

# 有限元法与 MATLAB 程序设计

郭吉坦 薛齐文 编著

◆ 提供百度云盘和二维码文件下载：

功能函数源程序

案例模型数据

计算结果文件

变形与应力云图

◆ 系统阐述有限元分析的基本步骤

◆ 详细介绍不同类型单元的建模方法与工程应用

# 有限元法与 MATLAB 程序设计

郭吉坦 薛齐文 编著



机械工业出版社

本书以有限元法分析流程为主线, 阐述有限元基本原理; 以 MATLAB 为编程平台, 阐述有限元程序设计的思路与实现。

本书共分 10 章, 包括绪论、弹性力学基础、平面三角形单元、平面四边形单元与收敛准则、轴对称问题、空间问题、杆系结构、平板弯曲问题、有限元分析中的几个特殊问题、材料非线性问题, 着重介绍典型单元的位移函数构造、刚度矩阵、等效节点载荷等有限元关键步骤的表达格式及应用。详细讲述平面三角形单元、四节点等参单元、轴对称三角形单元、桁架结构等四类 MATLAB 程序功能、程序流程图, 提供功能函数源程序、案例模型数据、计算结果文件、变形与应力云图的百度网盘和二维码下载。

本书可作为高等院校力学、机械、土木、交通工程等相关专业高年级本科生和研究生的教材, 也可用于相关专业教师、科研及工程技术人员进行有限元分析和程序设计的参考书。

## 图书在版编目 (CIP) 数据

有限元法与 MATLAB 程序设计/郭吉坦, 薛齐文编著. —北京: 机械工业出版社, 2019. 10

ISBN 978-7-111-63963-3

I. ①有… II. ①郭… ②薛… III. ①有限元法—计算机辅助计算—Matlab 软件 IV. ①O241.82—39

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2019) 第 224673 号

机械工业出版社 (北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

策划编辑: 孔 劲 责任编辑: 孔 劲 陈崇昱

责任校对: 王 欣 封面设计: 马精明

责任印制: 孙 炜

天津翔运印刷有限公司印刷

2020 年 1 月第 1 版第 1 次印刷

184mm × 260mm · 17.75 印张 · 438 千字

0 001—2 500 册

标准书号: ISBN 978-7-111-63963-3

定价: 69.00 元

电话服务

客服电话: 010-88361066

010-88379833

010-68326294

封底无防伪标均为盗版

网络服务

机 工 官 网: [www.cmpbook.com](http://www.cmpbook.com)

机 工 官 博: [weibo.com/cmp1952](http://weibo.com/cmp1952)

金 书 网: [www.golden-book.com](http://www.golden-book.com)

机工教育服务网: [www.cmpedu.com](http://www.cmpedu.com)

# 前言

## Preface

有限元法在固体力学和结构分析领域取得了巨大成就，成功地解决了许许多多工程中有重大意义的问题。由于有限元法具有通用性和有效性，伴随着计算机技术的飞速发展，现已成为计算机辅助工程和数值仿真的基础，是当今技术科学发展和工程分析中应用最广泛的数值方法。

有限元法被普遍列为工科研究生的学位课程，被力学、土木工程、机械工程等本科专业列为必修课程，同时也是相关工程技术人员继续教育的重要内容之一。我们在长期从事研究生和本科生有限元法课程教学工作的过程中，总结多年教学和科研实践的经验，结合研究生课程及应用需要而编写的《有限元法》讲义已经使用多届，教学效果良好。本书在此基础上进行适当扩充，以有限元法基本内容为主线，同时融入典型单元程序设计，注重理论与实践相结合。本书内容的选取主要基于以下两个方面的考虑：

其一，修读有限元课程的研究生的专业跨度大，学科基础不尽相同，故编写时力求概念浅显、思路简明，内容安排上由浅入深，系统阐述有限元分析的基本步骤，为选择正确的单元类型建立合适的有限元模型奠定理论基础。以平面三角形单元为重点，详细阐述基本步骤、建模方法、工程应用，使学生了解有限元法的基本主线；详细介绍平面四节点等参单元，引出有限元法的收敛性、位移函数构造原则以及坐标变换等有限元相关理论；其他类型问题，则侧重于阐述单元功能、过程差异及应用中的注意事项。

