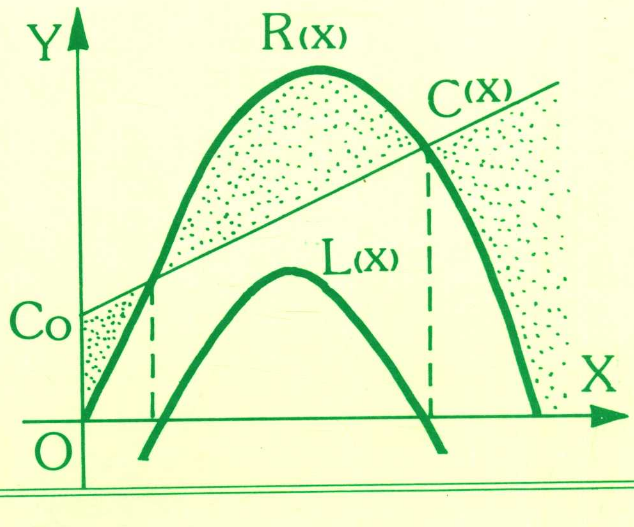
经济应用数学

——重庆商学院 数学教研室——编



重庆大学出版社

经济应用数学

重庆工商大学数学教研室　编

主　编　周观亮
副主编　陶德川　谢相琪
编　委　谢德政　郭　伟　李庆玉
　　　　王文惠　曹莉莉
主　审　陈海福

重庆大学出版社

内 容 提 要

本书针对成人教育的特点，深入浅出地介绍了微积分的基本内容及其在经济工作中的应用。全书包括函数、极限与连续、导数与微分、中值定理及导数的应用、不定积分、定积分、多元函数微积分等七章。为了便于自学和巩固已学知识，每节有练习，每章有习题，书末附有参考答案。

本书可作为经济和管理类专业的成人大专和普通专科学生的教材和参考书，也可供经济管理人员和其他实际工作者参考阅读。

经济应用数学
重庆工商大学数学教研室编
责任编辑：肖顺杰　　版式设计：肖顺杰
责任印制：张永洋
*
重庆大学出版社出版发行
出版人：张鸽盛
社址：重庆市沙坪坝正街 174 号重庆大学（A 区）内
邮编：400044
电话：(023)65102378　65105781
传真：(023)65103686　65105565
网址：http://www.cqup.com.cn
邮箱：fxk@cqup.com.cn（市场营销部）
全 国 新 华 书 店 经 销
重庆邮政印务有限公司印刷
*
开本：850×1168　1/32　印张：9.75　字数：262 千
1995 年 8 月第 1 版　　2002 年 8 月第 4 次印刷
印数：15 001—17 000
ISBN 7-5624-1060-7/F·100　定价：12.80 元

编者的话

随着我国社会主义市场经济的建立和逐步完善，高等数学的理论和方法越来越多地应用于现代经济管理之中．本书正是为了适应这一新形势发展的需要而编写的．

根据经济管理类成人教育的特点，本书注重《微积分》中的基本概念和基本计算方法的讲述，而对数学理论，在不影响整体结构的前提下，进行了一定的取舍．同时，注意理论联系实际，举例介绍了其在经济管理方面的应用．为了函授学员自学的需要，除了每章配有习题外，每节后还配有一定数量的基本练习，以便巩固该节内容．书末有练习和习题的参考答案．

本书共分七章，80 学时可讲完主要内容．其中有些内容加注了※号，属于选讲内容，学时不够可略去．

本书编写分工如下：第一章，陶德川；第二章，郭伟；第三章，谢相琪；第四章，周观亮；第五章，李庆玉；第六章，王文惠；第七章，曹莉莉．并由谢德政，陶德川总纂全书．陈海福副教授主审．

鉴于编者水平有限，编写时间较紧，有不尽完善和谬误之处敬请同行专家及读者指正．

重庆商学院数学教研室

1995 年 5 月

目　录

第一章　函数

函数是高等数学中最重要的基本概念之一，是微积分学研究的对象．在经济领域中涉及的大量数量关系都可以用函数来表达．本章将讨论函数的概念及其简单性质，着重分析作为本学科主要研究对象的初等函数的结构，同时介绍几个经济管理中常见的函数，为学习以后各章打下基础．

§1.1　集合

一、集合

"集合"是现代数学中的一个极为重要的基本概念．在中学数学中，已对集合作过一些介绍．为今后讨论问题的方便，这里将其中的有关内容作一个简单的复习．

集合是具有某种属性的事物的全体，常用大写字母 A、B、C……表示．其中每个个体事物称为该集合的元素，常用小写字母 a、b、c……表示．例如一班学生构成一个集合，其中的每一位学生就是这个集合中的一个"元素"；全体自然数也构成一个集合，称为自然数集，每一个自然数就是该集合的一个"元素"．

