非线性发展方程与孤立子

王明亮 编著

兰州大学出版社

非线性发展方程
与孤立子

王明亮 编著

兰州大学出版社

1990·兰州

内 容 提 要

本书概括介绍了现代应用科学与技术中出现的若干重要的非线性发展方程的解法与解的特性。内容包括：线性发展方程，拟线性双曲型方程与广义解，Burgers方程与Cole—Hopf变换，KdV方程与孤立波的互相作用（碰撞），守恒律与对称，反散射方法及其发展，Bäcklund变换与非线性叠加公式，IST可解的方程作为完全可积的Hamilton组以及Painleve性质与IST的关系。每章附有适量的习题和主要参考文献。

本书可作为高等院校数学类各专业，力学专业（如流体力学），物理学有关专业（如基本粒子、凝聚态物理），大气与气象等专业的高年级大学生和研究生继“数学物理方程（法）”之后的应用偏微分方程教材或参考书，也可供工科院校有关专业的学生及科研、教学工作者参考。

非线性发展方程与孤立子

王明亮　编著

兰州大学出版社出版

（兰州大学校内）

兰石研究所科技印刷厂印刷　　甘肃省新华书店发行

开本：787×1092毫米 1/32　　印张：10.625

1990年5月第1版　　1990年5月第1次印刷

字数：245千字　　印数：1—1100册

ISBN7-311-00305-9/O·48　　定价：2.11元

序

近二十年来，一些新技术问题及相应的理论研究，例如激光、超导、晶格、位错、等离子体物理、凝聚态物理等方面的研究，引出一些非线性发展方程，并要求构造这些方程及其定解问题的解，还要求阐明解的特性，特别是所谓的孤立波孤立子性质。因此，对这些非线性发展方程的研究，便成为应用数学甚至纯粹数学中的一个重要课题。于是有必要在高等学校有关专业为高年级学生及研究生开出课程，并出版相应教材。

王明亮副教授编著的这本教材（其中包含他的一些研究成果），正是为了满足这种需要写出的。他在1983年为兰州大学高年级本科生及有关研究生开出课程，印成讲义，五年来经过多次讲授实践，逐年进行修改补充，整理出这一本比较成熟的教材。

诚然，国内外已出版不少有关上述课题的书籍，但似乎都不宜作为教材使用。王明亮同志的这本书，内容概括，篇幅适中，循序渐近，阐述详细，着重讨论一些典型的方程及方法，确实是有关这个课题的好教材；对于物理学科及工科的有关专业，更是一本便于接受与消化的应用数学书籍。

我希望这本教材的出版，将有助于有关新技术的发展。

陈庆益

1988年6月于兰州

目 录

引　言

本世纪60年代中期以来，非线性波动的研究有了惊人的进展，其主要标志是：1965年美国数学家N. J. Zabusky和M. D. Kruskal[1]，通过高速电子计算机的数值分析，发现了孤立子（Soliton）；此后不久，在1967年，C. S. Gardner, J.M. Greene, M.D. Kruskal和R.M. Miura[2]发现了解KdV方程的反散射方法（inverse scattering method）。由此推动，二十多年来，一些崭新的处理非线性问题的数学方法与技巧发展起来，并得出许多结果，且在流体力学，物理及许多技术部门，如基本粒子（elementary particle），等离子体（plasma），位错（dislocation），晶格（littice），激光（Laser）以及气象学（meteorology）等许多领域，都导致了广泛的应用，引起科学界的极大关注。

什么是孤立子？什么是反散射方法？在回答这些问题之前，先回顾一下非线性波动的发展简史，在此过程中，我们逐步来阐明这些问题。

1.孤立波的发现

1844年，英国科学家、造船工程师John scott Russell，在对英国科学促进协会的题为《论波动》的报告[3],[4]（Report on Waves）中，记述了他1834年曾观察到的一种奇特的水波现象，大意是：他正在观察由两匹马拉着船在离Edinburgh有6英里的一条狭窄的运河中行驶，当船突然停

止前进时，运河中被船推动的水并没有停止，而以汹涌翻腾的状态聚集在船头，然后以巨大的速度滚滚向前，且保持着巨大的、轮廓分明的、光顺孤立的峰状外形，显然它不改变形状和速度，沿运河继续前进。他骑着马跟踪了一至二英里远，在运河的拐弯处，这种孤立行进的水峰终于消失了。J.S. Russell把这种始终保持在水面上，向前平移的孤立水峰，叫做孤立波。在此之前，不曾有人想到能有孤立波，这是他首次发现的奇特而诱人的水波现象。