其二，编入了以 MATLAB 为平台，经调试的平面三角形单元、四节点等参单元、轴对称三角形单元、桁架结构等典型单元的完整程序，通过程序功能设定和流程图来阐述编程思想及程序设计的技巧。利用 MATLAB 具有的科学计算和符号运算功能，编写的矩形薄板单元刚度矩阵程序段、等效节点载荷程序段、雅可比矩阵程序段，对数学推演编程克服繁杂的公式推导有一定的借鉴作用。本书并非以读者学会编写有限元分析程序为目标，而是为了使读者了解一些编程知识，以加深其对有限元内容的理解，培养科学严谨的态度，提高解决工程问题的能力。

本书包括 10 章内容：第 1 章介绍有限元法的基本思想、主要步骤及单元类型；第 2 章介绍弹性力学基本方程、平面问题，以及最小势能原理和里茨法应用；第 3 章以平面三角形单元为例，将有限元法的每个基本步骤作为一节，详细阐述了有限元分析方法，详细介绍平面三角形的有限元程序设计思路和方法；第 4 章介绍矩形单元、四节点等参单元及高阶单元，介绍有限元法的收敛准则、高斯积分等内容，介绍四节点等参单元的有限元程序、高斯

积分及坐标变换等符号运算程序；第5章介绍轴对称问题的三角形单元和等参单元，轴对称三角形单元的有限元程序；第6章介绍空间问题的四面体单元、六面体等参单元等单元；第7章详细介绍杆系结构在局部系下的单元特性、整体系下单元分析，阐述特殊边界条件处理及杆件内力计算，桁架结构有限元程序；第8章介绍平板基本理论、矩形与三角形薄板单元；第9章介绍子结构方法、对称结构与周期结构边界条件处理方法等几种实际问题；第10章介绍非线性代数方程组的解法，弹塑性材料本构关系、弹塑性问题有限元分析方法。

本书详细阐述了平面三角形单元、四节点等参单元、轴对称三角形单元、桁架结构等四类单元的 MATLAB 程序功能设定、设计思路与流程、重点语句解析、有限元模型数据等相关内容，介绍了高斯积分、雅可比矩阵、平板弯曲刚度矩阵及等效节点载荷等字符推演功能程序。由于篇幅所限，本书未列出所有程序源代码。为了方便读者，可通过百度网盘和二维码下载相应的功能函数源程序、案例模型数据、计算结果文件、变形与应力云图。下载的程序文件为文本格式（.txt），可直接转换为 MATLAB 程序代码。

链接地址：[https://pan.baidu.com/s/1uwu\\_toyshC9PMzpQ2ZbcNA](https://pan.baidu.com/s/1uwu_toyshC9PMzpQ2ZbcNA) 提取码：p49e，也可通过扫描下面二维码下载相关文件。

虽然我们花费了很大精力用心编写本书，但由于水平所限，缺点、错误还是在所难免，尤其是在程序设计思路及 MATLAB 函数方面可能会有更好的选择，欢迎读者多提批评意见和宝贵建议。读者可通过邮箱 [dljtdx\\_gjg@126.com](mailto:dljtdx_gjg@126.com) 进行联系，交流应用有限元法的新技术与心得，共同进步。

本书的出版得到了辽宁省研究生教育教学改革研究项目（2017）以及大连交通大学研究生教育质量提升工程项目（2017）资助。

编者



# 目录 Contents

## 前言

## 第1章 绪论

Chapter

1.1 概述	1
1.2 有限元法的基本思想	2
1.3 有限元法的特点	3
1.4 有限元法的主要步骤	4
习题1	8

## 第2章 弹性力学基础

Chapter

2.1 概述	9
2.1.1 弹性力学的基本假设	9
2.1.2 几个基本概念	10
2.2 弹性力学基本方程	13
2.2.1 平衡方程	13
2.2.2 物理方程	13
2.2.3 几何方程	14
2.2.4 变形协调方程	15
2.2.5 边界条件	15
2.3 弹性力学平面问题	16
2.3.1 平面应力问题	16
2.3.2 平面应变问题	17
2.3.3 平面问题的平衡方程与几何方程	18
2.3.4 平面问题的物理方程	19
2.3.5 平面问题的协调方程	20
2.3.6 边界条件	21
2.4 能量原理	21
2.4.1 弹性体的应变能	22
2.4.2 位移变分原理与最小势能原理	23
2.4.3 瑞利-里茨法	26
习题2	28