如果 a 是集合 A 的元素，则记作 $a\in A$，读作 a 属于 A；如果 a 不是集合 A 的元素，则记作 $a\overline{\in} A$，读作 a 不属于 A. 例如，如果 F 表示全体有理数的集合，则 $\frac{3}{5}\in F$，$\sqrt{2}\overline{\in} F$. 本书所讨论的集合具有确定性，即对一集合来说，某元素或者属于该集合，或者不属于该集合，二者必居其一．

由所研究的所有事物构成的集合称为全集，记作 U. 全集是

相对的．例如，讨论的问题仅限于正整数，则全体正整数的集合为全集；讨论的问题包括正整数和负整数，则全体正整数的集合就不是全集．

如果集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素，即 $a\in A$，则 $a\in B$，则称 A 为 B 的子集，记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$，读作 A 包含于 B 或 B 包含 A．如图 1-1．

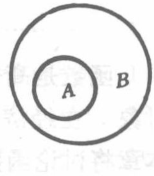


图 1-1

不包含任何元素的集合称为空集，记为 $\varnothing$．

常见的集合运算有“并”、“交”、“差”、“补”四种，它们的记号和规则如下：

“并”：$A\cup B=\{x|x\in A 或 x\in B\}$

“交”：$A\cap B=\{x|x\in A 且 x\in B\}$

“差”：$A-B=\{x|x\in A 且 x\overline{\in} B\}$

“补”：$A'=U-A=\{x|x\in U 且 x\overline{\in} A\}$

如图 1-2 所示．

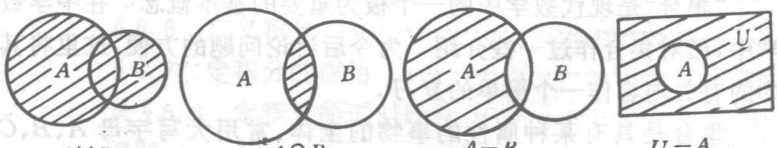


图 1-2

例 1　设 $A=\{1,2,3,4\}$

$B=\{3,4,5,6\}$．

则　$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\}$

$A\cap B=\{3,4\}$

$A-B=\{1,2\}$

二、实数的绝对值

在今后研究一些问题时，常用到实数绝对值的概念及性质，现简述如下：

定义 1.1 一个实数 x 的绝对值，记作$|x|$，定义为

$$|x| = \begin{cases} x & x \geqslant 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$|x|$的几何意义是：$|x|$表示数轴上点 x 与原点之间的距离．

绝对值及其运算有如下基本性质：

(1) $|x| = \sqrt{x^2}$；

(2) $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$；

(3)若 $a>0$，则下面两个集合相等：

$$\{x \mid |x| < a\} = \{x \mid -a < x < a\}$$

(4)若 $b>0$，则下面两个集合相等：

$$\{x \mid |x| > b\} = \{x \mid x > b\} \cup \{x \mid x < -b\}$$

(5) $|x+y| \leqslant |x| + |y|$；

(6) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$；

(7) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$ $(b \neq 0)$．

例 2 解不等式$|x+1|<2$.

解 由性质(3)有

$$-2 < x+1 < 2$$

即 $-3<x<1$

故不等式的解集为$\{x \mid -3<x<1\}$，如图 1-3 所示．

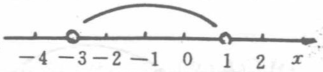


图 1-3

例 3 解不等式$|2x-3|>5$.

解 由性质(4)有

$$2x-3>5 \text{ 或 } 2x-3<-5$$

即 $x>4$ 或 $x<-1$

故不等式的解集为$\{x \mid x>4\} \cup \{x \mid x<-1\}$如图 1-4 所示：

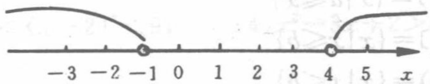


图 1-4

三、区间与邻域

微积分中，常用到的集合是实数集 R 的一些子集，这些子集往往由介于某两个实数之间的一切实数组成，称为区间，有如下几种：

设 a,b 为实数，且 $a<b$.

(1)满足不等式 $a<x<b$ 的所有实数 x 的集合，称为以 a,b 为端点的**开区间**，记作 (a,b) 即 $(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$，如图 1-5.

图 1-5

(2)满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的所有实数 x 的集合，称为以 a,b 为端点的**闭区间**，记作 $[a,b]$ 即 $[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 如图 1-6.

