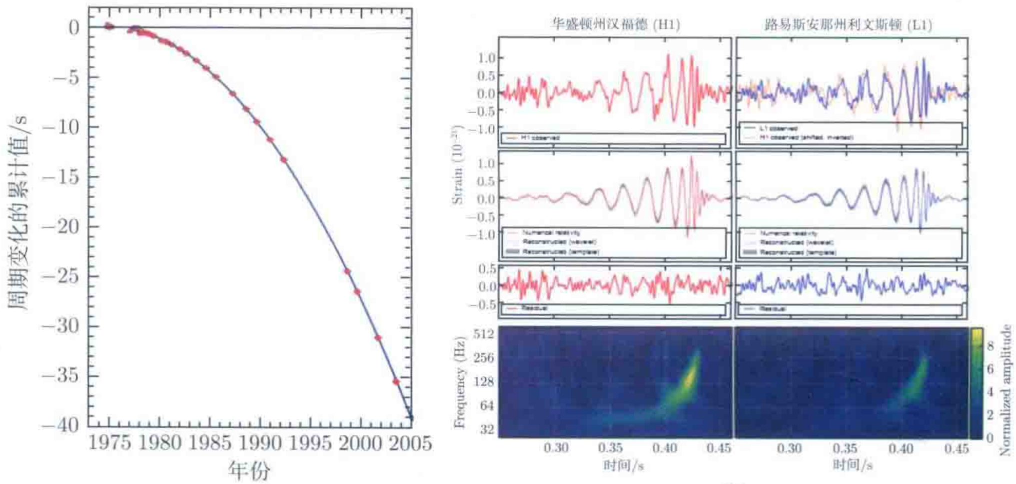
本书的文章系根据 2016 年数学所讲座的 8 个报告整理而成, 按报告的时间顺序编排. 如同前面的文集, 在整理过程中力求文章容易读, 平易近人, 流畅, 取舍得当. 文章要求数学上准确, 但对严格性的追求适度, 不以牺牲易读性和流畅性为代价.

文章的选题, 也就是报告的主题, 有 K- 等价与代数闭链、泰希米勒空间、高维仿真李代数、特殊拉格朗日方程、从太阳系的稳定性谈起、典型李群及其表示、随机分析与几何、引力的全息性质及其应用等. 数学的应用是极其广泛的, 其他学科不断产生很好的数学问题, 这些对数学的发展都是极其重要的推动力量. 报告内容的选取反映了作者对数学和应用的认识与偏好, 但有一点是共同的, 它们都是主流, 有其深刻性. 希望这些文章能对读者认识现代数学及其应用有益处.

编　者

2019 年 10 月

彩　图



(a)　　　　　　　　　　(b)

图 3　(a) 对于脉冲双星 B1913+16 的 30 年试验观测, 其中红色的点为实验观测值, 蓝色的线为根据广义相对论计算得到的值 [1]. (b) LIGO 位于华盛顿州汉福德站和路易斯安那州文斯顿站接收到的引力波信号 [2]

目　　录

1 K-等价与代数闭链

王金龙

"K- 等价" 是从双有理几何学极小模型的不唯一性所自然引发的一个基本概念. 这个等价关系是如此自然而简单, 使得它与许多不同的几何分支都有密切联系.

这个报告将先简单回顾二十年来一些基于各种积分理论的初步数值结果, 然后谈到我在 ICCM-2001 提出的 K- 等价猜想, 以及近年来关于量子上同调环解析延拓的进展.

最后将谈到最近利用反常层 (perverse sheaves) 的分解定理以及弧线空间 (arc space) 的几何所得到的一些新的几何进展, 包含周–母题 (chow motive) 等价性与代数闭链的存在性问题.

如果没有特别注明, 本文所讨论的几何对象都是定义在复数域 $\mathbf{C}$ 上的复射影簇 (complex projective variety). 本文着重于观念与问题的陈述, 而非完整的定义或定理的讨论. 更细致的技术性内容请参阅所引的文献.

本文原来是以繁体中文书写. 我特别感谢席南华院士、付保华以及数学所的编辑人员将它转换为简体字, 并且提供许多数学专有名词的标准中文用语, 让这篇文章对于使用中文的读者更具有参考价值. 文中 flip(复理), flop(复络) 的翻译来自许晨阳的一个建议, 而 motive(母题) 的翻译则来自徐克舰教授的文章《格罗登迪克的 Motive 与塞尚的母题》(数学文化, 2012, 3(2): 12–32). 词语 abundance(丰度) 的翻译来自化学名词: 元素丰度 (abundance of element).