## 第3章 平面三角形单元

Chapter

3.1 建立有限元模型 .....	30
3.1.1 划分有限元模型网格应注意的问题 .....	30
3.1.2 有限元模型数据 .....	31
3.2 位移模式 .....	34
3.2.1 位移模式 .....	34
3.2.2 面积坐标与形函数 .....	36
3.3 单元刚度矩阵 .....	38
3.3.1 单元上任意一点的应变 .....	38
3.3.2 单元上任意一点的应力 .....	39
3.3.3 单元的应变能及单元刚度矩阵 .....	40
3.4 等效节点载荷 .....	41
3.4.1 外力势能 .....	41
3.4.2 体力的等效节点载荷 .....	42
3.4.3 面力的等效节点载荷 .....	43
3.5 整体分析 .....	46
3.5.1 结构的总势能 .....	47
3.5.2 结构的总刚度矩阵 .....	47
3.5.3 结构总的载荷矢量与载荷工况 .....	49
3.6 有限元方程及其求解方法 .....	50
3.6.1 有限元方程 .....	50
3.6.2 置大数法或乘大数法 .....	51
3.6.3 置“1”法 .....	52
3.6.4 降阶法 .....	52
3.7 单元应力的计算及处理 .....	53
3.7.1 单元应力的计算 .....	53
3.7.2 内部点应力的处理 .....	54
3.7.3 边界上应力的处理 .....	55
3.8 平面三角形单元有限的 MATLAB 程序 .....	55
3.8.1 程序总体功能设定及主程序函数 .....	55
3.8.2 文件管理函数 .....	57
3.8.3 有限元模型数据输入函数 .....	58
3.8.4 显示有限元模型函数 .....	62
3.8.5 计算结构总刚度矩阵函数 .....	62
3.8.6 结构总载荷矢量函数 .....	64
3.8.7 求解有限元方程函数 .....	65
3.8.8 计算应力的功能函数 .....	66
3.8.9 平面三角形单元后处理函数 .....	68

3.9 应用算例 .....	68
3.9.1 手算案例 .....	68
3.9.2 程序应用算例 .....	73
习题 3 .....	76

## 第 4 章 平面四边形单元与收敛准则

Chapter

4.1 矩形单元 .....	79
4.1.1 位移模式 .....	79
4.1.2 单元刚度矩阵与等效节点载荷 .....	80
4.1.3 整体坐标系下的单元分析 .....	82
4.2 有限元解答的收敛性准则 .....	84
4.2.1 产生误差的原因 .....	84
4.2.2 收敛准则 .....	84
4.2.3 位移法有限元解的下限性 .....	86
4.2.4 位移模式多项式的选择 .....	86
4.3 高斯积分 .....	90
4.3.1 一维高斯积分 .....	90
4.3.2 二维和三维高斯积分 .....	93
4.3.3 高斯积分的程序函数 .....	94
4.4 平面四节点等参单元 .....	95
4.4.1 坐标变换 .....	95
4.4.2 位移模式 .....	97
4.4.3 应变矩阵与雅可比矩阵 .....	98
4.4.4 等参变换的条件 .....	100
4.4.5 单元刚度矩阵 .....	102
4.4.6 等效节点载荷 .....	104
4.4.7 等参单元应力的计算 .....	106
4.5 平面四节点等参单元的 MATLAB 程序 .....	107
4.5.1 平面四节点等参单元程序的主功能函数 .....	107
4.5.2 计算结构总刚度矩阵程序 .....	108
4.5.3 计算结构总载荷矢量函数 .....	109
4.5.4 计算等参单元应力函数 .....	111
4.5.5 平面四节点等参单元程序的应用 .....	112
* 4.6 高阶单元简介 .....	114
4.6.1 三角形单元族 .....	114
4.6.2 拉格朗日族四边形单元 .....	115
4.6.3 巧凑边点族四边形单元 .....	116
4.6.4 Wilson 非协调元 .....	117