图 1-6

(3)满足不等式 $a<x\leqslant b$ 或 $a\leqslant x<b$)的所有实数 x 的集合称为**半开区间**，记作 $(a,b]$（或 $[a,b)$）即 $(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$ 如图 1-7.

图 1-7

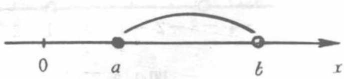


图 1-8

类似地，$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$ 如图 1-8.

以上三种称为**有限区间**，除此之外，还有以下几种**无限区间**：

(4) $(a,+\infty)=\{x\mid a<x\}$

$[a,+\infty)=\{x\mid a\leqslant x\}$

(5) $(-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b\}$

$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\}$

(6) $(-\infty,+\infty)=\{x\mid x\in R\}=R$

应该注意，“$-\infty$”“$+\infty$”不能看作通常的实数．

由绝对值的性质(3)可知，满足不等式 $|x-x_0|<\delta(\delta>0)$ 的一切实数构成的集合在数轴上是以点 x_0 为中心，长度为 2δ 的开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 称为点 x_0 的 δ 邻域，δ 称为邻域的半径，如图 1-9.

例如 $|x-4|<0.1$ 即为点 $x_0=4$ 的 0.1 邻域，也就是开区间(3.9,4.1).

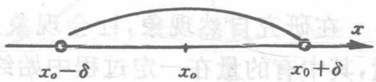


图 1-9

集合 $\{x|0<|x-x_0|<\delta,\delta>0\}$ 表示点 x_0 的邻域去掉点 x_0 后所得到的集合：$(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$ 习惯上称为点 x_0 的 δ 空心邻域．

例如 $\{x|0<|x-1|<2\}$ 即为以 $x_0=1$ 为中心，半径为 2 的空心邻域 $(-1,1)\cup(1,3)$.

练习 1.1

1. 设 $A=\{1,2,3\}$， $B=\{1,3,5\}$， $C=\{2,4,6\}$，求：

(1)$A\cup B$； (2)$A\cap B$； (3)$A\cup B\cup C$；

(4)$A\cap B\cap C$； (5)$A-B$.

2. $A=\{x||x|\leqslant 5\quad x\in R\}$， $B=\{x|-6\leqslant x<1\quad x\in R\}$. 求：

(1)$A\cup B$； (2)$A\cap B$； (3)$A-B$； (4)A'.

3. 用区间表示下列集合：

$A=\{x||x|\leqslant 5\}$； $B=\{x||x|>2\}$；

$C=\{x|-1<x\leqslant 3\}$； $D=\{x|x>-1\}$；

$E=\{x|x\leqslant 4\}$.

4. 解下列不等式，并把解集在数轴上表示出来：

(1)$|x+1|<2$； (2)$|x-3|>1$；

(3)$0<(x-2)^2<9$； (4)$x^2-3x+2>0$.

§1.2 函数

一、常量与变量

在研究自然现象，社会现象过程中，常常会遇到各种不同的量，其中有的量在一定过程中始终保持不变的数值，这种量称为**常量**；有的量在过程中可取不同的数值，这种量称为**变量**．例如，某种商品的价格在一定时期内是相对稳定的，因此，可以看作常量，而其销售量和销售额通常是变化的，则是变量．

常量与变量的概念是相对的，即一个量在一过程中是常量而在另一过程中可能是变量．例如飞机正作严格的水平飞行，海拔高度就是一个常量，而当飞机降落时，海拔高度就成为变量．

常量通常用字母 $a,b,c\cdots$ 表示，变量则以字母 $x,y,z\cdots$ 表示．常量与变量都可以用数轴上的点表示，如常量 x_0 表示数轴上的一定点，变量 x 表示数轴上的动点．

二、函数

1. 函数的定义

在自然科学或经济管理中，所遇到的实际问题往往有几个变量同时都在变化，这些变量并不是彼此孤立的，而是相互联系，相互制约的，下面考察几个实例．

例 1 设某商品的单位成本为 5 元，企业已售出该商品 100 件，问企业可获得多少利润？

在这个问题中，单位成本是常量，销售数量是常量，而单价与利润是变量，单价高，利润大；单价低，利润少．若设 P 表示单价，L 表示总利润，则 L 与 P 之间有关系

$$L = 100(P-5) \quad (P>0)$$

上述式子表明了利润 L 与价格 P 之间的相互依存关系，只要价格 P 确定，利润 L 就随之确定．

例 2　圆的半径 r 和它的面积之间有关系

$$S = \pi r^2 \quad (r > 0)$$

其中 π 是常量，r 和 S 是变量，只要 r 取定某一个正数值，面积 S 就有一个确定的值与之对应．所以上述公式表明了变量 r 和 S 的相互依存关系．

例 3　设某地一天的气温 T 用自动记录仪记录如图 1-10．时刻 t 与气温 T 之间的相互依存关系在图上反映出来，对于时刻 t_0．在图上就能找到此时刻的气温 T_0．