J.S.Russell认识到孤立波是具关键性质的新现象，新事物，对当时的数学家未能从流体力学运动方程出发预言这种现象提出了意见，他请求当时的数学家至少在事后能给这种现象以理论的证明。尽管J.S.Russell本人为揭示孤立波的本质花费了他毕生大部分精力，进行了很多实验，也猜想过孤立波波形的解析形式，但遗憾的是，由于受当时科学水平的限制，在他的有生之年（1882年死去），无法从理论上对他在1834年观察到的孤立波现象给以圆满的解释。他希望将来的数学家能完成这项有意义的工作。

2.KdV方程

1895年[5]，即孤立波发现60多年以后，为从理论上阐明J.S.Russell的孤立波现象，在瑞典Amsterdam大学数学教授Korteweg的指导下，他的学生de Vries写了一篇博士论文，提出了流体中单向波的传播的数学模型，运动方程是

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\eta^2+\frac{2}{3}\alpha\eta+\frac{1}{3}\sigma\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right)$$

这里η是相对于静止水平面的波峰高度，l是静水深度，g是重力加速度，α，σ是与水的特性（密度，表面张力等）有

关的常数。

Korteweg和de Vries的工作确实提供了分析孤立波的基础。事实上，如果作代换

$$t' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{l\sigma}}t, \quad x' = -\frac{x}{\sigma}, \quad u = \pm\frac{1}{2}\ \eta - \frac{1}{3}\alpha,$$

则经过运算，并去掉变量上的"′"的记号，则得

$$\frac{\partial u}{\partial t} \pm 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

这就是通常所说的Korteweg-de Vries方程，简 称 KdV方程。

用行波方法，加上在无穷远处迅速衰减的条件，可得出KdV方程波形不变的行波解

$$u(x, t) = \frac{c}{2}\,\mathrm{sech}^2\sqrt{\frac{c}{2}}(x - ct)$$

这 里 常数c是波速，$\frac{c}{2}$是振幅，显然振幅与波速有关。当c固定时，波形与速度就是不变的，这就在理论上表 明 了J·S·Russell观察到的孤立波的存在性。

然而Korteweg和de Vries的工作并没有引起人们的足够重视。这是因为，许多人认为这种行波不过是偏微分方程的特殊解，用特别的初值可得到它，在初值问题的讨论中是微不足道的；再者，KdV方程是非线性的，一般人 认 为 两个孤立波起始投入碰撞过程，由于非线性的互相作用，波形一定受到破坏，故是不稳定的，对描述物理现象不会有什么帮助。在这种观点的束缚下，KdV方程和孤立波长 期 受 到

埋没，似乎再无人理采了。

到1960年，即KdV方程与孤立波默默地又渡过了65年之后，Gardner和Morikawa[6]在无碰撞磁流波（Collision free hydromagnetic waves）的研究中，又重新发现了KdV方程。从此以后，KdV方程才有了出头之日，一次又一次地出现在不同的物理背景中，作为各种各样的物理现象的模型方程，KdV方程成为最基本的数学物理方程之一。

3.FPU问题

在孤立波的发展中，值得提出的一个重要的问题是A·Fermi，J. Pasta，S·Ulam[7]在计算机上进行的一维非谐晶格的实验研究，初看起来，这个问题似乎与KdV方程，孤立波没有什么关系，实际上这个问题的研究，在揭示孤立波的奇特性质，导致孤立波的广泛应用以及开拓非线性行为研究的新天地，起着非常重要的作用。

设$n-1$个完全相同质量的质点组成的动力系统，两相邻质点之间由长度为h的非线性弹簧连接起来，两端点固定在边界上。当弹簧压缩或伸长Δ长度时，产生的力$F=k(\Delta+\alpha\Delta^2)$，其中$k$是弹性系数，$\alpha>0$，表示非线性的强弱程度。描述非谐晶格的运动方程是

$$my_{itt}=k(y_{i-1}-2y_i+y_{i+1})[1+\alpha(y_{i+1}-y_{i-1})]$$

$$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1;\qquad y_0=y_n=0$$

其中y_i表示第i个质点离开其平衡位置的位移，m表示各质点的质量。

在实验中，他们取了64个点，初始时刻能量集中在某几个上，其余的能量为零。根据经典理论，他们预料：随时间

的增加，能量将会均匀分布。但实际计算的结果与他们预料的相反：经过很长时间后，能量的分布几乎又回到了初始分布的状态；再计算下去，过程近似于重复。这使他们及听到这个实验结果的人们大吃一惊。这个实验结果实际上是对当时物理学家基本思想的一种挑战，这就是所谓的FPU问题。

为了能从理论上正确解释FPU问题，N·J·Zabusky和M·D·Kruskal[8]-[10]，从连续体的观点研究了FPU问题，设一维连续体在点x处t时刻位移为$y(x, t)$，$y(ih, t) = y_i$，把y_{i+1}，y_{i-1}进行Taylor展开，令$kh^2/m = c^2$，$2ah = \varepsilon$，$h^2/12\varepsilon = \delta^2$，忽略掉$\varepsilon^2$以上的项，则运动方程变为

$$y_{tt} - c^2 y_{xx} = \varepsilon c^2 y_x y_{xx} + \varepsilon c^2 \delta^2 y_{xxxx},$$