4.7 单元类型及单元尺寸对计算精度的影响	119
4.7.1 工程案例的数值结果比较	119
4.7.2 单元位移模式与计算精度再讨论	121
习题4	123

## 第5章 轴对称问题

Chapter

5.1 轴对称问题概述	126
5.1.1 基本变量	127
5.1.2 基本方程	128
5.2 轴对称问题的三角形单元	128
5.2.1 位移模式	129
5.2.2 单元刚度矩阵	130
5.2.3 等效节点载荷的计算	133
*5.3 轴对称问题的等参单元	136
5.3.1 几何模式与位移模式	136
5.3.2 单元刚度矩阵	137
5.3.3 等效节点载荷的计算	138
5.4 轴对称三角形单元的 MATLAB 程序	139
5.4.1 程序功能与主函数程序	139
5.4.2 轴对称三角形单元的模型数据格式	140
5.4.3 总刚度矩阵函数	141
5.4.4 节点载荷矢量函数	141
5.4.5 求解有限元方程函数	143
5.4.6 计算单元应力函数	143
5.5 工程案例	143
5.5.1 轴对称压力容器	143
5.5.2 圆形垂直载荷作用下的弹性半空间	144
习题5	146

## 第6章 空间问题

Chapter

6.1 空间问题概述	149
6.2 四面体单元	150
6.2.1 单元位移函数	150
6.2.2 单元应变矩阵和单元刚度矩阵	152
6.2.3 等效节点载荷	154
6.3 六面体等参单元	154
6.3.1 坐标变换	155
6.3.2 位移模式	156

6.3.3 单元应变矩阵和单元刚度矩阵	156
6.3.4 等效节点载荷	157
习题6	159

## 第7章 杆系结构

### Chapter

7.1 杆件结构的基本知识	161
7.1.1 基本量的描述	161
7.1.2 杆系结构总势能的一般表达	163
7.2 局部坐标系下的杆件单元分析	164
7.2.1 拉压杆单元	164
7.2.2 扭转杆单元	166
7.2.3 只计弯曲的平面梁单元	167
7.2.4 平面一般梁单元	170
7.2.5 空间梁单元	172
7.3 杆系结构的整体分析	174
7.3.1 单位矢量间的转换关系	174
7.3.2 不同坐标系下各物理量的关系	175
7.4 特殊边界条件处理	178
7.4.1 弹性支承点	179
7.4.2 斜支承边界	179
7.4.3 主从节点关系	180
7.5 支座反力与单元内力	182
7.5.1 支座反力	182
7.5.2 单元杆端内力	182
7.5.3 单元内任意截面的内力	183
7.6 桁架结构的 MATLAB 程序	184
7.6.1 程序功能与主程序函数	184
7.6.2 桁架结构模型数据输入程序函数	185
7.6.3 刚度矩阵函数	186
7.6.4 总等效节点载荷函数	188
7.6.5 求解桁架结构有限元方程函数	188
7.6.6 桁架杆件内力计算	188
7.6.7 后处理功能函数	190
7.7 杆系结构应用举例	193
7.7.1 平面桁架结构	193
7.7.2 具有斜支承和杆上集中力的平面桁架结构	196
*7.7.3 带有侧向弹性支座及滑道型斜支承的空间桁架结构	198
7.7.4 简单刚架分析	199

*7.7.5 复杂载荷作用的刚架结构 .....	205
习题7 .....	207

## 第8章 平板弯曲问题

### Chapter

8.1 薄板弯曲问题的基本理论 .....	210
8.1.1 薄板的变形与几何方程 .....	211
8.1.2 薄板的内力与物理方程 .....	213
8.1.3 薄板的平衡方程 .....	214
8.1.4 板的边界条件 .....	215
8.2 矩形薄板单元 .....	216
8.2.1 矩形薄板单元的位移 .....	216
8.2.2 单元刚度矩阵 .....	219
8.2.3 等效节点载荷 .....	220
8.2.4 矩形板单元的应用 .....	221
8.3 三角形薄板单元 .....	222
8.3.1 三角形薄板单元位移模式 .....	222
8.3.2 单元刚度矩阵 .....	225
8.3.3 等效节点载荷 .....	226
8.3.4 三角形薄板单元的应用 .....	226
习题8 .....	227

## 第9章 有限元分析中的几个特殊问题

### Chapter

9.1 子结构法 .....	229
9.2 结构对称性和周期性的利用 .....	234
9.2.1 具有对称面的结构 .....	234
9.2.2 旋转周期结构 .....	238
9.3 不同单元的组合 .....	240
9.3.1 梁单元与板单元结合 .....	240
9.3.2 梁单元与平面单元的连接 .....	243
习题9 .....	244