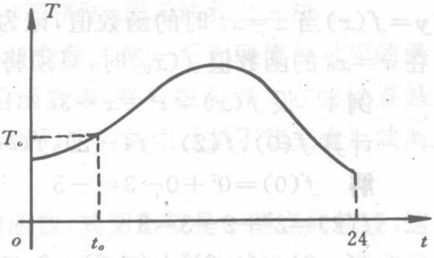


图 1-10

类似上面的例子很多，它们反映不同的具体问题，但都具有一个共同的特点，那就是它们反映了两个变量之间的相依关系：当其中一个变量在某一范围内取定一数值时，按照某种规律，另一个变量就有一个确定的值与之对应．于是抽象出函数概念．

定义 1.2　设 x 与 y 是两个变量，如果变量 x 在某一范围 D 内取一值时，按照某一规律，变量 y 有一个唯一确定的值与之对应，则称**变量 y 是变量 x 的函数**，记为

$$y = f(x)$$

其中 x 叫做**自变量**，y 叫做函数或**因变量**．自变量 x 取值范围 D 称为函数的**定义域**，记为 $D(f)$．

从函数的定义中可以看到函数包含的两个要素，即：

1°　两个变量之间的对应规律；

2°　自变量的取值范围．

应注意的是，函数的符号 $f(x)$ 是一个整体，它不表示 f 乘以 x，字母“f”应理解为变量 x 与 y 之间对应的确定性规律．

根据函数的定义，给出一个函数一定要指出函数的定义域．在实际问题中，函数的定义域要根据所考虑的实际问题的意义来

确定，在只给出函数的表达式 $y=f(x)$，而没有指出它的定义域时，则其定义域就是使 y 有意义的自变量 x 的全体．

对于自变量 x 取定值 x_0 时，函数 $y=f(x)$ 的对应值叫做函数 $y=f(x)$ 当 $x=x_0$ 时的函数值，记为 $f(x_0)$．一般求函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 的函数值 $f(x_0)$ 时，只须将 x_0 代入函数式中计算便得．

例 4　设 $f(x)=x^2+x-3$.

计算 $f(0)$，$f(2)$　$f(-2)$，$f(t+1)$

解　$f(0)=0^2+0-3=-3$

$f(2)=2^2+2-3=3$

$f(-2)=(-2)^2+(-2)-3=-1$

$f(t+1)=(t+1)^2+(t+1)-3=t^2+3t-1$

例 5　求下列函数的定义域．

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$；(2) $f(x)=\sqrt{4-x^2}$；

(3) $f(x)=\lg(3-2x)+\arcsin(x-1)$.

解　(1)要使函数有意义，必须分母不等于零，即 $x\neq\pm1$，所以函数的定义域为

$$D(f)=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1+\infty)\text{，或记为}$$

$$D(f)=\{x|x\neq\pm1\}$$

(2)要使函数有意义，必须 $4-x^2\geqslant0$，即 $-2\leqslant x\leqslant2$ 故函数的定义域为

$$D(f)=[-2,2]\text{，或记为}$$

$$D(f)=\{x|-2\leqslant x\leqslant2\}$$

(3)因为只有当 $3-2x>0$ 且 $|x-1|\leqslant1$ 时函数才有意义，所以由不等式组

$$\begin{cases}3-2x>0\\|x-1|\leqslant1\end{cases}$$

可得解集为 $0\leqslant x<\dfrac{3}{2}$.

故函数的定义域为

$$D(f)=[0,\frac{3}{2})\text{，或记为}$$

$$D(f)=\{x|0\leqslant x<\frac{3}{2}\}$$

2. 函数的表示法

函数的表示法一般有三种：表格法、图示法和公式法.