1.1 双有理几何与极小模型

两个不可约 (irreducible) 的代数簇, 如果共有一个同构的 Zariski 开集, 则称它们为双有理同构 (或等价, birational). 这等同于它们有同构的有理函数域. 双有理几何学的首要任务是在双有理等价类中挑选具有"好的性质"的代表, 进而将之运用在代数几何的分类理论或其他需要代数几何的问题中.

1.1.1 代数曲面的极小模型[4]

双有理映射的构造始于 Castelnuovo 在代数曲面上的经典定理: 令 X 为光滑代数曲面, $C \subset X$ 为一不可约曲线. 则存在一个双有理态射 $\phi: X \to \bar{X}$ 将 (且仅将) 曲线 C 收缩到一个点而得到一个光滑曲面 $\bar{X}$ 的充分必要条件为 C 是一个 (-1) 有理曲线, 即

$$C \cong \mathbf{P}^1 \quad 且 \quad C^2 = -1.$$

有鉴于此, 我们称一个光滑曲面 X 为极小 (minimal) 曲面, 如果 X 不包含任何 (-1) 有理曲线. 由于 Picard 群的秩在 (-1) 曲线收缩之下会降 1, 因此反复运用 Castelnuovo 定理可以构造出 X 的极小模型. 很自然会问, 不同的 (-1) 曲线收缩过程是否会导致相异的极小模型? 对于代数曲面, 完整的答案可以通过 Kodaira 维数给出:

对于一个紧致光滑代数流形 X, 其 Kodaira 维数 $\kappa(X)$ 定义为

$$\kappa(X) = \lim_{m\to\infty} \dim \operatorname{Im}\Big(|mK_X| : X \dashrightarrow \mathbf{P}^{P_m(X)-1}\Big),$$

其中 $K_X = \Omega_X^{\dim X}$ 代表 X 的典范线丛或其对应的除子类 (canonical divisor class), $P_m(X) := h^0(X, mK_X)$. 如果 $P_m(X) = 0$, $\forall m \in \mathbb{N}$, 则定义 $\kappa(X) = -\infty$ (显然, 对于任意除子 D 可以用 $|mD|$ 类似地定义 $\kappa(D) = \kappa(X, D)$).

Enriques 证明了以下的基本定理: 如果曲面 X 具有非负 $\kappa(X)$, 则极小模型具有唯一性. 更进一步地, $\kappa(X) = -\infty$ 的充分必要条件是 X 双有理同构于某一个直纹面 (ruled surface), 即存在一个光滑代数曲线 C 使得

$$X \overset{\sim}{\dashrightarrow} C \times \mathbf{P}^1$$

(事实上 Enriques 证明 $\kappa = -\infty \iff P_{24} = 0$). 对于 $\kappa(X) = 0, 1, 2$ 的情形, X 的极小模型也有进一步的分类.

Kodaira 将 Enriques 分类扩展到所有的紧致 (未必有代数结构的) 复曲面[3], 而 Bombieri-Mumford 将它推广到所有特征 $p > 0$ 的代数曲面[1].

1.1.2 极小模型纲领 MMP[19, 22]

Mori 在 1980 年前后首先发现了 Castelnuovo 定理在 3 维空间的推广. 给定代数簇 X, 他考虑在 1 维代数闭链的数值等价类有限维实向量空间中由曲线所生成的锥 $NE(X) \subset Z_1(X)_{\mathbf{R}}/\equiv$, 即所谓的 Mori 锥 (Mori cone). 关键的新概念是用 $NE(X)$ 的"**端射线**" (extremal ray) 取代 (-1) 曲线, 而一个与曲面情况的本质差异是必须考虑具有奇点的代数簇.

这类奇点最先在 20 世纪 70 年代末期为 Reid 所提出. 很快代数几何学家们就发现必须在对数范畴 (log category) 之下研究这些概念, 才能对高维数的极小模型理论进行系统性的探索. 这时研究的对象为对数偶 (log pair) (X,B), 其中 X 为一个正规 (normal) 代数簇, 而"边界"除子 $B=\sum b_iB_i$ 是 X 上的一个 $\mathbf{Q}$- 除子: $b_i\in\mathbf{Q}$, B_i 为素除子 (prime divisor).