## 第10章 材料非线性问题

### Chapter

10.1 材料非线性问题概述 .....	246
10.2 非线性代数方程组的解法 .....	248
10.2.1 直接迭代法 .....	248
10.2.2 Newton-Raphson法(简称N-R法) .....	249
10.2.3 增量法 .....	251

10.3 材料弹塑性本构关系 .....	252
10.3.1 材料弹塑性行为的描述 .....	252
10.3.2 复杂应力状态的塑性屈服准则 .....	255
10.3.3 增量理论 .....	257
10.3.4 全量理论 .....	261
10.4 弹塑性问题有限元法 .....	264
10.4.1 增量变刚度法 .....	264
10.4.2 增量初应力法 .....	267
10.4.3 增量初应变法 .....	269
10.4.4 几种方法的比较 .....	270
习题 10 .....	271

## 参考文献

Chapter

### 1.1 概述

在工程结构的设计过程中，分析结构应力和形变是不可或缺的关键环节。结构分析的实质就是分析结构在工作状态下，由外力载荷作用或者温度改变等因素引起的，在结构材料内部所产生的应力水平与分布状态、各点的位移以及结构形变。只有了解结构在工作过程中的应力与变形状态，才能对结构进行合理评价，判断结构是否安全，提出有针对性的改进建议或方案。

工程结构材料一般被视为弹性体，进行结构应力分析时往往可以归结为求解弹性力学问题。求解弹性力学问题的方法可分为解析法与数值法两大类。解析法是在一定假设的基础上，通过数学推导用具体的表达式来获得问题解答的方法，如逆法、半逆法、复变函数法、级数法、特殊函数法等方法都属于解析法。实际工程结构，往往会受到几何形状复杂、工作荷载多样性及材料特性等多种因素的影响，除了少数非常简单的问题外，绝大多数并不能得到解析形式的数学解答，采用解析法解决工程问题是非常困难的。

为了求解这些复杂问题，唯一的途径是应用数值法，获得问题的近似解。这种近似的数值结果能够满足工程设计精度要求，对结构评价、改进及优化设计具有不可替代的作用，如有限差分法、有限元法、边界元法等都属于数值求解方法。20 世纪中期，随着计算机技术的发展，数值计算方法得到飞跃式发展，结构设计对数值分析方法的依赖更强。其中有限元法具有数学逻辑严谨、物理概念清晰、使用方便灵活、适应性强等特点，已成为当今最有效的一种求解各类工程问题的数值分析方法，被不同领域广泛应用。

现代有限元的起源可追溯到 20 世纪初，一些研究人员用离散的等价弹性杆来近似模拟连续的弹性体。人们公认柯兰特 (Courant) 是有限元法的奠基人，1943 年，柯兰特发表了一篇使用三角形区域的多项式函数来求解扭转问题的论文，第一次假设挠曲函数在一个划分的三角形单元集合体的每个单元上为简单的线性函数，这是第一次用有限元法处理连续体问题。1955 年，德国斯图加特大学的 J. H. Argyris 教授发表了一组能量原理与矩阵分析的论

文，奠定了有限元法的理论基础。

20世纪50年代，由于航空事业的飞速发展，对飞机结构提出了愈来愈高的要求，这就需要更精确的设计和计算。1956年，特纳（Turner）、克拉夫（Clough）等将刚架分析中的位移法扩展到弹性力学平面问题，并用于飞机的结构分析和设计，系统研究了离散杆、梁、三角形的单元刚度表达式，并求得了平面应力问题的正确解答。他们的研究工作开创了利用电子计算机求解复杂弹性力学问题的新纪元。1960年，克拉夫（Clough）第一次提出并使用“有限元法”（Finite Element Method, FEM）的名称。

有限元法在解决工程中应用问题时所取得的巨大成功，引起了数学界的高度关注。贝塞林（Besseling）和卞学镛（T. H. Pian）等人的研究工作表明，有限元法实际上是弹性力学变分原理中瑞利-里茨法的一种形式，从而在理论上为有限元法奠定了数学基础。与变分原理相比，有限元法更为灵活，适应性更强，计算精度更高。先后出现了一系列基于变分原理的新型有限元模型，如有限条法、杂交法、混合元、非协调元、广义协调元等。1967年，监科维奇（Zienkiewicz）出版了第一本关于有限元分析的专著。