1°表格法　表格法就是将自变量 x 的一系列取值与对应的函数值列成表格，如对数表，三角函数表，平方根表等．它的优点是使用方便，在实际工作中常常使用，它的局限性是不能完全反映两个变量之间的规律性．

2°图示法　一个自变量的函数，其图形就是一些点的轨迹，这些点的横坐标为自变量的取值，纵坐标是对应的函数值．而这些点形成平面上的一条曲线，这就是函数的图示法．它的优点是直观醒目，缺点是不够准确和完整．

3°公式法　公式法就是直接用数学式子表示两个变量间的函数关系的方法，它的优点是简明，准确、完整，便于理论分析，是微积分中常采用的方法．

需要指出，在公式法里有时一函数关系使用一个分析式子表示不够，必须用两个或两个以上的式子来分段给出，这样的函数称为**分段函数**．

对于分段函数，强调以下两点：

(1)分段函数是用几个分析式子表示一个函数，而不是几个函数；

(2)分段函数的定义域是各段分析式子定义域的“并”．

例 6　设 $f(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ x^2 & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 2-x & 1<x\leqslant 2\end{cases}$

试指出 $f(x)$ 的定义域，并计算 $f(-2)$，$f(-\frac{1}{2})$，$f(0)$，$f(\frac{1}{2})$，$f(\frac{3}{2})$.

解　函数的定义域 $D(f)=(-\infty,0)\cup[0,1]\cup(1,2]$
$=(-\infty,2]$

因为 $x<0$ 时 $f(x)=0$，故

$$f(-2)=f(-\frac{1}{2})=0$$

同理可得 $f(0)=0^2=0$，　　$f(\frac{1}{2})=(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$

$$f(\frac{3}{2})=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$$

三、反函数

函数 $y=f(x)$ 表示变量 y 是随着 x 的变化而变化，但是有时候我们需要反过来研究变量 x 是怎样随着 y 的变化而变化的．例如，设某商品单价为 P，销售量为 x，销售额为 y，则有关系式 $y=Px$. 它表示销售额是销售量的函数．但反过来，如果给定了销售额 y，则可由关系式 $x=\frac{y}{P}$ 确定销售量 x，这种由销售额确定销售量的关系式 $x=\frac{y}{P}$，实际上就是销售量 x 是销售额 y 的函数．我们称后一种函数 $x=\frac{y}{P}$ 为前一种函数 $y=Px$ 的**反函数**，或者说它们互为反函数．

定义 1.3　在已给函数 $y=f(x)$ 中，若把 y 当作自变量，x 当作因变量，所确定的函数叫做 $y=f(x)$ 的反函数，记为 $x=f^{-1}(y)$.

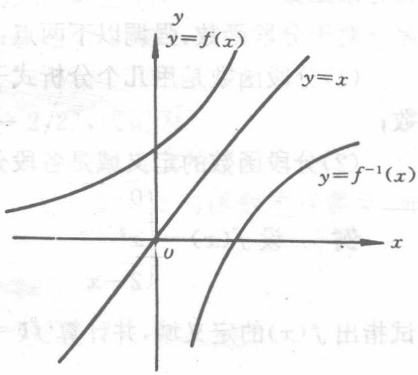


图 1-11

习惯上，人们总是用 y 表示因变量，x 表示自变量，所以 $y=f(x)$ 的反函数可以写为 $y=f^{-1}(x)$.

为讨论方便，我们把 $x=f^{-1}(y)$ 叫做 $y=f(x)$ 定义上的反函数，而把

$y=f^{-1}(x)$叫做 $y=f(x)$习惯上的反函数．必须指出定义上的反函数 $x=f^{-1}(y)$与原来的函数 $y=f(x)$在同一直角坐标系中表示同一图形，而习惯上的反函数 $y=f^{-1}(x)$的图形与原来函数 $y=f(x)$的图形是关于直线 $y=x$ 对称的（图 1-11）．

例 7 求函数 $y=2x+1$ 的反函数并作图．

解 由 $y=2x+1$ 可得

$$x=\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}$$

将 x,y 的位置互换，即得 $y=2x+1$ 的反函数 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$．如图 1-12 所示．

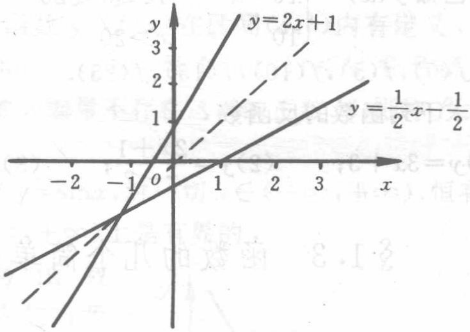


图 1-12

练习 1.2

1. 求下列函数的定义域．

(1) $y=\frac{x}{x^2+3x}$； (2) $y=\sqrt{x^2-2x-3}$； (3) $y=\lg(x+1)$；

(4) $y=\arcsin\frac{x-1}{2}$； (5) $y=\sqrt{1-x}+\sqrt{x^2-3x+2}$；

(6) $y=\begin{cases}\frac{1}{x-1} & x<0 \\ x & 0\leqslant x<1 \\ 1 & 1\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$

2. 判断下列各对函数是否相同．