设这方程有如下形式的解

$$y(x, t) = f(\xi, T) + \varepsilon y^{(1)}(x, t) + \cdots\cdots$$

其中$\xi = x - ct$，$T = \varepsilon t$，则$y^{(1)}$满足方程，

$$y^{(1)}_{tt} - c^2 y^{(1)}_{xx} = 2cf_{\xi T} + c^2 f_\xi f_{\xi\xi} + c^2\delta^2 f_{\xi\xi\xi\xi}$$

显然其解$y^{(1)}$随t的增加而无限增长，除非$y^{(1)}$的方程之右端为零。令$6u = f_\xi$，$\tau = \frac{1}{2}cT$，便得KdV方程

$$U_\tau + 6uu_\xi + \delta^2 u_{\xi\xi\xi} = 0,$$

从前边所述，它有孤立波解。从而表明了在流体力学以外的物理领域也出现了孤立波；同时也将圆满地解释FPU问题。

4.孤立子

1962年，Perring和Skyrme[11]把Sine-Gordon方程的孤立波解作为物质基本粒子的一个模型，用计算机实验来研究这种模型的基本粒子在碰撞（Collision）时如何散射。计

算结果表明；孤立波并不散射，在碰撞后与碰撞前有同样的波形与速度。

1965年，N.J.Zabusky 和 M.D.Kruskal[1]把KdV 方程用于等离子体波的研究，借助电子计算机详细考察了等离子体中孤立波的互相碰撞过程，计算机再次表明：两个孤立波碰撞后仍以它们碰撞前的同一形状和速度离开。孤立波的这种经碰撞不改变波形和速度的非常稳定的奇特性质，正象物理上的粒子一样。所以Zabusky和Kruskal就用孤立子（Soliton）这个词来生动地表示孤立波的粒子行为。从此，孤立子作为应用科学中的新概念而诞生了，并第一次出现在文献上。从此以后，曾长期被埋没的孤立波才放出它奇妙而夺目的光彩。

孤立子一词常在广泛的范围内被引用，但无一般形式的定义，因为它还在发展中，给它下严格的定义比较困难，且为时尚早。为说明孤立子是什么意思，通常在应用数学中，将孤立子理解为非线性演化方程局部化的行波解，经过互相碰撞后，不改变波形和速度，或许相位发生变化。但这种理解仍不适合粒子物理这样的领域。在物理领域，孤立子被理解为：经互相作用后，波形与速度只有微弱改变的孤立波；或者被理解为：非线性演化方程能量有限的解，即能量集中在空间有限区域，而不随时间的增加而扩散到无限区域中去。

并非所有的孤立波都是孤立子。由上所述孤立子与孤立波是有区别的。但也有人把二者混为一谈。

虽然孤立子原源于KdV方程的孤立波，随着研究的深入发展，人们很快发现，除KdV方程外，许多具有物理意

义的重要的非线性演化方程都具有孤立子解。如Sine-Gordon方程

$$u_{xt}=\sin u$$

有扭状（kink）孤立子解；非线性Schrödinger方程

$$iu_t+u_{xx}+r|u|^2u=0$$

有包络（envelop）孤立子解；其他如Boussinesq方程，Hirota方程，Benjamin-Ono方程都有形式不同的孤立子解。孤立子是各种各样的，除上边说过的脉冲状或钟状（如KdV方程的孤立子解）的孤立子，扭状孤立子，包络孤立子外，还有正孤立子，反孤立子（anti-soliton），呼吸子（breather），boomerons，tranppons以及它们的叠加形成的形形色色的孤立子。孤立子的重要特性的表现在于粒子性质，不在于其形状。

许多物理上的重要的非线性系统具有孤立子解这种事实，必定反映出了相当普遍的非线性现象的一种特性。因此研究孤立子及其互相作用，不仅有助于弄清物质在非线性作用下的运动规律，直接推动物理学相关分支的发展，而且在数学上，也推动了难以求解的非线性发展方程的求解方法与技巧的发展。如反散射方法的发现，就是由此推动而获得的突出成就之一。

5.反散射方法

1950—1951年，Cole[12]与Hopf[13]各自独立，几乎同时通过函数变换（称为Cole-Hopf变换）

$$u=-2\nu\frac{\varphi_x}{\varphi}$$

将空气动力学研究中出现的Burgers方程

$$u_t + uu_x - \nu u_{xx} = 0$$

化成了线性热传导方程$\varphi_t - \nu\varphi_{xx} = 0$。从而求出了Burgers方程的准确解。由于KdV方程和Burgers方程非常类似（差别在于KdV方程含有三阶导数，而Burgers方程含有二阶导数），很多数学家试图寻找类似于Cole-Hopf变换的函数变换，将KdV方程“线性化”，从而达到求解KdV方程的目的。然而遗憾的是寻找函数变换的尝试失败了。