20世纪70年代之后，随着计算机技术和软件技术的发展，有限元法进入了飞跃发展期。在这一时期，人们对有限元法进行了深入研究，涉及内容包括数学和力学领域的基础理论，单元划分的原则，形函数的选取，数值计算方法及误差分析、收敛性和稳定性研究，计算机软件开发，非线性问题，大变形问题等。在有限元法的发展过程中，我国科学家冯康等人做出过杰出贡献，得到了国际学术界的认可。

目前，有限元法已成为一门成熟的学科，并已扩展到其他研究领域，成为科技工作者解决实际问题的有力工具。有限元法在应用上已远远超出了原来的范围，由静力平衡问题扩展到稳定问题、动力问题、波动问题、接触问题。研究的对象从弹性材料扩展到弹塑性、黏弹性、黏塑性复合材料，从均质到非均质、非线性材料。有限元的离散方法由结构分析扩展到热传递、流体流动及多孔材料渗流、电位或磁位分布等非结构问题。近些年，有限元法在生物力学工程领域也有应用，如人体骨骼、股关节、颌移植、树胶牙齿移植、心脏和眼睛的分析等。

## 1.2 有限元法的基本思想

工程结构分析可以归结为求解弹性力学问题。弹性力学就是研究弹性体或结构由于外部载荷作用或者温度改变等因素所引起的形变、应力和位移。通过力学的平衡条件、变形几何协调性等方法，在外力与应力、形变、位移等各个物理量之间建立基本方程。假设对结构输入某种形式的已知量或者说某个量发生改变之后（通常是外力），再根据弹性力学的基本方程，寻求采用适当的方法求解这些基本方程，以便得到所需要的相关未知量。

弹性力学研究的外力、应力、应变、位移这四个基本量，通过三组基本方程，即应力与外力关系的平衡方程、应力与应变关系的物理方程、应变与位移的几何方程联系起来，它们之间的关系如图1.1所示。

应力、应变、位移属于弹性体内部的物理量，严格遵循弹性力学基本方程。一般弹性力

学方法是根据弹性力学基本方程，对整个弹性体或结构来分析的。假设应力场能够确定，先根据物理方程求应变，再根据几何方程求位移，几何方程是偏微分方程组，由应变计算位移需要积分，求解起来非常困难，有时是不可能的。

如果弹性体内部的位移场能够确定，那么根据几何方程由位移求导计算应变；物理方程是代数方程，则容易由应变确定应力。但问题是计算的应力分量很难满足平衡方程，要得到正确解答同样也非常困难。

有限元法放弃了应力与外力之间的平衡方程。根据能量原理，直接在外力与位移场之间建立联系，也就是反映外力改变与弹性体内部位移场变化的关系，依次求解位移、应变、应力，其过程如图 1.2 所示。现在关键的问题就是对于复杂形体的弹性体或结构中的位移场该如何表达？

有限元的基本思想是，在弹性体内选取足够多、有限数量的具有代表性的点，假定这些点的位移已知，再用这些假定的位移量描述其他位置点的位移，就得到了用特定点位移表示的弹性体的位移场，这些选定的有代表性的点称为节点。为了较准确反映原结构特征，通常，尖点、拐角、截面改变处、位移约束位置、集中载荷作用点等特殊、具有代表性的点都应选为节点。

所谓节点数量足够多，就是要保证所得到的数值结果满足精度要求；节点数量有限，就是将连续体中无穷多点的无限自由度转变为有限数量的自由度，以便能够用计算机进行数值计算和处理。在用节点位移分量描述其他点（非节点）的位移分量时，并非考虑所有节点位移的影响，而是先将弹性体按节点分割成很多简单形状的小区域或小块，仅由包含该点的小区域上节点来表示。有限元法是将复杂的连续体分割成有限多个简单形状的小区域或小块，这些小区域或小块称为单元。每个单元形状简单，以位移为基本变量，根据虚位移原理或最小势能原理，求解单元的能量，将每个单元的能量叠加后便得到结构的总能量。