令 $\iota: X_{\mathrm{reg}}\hookrightarrow X$ 为光滑点构成的子流形, 这时 $K_X:=\iota_*K_{X_{\mathrm{reg}}}$ 为 $K_{X_{\mathrm{reg}}}$ 在 X 的闭包. 由于 $K_{X_{\mathrm{reg}}}$ 不一定能拓展成 X 上的线丛, 一般而言 K_X 只是一个 Weil 除子. 对于 Weil 除子 D, 假如存在 $m\in\mathbf{N}$ 使得 mD 是 Cartier (即 $\mathscr{O}_X(mD)$ 为线丛), 则称 D 为 $\mathbf{Q}$-Cartier. 这个观念的重要性在于在代数态射 $\phi: Y\to X$ 之下我们只能拉回 (pull back) $\mathbf{Q}$-Cartier 除子.

如果一个对数偶 (X,B) 满足以下 **"有限体积"** 的条件, 则称它仅有 KLT (Kawamata log-terminal) 奇点:

(i) K_X+B 是 $\mathbf{Q}$-Cartier 并且 $\lfloor B\rfloor=0$.

(ii) 存在一个奇点的对数解消 (log resolution) $\phi:(Y,B')\to(X,B)$ 使得在变量替换公式中

$$K_Y+B'=_{\mathbf{Q}}\phi^*(K_X+B)+\sum a_iE_i.$$

我们有 $a_i>-1$. 其中 $\{E_i\}$ 是所有的 ϕ- 例外除子, $B'=\phi_*^{-1}B$.

记 $E=\sum a_iE_i$ 为 ϕ 的差异除子. 则 ϕ 为对数解消的意思是 Y 为代数流形, $(B'\cup E)_{\mathrm{red}}\subset Y$ 是一个正常交除子 (normal crossing divisor). 根据 Hironaka 的定理, 对数解消总是存在, 并且不难证明 (ii) 对于所有的对数解消也成立.

当边界 $B=0$, 差异除子

$$E=\sum a_iE_i=K_{Y/X}=K_\phi=\operatorname{div}J(\phi),$$

亦称为 ϕ 的 Jacobi 除子. 在一般情形下, 它是对数 Jacobi 除子.

20 世纪 80 年代初, 任意维数的收缩定理在 Mori, Kawamata, Shokurov, Kollár 等的努力之下被发现并证明:

给定 KLT 代数簇对 (X,B). 如果 K_X+B 非数值有效 (numerically effective, NEF), 即其与某曲线相交数为负, 则每一个非 NEF 的端射线

$$R\subset\overline{NE(X)}_{(K+B)<0}$$

都由一个有理曲线 $C\cong\mathbf{P}^1$ 生成, 并且 R 的支撑除子 (supporting divisor) D 定义了一个**端态射**(extremal morphism)

$$\psi_R=|mD|: X\to\bar{X}$$

(对于足够大的 $m \in \mathbf{N}$), 使得 X 里的任何一条曲线 C' 都满足

$$\psi_R(C') = \mathrm{pt} \Longleftrightarrow [C'] \in R.$$

这个定理自然地诱导出极小模型纲领 MMP (minimal model program). 记 $n = \dim X$, $\mathscr{E} \subset X$ 为上述所有 C' 构成的子集, 则 $\bar{X}$ 具有三种可能:

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{E} := \mathrm{Exc}(\psi_R) & \hookrightarrow & X \\ & & \downarrow{\scriptstyle \psi_R} \\ & & \bar{X} \end{array}$$

(1) $\dim \mathscr{E} = n$, 即 ψ_R 为 Mori 纤维簇 (fiber space). MMP 结束.

(2) $\dim \mathscr{E} = n-1$: ψ_R 为除子端射 (divisorial extremal morphism). 这时 $(\bar{X}, \bar{B})$ 仍为 KLT, 其中 $\bar{B} := (\psi_R)_* B$, MMP 可以在 $(\bar{X}, \bar{B})$ 上继续.

(3) $\dim \mathscr{E} < n-1$: ψ_R 为小端射 (small extremal morphism). 这时 $(\bar{X}, \bar{B})$ 的奇点过于复杂; $K_{\bar{X}} + \bar{B}$ 甚至并非 $\mathbf{Q}$-Cartier, 否则

$$0 > (K_X + B) \cdot C = \psi_R^*(K_{\bar{X}} + \bar{B}) \cdot C = (K_{\bar{X}} + \bar{B}) \cdot \psi_R(C) = 0,$$

导致矛盾. 因此 MMP 无法继续!