1967年，GGKM[2]（Gardner，Greene，Kruskal Miura）将如下的变换（Cole-Hopf变换的推广）

$$u = \frac{\psi_{xx}}{\psi} + \lambda$$

（其中λ是待定常数）改写成

$$\psi_{xx} - (u - \lambda)\psi = 0,$$

如果将$u = u(x, t)$中的t视为参数，这方程正是量子力学中的一维Schrödinger方程，ψ相当于波函数，u相当于位势，λ相当于能级或特征值。一般说来，由于u中含有参数t，λ也将会含有参数t。但GGKM却发现了一个重要的事实：当$u(x, t)$按KdV方程变化时，即$u(x, t)$是KdV方程的解，且$u(x, t) \to 0$（$|x| \to \infty$）时，则特征值λ与t无关。根据这个事实，位势$u(x, t)$与其初值$u(x, o)$将对应于相同的特征值。这样一来，他们利用量子力学中的Schrödinger方程的特征值问题（正散射问题）与其反问题（反散射问题）关系，导出了KdV方程初值问题解依赖于线性积分方程（Gel′fand—Levitan积分方程），并得到了许多结果，其中包括任意数目孤立波互相作用的显式解。

后来人们把GGKM解KdV方程初值问题的上述方法称

为反散射方法或反散射变换(IST)，这种方法非常象解线性问题的Fourier变换方法，有人也称之为非线性Fourier变换。

对GGKM解KdV方程的IST方法，曾有人认为这种方法取决于KdV方程与Schrödinger方程之间的巧妙关系，是一种侥幸，不见得具一般性。但P.D.Lax[14]不认为是这样，在1968年，他将GGKM的上述思想加以推广、提高，系统地阐述了这种方法，为解决更多的非线性演化方程开辟了道路。他考虑一般的非线性发展方程

$$u_t = K(u,\ u_x,\ u_{xx}\cdots\cdots),$$

得出一类所谓高阶KdV方程，可用IST方法求解。

1972年Zakharov和Shabat[15]发现了一个特征值问题，利用该特征值问题，解决了立方非线性Schrödinger方程

$$iu_t + u_{xx} + 2|u|^2 u = 0$$

的初值问题。同时Wadati[16]本质上用同样的特征值问题解决了mKdV方程

$$u_t + 6u^2 u_x + u_{xxx} = 0$$

的问题。此后其他几个有物理意义的偏微分方程及差分方程也相继得到解决。

IST方法的主要困难在于：对给定的非线性发展方程，找适当的特征值问题。事实上尚没有系统的先验手段判定是否已给的非线性发展方程可用IST方法求解；也没有产生这种特征值问题的系统方法。

1973—1974年，AKNS[17]（M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A.C.Newell, H·Segur）等人的工作，在相反的方向上有了发展。他们发展了一种方法，利用给定的特征值问

题，发现一大类非线性发展方程（包括KdV，Sine-Gordon，非线性Schrödinger等）可用IST方法求解。

与此同时，一些古老的数学方法，如Bäcklund变换[18]，获得新生并发展，其他一些新的数学方法，如Wahlquist和Estabrook[19]的延拓结构方法（prolongation structure），Hirota的双线性形方法[20]，等都相继应运而生。

80年代以后，总的趋势是朝着高维空间的问题（如高维空间的反散射方法，高维孤立子）发展，由于统一观点的需要，直接推动着代数几何较轴象的数学领域中问题的研究。

6.本书的内容与目的

描述不定常运动的非线性发展方程大体有三种主要的类型。第一种是以拟线性双曲型方程

$$u_t + uu_x = 0$$

为代表，其特点是：即使初值条件很光滑，也可能导致在有限时间内解的间断，在物理或力学中表现为冲击波现象；第二种是以Burgers方程

$$u_t + uu_x - \nu u_{xx} = 0$$

为代表，其特点是有光滑解，在物理或力学中，表现具粘性的耗散过程或紊流现象；第三种是以KdV方程

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

为代表，其特点具有孤立子解，可用IST方法求解，有无穷多个守恒律，其不同的解之间存在Bäcklund变换等。其数学结构与内容非常丰富。作为非线性发展方程与孤立子引论性质的书，其内容包括了上述三种类型的非线性发展方程的讨论，由于第三种类型的方程的数学结构与内容非常丰富，自然就成为本书讨论的重点，我们着重介绍该类方程几个最