有限元法先化整为零、再积零为整。也就是把一个连续体分割成有限数量个单元，首先对每个简单的单元进行分析，然后再将所有单元组合起来进行结构的整体分析。有限元法的实质是将连续体无限自由度问题转化为离散体有限自由度问题，将连续场函数的偏微分方程求解问题转化成有限个参数的代数方程组求解问题。从数学的角度来看，有限元法是将偏微分方程化成代数方程组，然后利用计算机进行求解的方法。

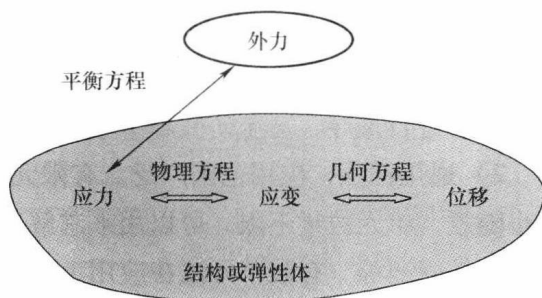


图 1.1 弹性力学基本量关系示意图

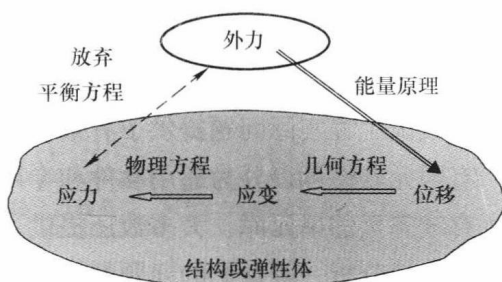


图 1.2 有限元法的基本思路示意图

### 1.3 有限元法的特点

1) 概念清楚，容易理解，可以在不同程度、不同深度上理解与应用。采用有限元技术

分析工程实际问题，需要在计算机上应用某种分析软件。这就为使用者在多个层面上学习和应用有限元提供了平台，既可以通过直观的物理意义来学习，也可以通过严格的力学概念和数学概念进行推导，甚至研究新型单元或新算法。

2) 通用性强，应用范围广泛。有限元法的基本做法是离散化，由于单元种类多、单元大小随意，单元数量不限，可以用来求解工程中任何复杂问题，如复杂结构形状问题，复杂边界条件问题等。有限单元法在应用上已远远超过了原来的范围，由平衡问题扩展到稳定问题与动力问题，由弹性问题扩展到弹塑性、非均质与非线性材料、大变形、接触等问题。

3) 采用矩阵形式表达，计算格式统一，便于编程计算。可以充分发挥计算机计算能力强的优势。

4) 配有大型通用软件。大型通用软件成熟且商业化，不需要专门编程，为广泛应用有限元法解决工程实际问题提供了有效工具和手段。

有限元软件可以分为通用软件和专用软件两类。通用软件适应性广、规范、输入方法简单，有较齐全的单元库，大多数还提供了二次开发的接口，可进一步拓展软件应用功能，使用通用软件分析一般常见的问题都能够得到满意的结果。但对于一些比较特殊的问题，尤其是处于研究阶段的问题，往往需要针对某些特定领域、特定问题开发的专用软件，以解决专门问题。目前常用的有限元软件有：ANSYS、MARC、ABAQUS、NASTRAN、ADINA、ALGOR、SAP、STRAND 等。譬如 ANSYS 软件是融结构、流体、电场、磁场、声场分析于一体的大型通用有限元分析软件。

5) 先进的前处理，实现网格自动划分，提高效率；完善的后处理，可视或动态显示，直观形象。

应用有限元法进行结构分析时，首先要建立有限元分析模型，对结构实体进行离散化、准备相关数据，但这样做的工作量相当大，人工操作效率低且容易出错。随着软件不断完善，前处理功能越来越强大，能实现单元自动划分，并进行网格检查，减少错误，减轻结构分析的劳动强度，提高效率。此外，一些通用软件能与 CAD、Creo 等软件接口，实现数据的共享和交换，这样会使结构方案的优化、修改和分析变得更加快捷。

有限元软件的后处理功能很完善，能够显示应力、形变、温度等分布，显示动态过程，形象逼真，为后续结构评判提供便捷方式。

6) 有限元是一种数值分析方法，计算误差难免，且不易估计，需要有经验的人员进行分析判断。误差除了来自计算机的数据记录误差，更主要与单元的类型选择、单元划分的形状及单元尺寸大小、载荷工况、边界约束条件等有限元模型有关。