定义 1.1(极小模型 (minimal model)) 我们称 (X, B) 为极小模型, 倘若 (X, B) 是 KLT, 并且 $K_X + B$ 是 NEF.

1.1.3 几何空间翻转手术: 复理/复络

定义 1.2 (对数复理 (log-flip)、复理以及复络) 给定一个 $K_X + B$ 的小端射 $\psi : X \to \bar{X}$. 则 $(K_X + B)$-**复理** (或对数复理) 代表一个交换图表

$$\begin{array}{ccc} X & \overset{f}{\dashrightarrow} & X^+ \\ & {\scriptstyle \psi}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \psi^+} & \\ & \bar{X} & \end{array}$$

其中 f 在某个余维 $\geqslant 2$ 的 Zariski 闭集之外同构, 并且

$$K_{X^+} + B^+ \text{ 是 } \psi^+\text{- 丰沛的 (ample)},$$

其中 $B^+ = f_* B$ 为除子 B 在 X^+ 的双有理映象 (birational transform).

当边界除子 $B = 0$ 时, 称 f 为**复理**.

若 K_X 是 ψ- 平凡的, 则 K_{X^+} 也会是 ψ^+- 平凡. 此时 f 亦称为 B-**复络**.

对于小端射 ψ_R, 直接用 (X^+, B^+) 取代 (X, B) 后继续执行 MMP. 因此 MMP 化约为 (对数) 复理的存在性与终结性 (termination) 两个问题.

Shokurov 在 1984 年证明 3 维对数复理只能发生有限次. 稍后 Mori 在 1988 年证明 3 维复理的存在性. Mori 的方法基本上是几何的, 并且依赖于他与 Reid 对于 3 维奇点的分类理论. (见 1.1.4 节)

Shokurov[32] 约在同时系统性地发展了对数偶 (log pair) 的理论与对于维数归纳的方法, 包含缩放 MMP(MMP with scaling), 从而证明 3 维对数复理的存在性. 加上 Miyaoka 与 Kawamata 的丰度定理 (abundance theorem), 3 维 MMP 被成功地建立起来了. 3 维 MMP 成功地输出极小模型 ($\kappa \geqslant 0$) 或 Mori 纤维簇 ($\kappa = -\infty$), 但都**没有唯一性**.

一般维数下对数复理的存在性到 2006 年才被 Birkar–Cascini–Hacon–McKernan 所证明[6]. 这用到 Shokurov 的方法以及萧荫堂在 1996 年对 $\Gamma(X, mK_X)$ 在一般型代数簇 "形变不变性" 证明的代数化. 对数复理的终结性目前仍是令人困惑的问题. 但是当 (X, B) 为对数一般型时 (即 $\kappa(K+B) = \dim X$), 他们也证明了所需的特殊终结性而得到极小模型的存在性.

关于极小模型的不唯一性, 奠基于 3 维奇点的分类, Kollár 在 1998 年证明了 3 维双有理极小模型均可透过复络连接[20]. Kawamata 于 2007 年利用上述 BCHM 的结果将这个叙述推广到任意维数[18].

1.1.4 3 维的特殊性

Reid 与 Mori 证明了以下的奇点分类[31]:

3 维终极奇点 (terminal singularity, $B = 0$, $E > 0$) 的局部解析结构均为形如 cDV/μ_r 的孤立奇点. 其中 cDV 代表

$$\{(x, y, z, t) \in \mathbf{C}^4 \mid f(x, y, z) + tg(x, y, z, t) = 0\},$$

而 f 是一个 A-D-E 多项式. r 代表奇点的 Gorenstein 指标, 即最小非零自然数使得 $K^{\otimes r}$ 得以扩张为一线丛. 并且 (f, g, r) 具有完整的分类. 特别注意到它们都是 2 重点.

基于此, Kollár–Mori 于 1992 年进而证明 3 维几何空间手术复理以及复络可以被有效分类, 并且在代数族 (algebraic families) 之下一致地进行[21]. 在更高维数, 终极奇点无法被分类, 这些结果也都是未知的.

我们把 3 维 MMP 的结论摘要如下[20, 21]:

MMP 成功运作, 并输出有理可除化的 ($\mathbf{Q}$-factorial) 终极极小模型或 Mori 纤维簇.