## 1.4 有限元法的主要步骤

有限元法是根据能量原理将偏微分方程组转化为有限个参数的代数方程组，有限元方程的形式为

$$[K]\{\delta\} = \{F\} \text{ 或 } K\delta = F \quad (1.1)$$

式中， $K$  为结构的总刚度矩阵，与结构有限元模型有关； $F$  为外载荷矢量，由外载荷及计算工况确定； $\delta$  为节点位移矢量，是待确定的具有代表性节点的位移。方程的阶次与节点总数有关，若节点总数为  $n$ ，那么二维问题方程阶次为  $2n$ ，三维问题方程阶次为  $3n$ 。

用有限元法分析弹性力学问题的主要步骤可分为：建立有限元模型，形成结构的总体刚度矩阵（简称总刚），施加不同工况的外载荷，求解有限元方程（线性代数方程组）得到节点位移，求单元应力分量等环节，有限元分析的主要流程如图 1.3 所示。具体步骤说明如下：

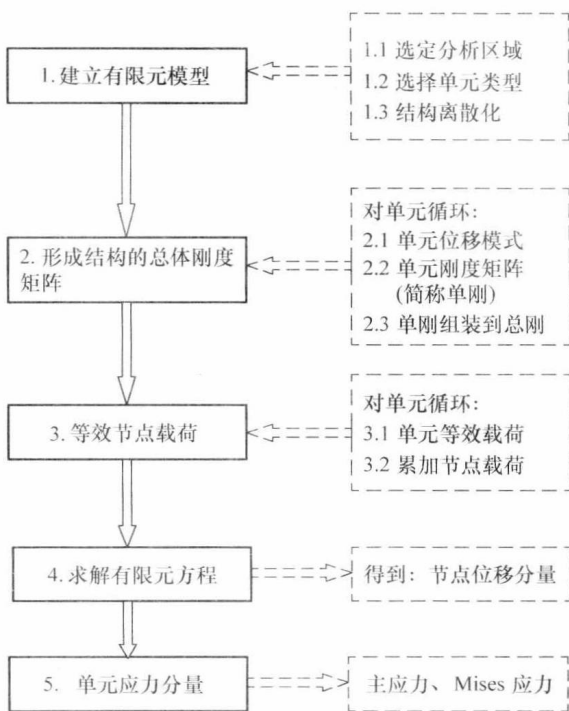


图 1.3 有限元法分析弹性力学问题的主要步骤

### 1. 建立有限元计算模型

结构有限元模型是有限元法分析的基础。建立有限元计算模型，首先要确定分析研究的对象，分析对象一般是结构总体，在结构的几何形状与作用载荷同时对称的情况下，也可选择结构的一部分作为研究区域；其次根据所研究的结构特征选择合理的单元类型，进行结构离散化。离散化就是将连续结构分割成一定数量的单元，单元与单元、

单元与边界之间通过节点连接，这些单元要模拟原结构的几何形体。单元的类型有多种，单元大小及结构离散化方式也可有所不同，这些因素都会影响有限元法的计算精度与计算效率，甚至会影响到数值解的收敛性和稳定性。合理离散化是保证用有限元法获得较高精度近似解的前提。

有限元的单元有很多类型，如表 1.1 列出部分典型单元，还有计算精度较高的二次及高次单元。选择的单元类型应能反映出结构的几何特征及受力状态，结构的几何特征可分为杆系结构、梁结构、平面问题、空间问题、板壳问题等。

### 2. 单元位移模式

对于位移型有限元法，首先要确定的是位移场，欲在整个结构上建立位移的统一数学表达式是非常困难甚至是不可能的。而将结构实体划分网格离散成单元的集合体后，以一个单元作为分析对象来描述单元范围内的位移场则较为简单。遵循某些基本准则，将单元中任意一点的位移分量用单元的节点位移来表达，即表示成节点位移的函数，这种由节点位移描述单元上点的位移的函数称为单元位移模式或位移插值函数。位移模式实质上是单元内的近似位移场，是计算单元应变的依据。不同类型的单元应有相应不同的位移模式，位移模式直接决定了有限元分析的正确性和计算精度。