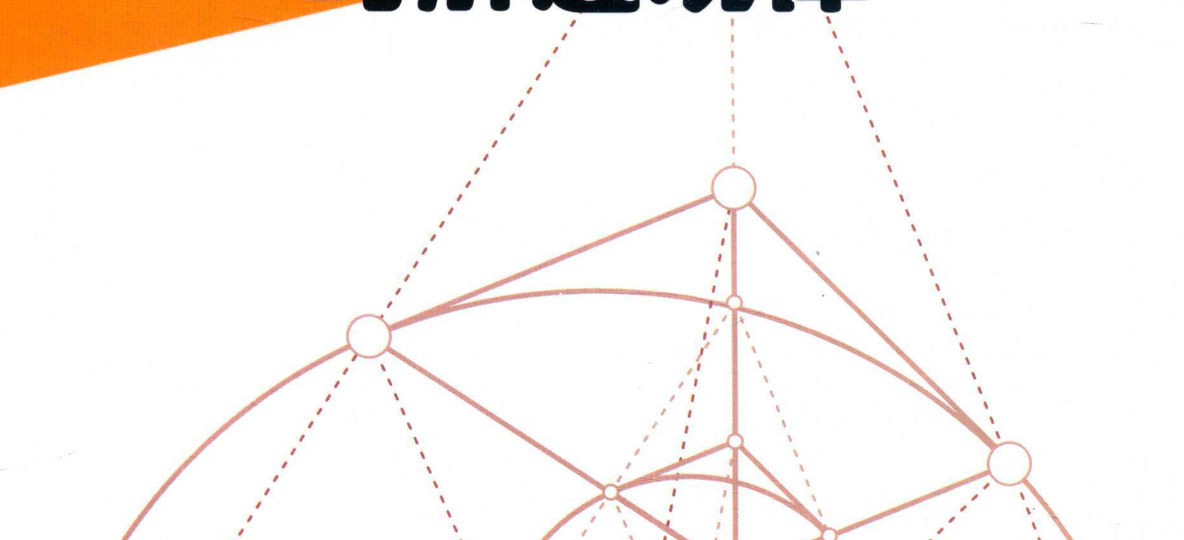
周沛耕　刘建业　著

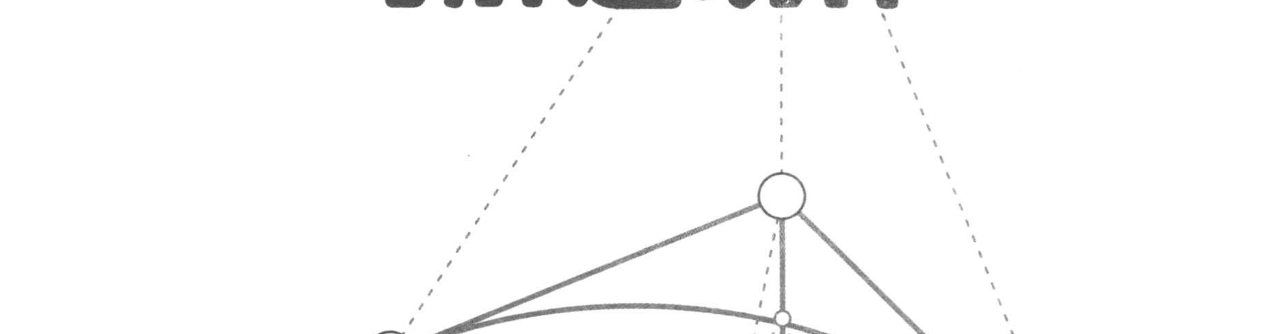
平面几何题的解题规律



中国科学技术大学出版社

周沛耕　刘建业　著

平面几何题的解题规律



中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书是作者在长期进行国际数学奥林匹克竞赛培训的基础上编写而成的，主要内容包括线段相等，线段的和差倍分问题，角和角的和差倍分问题，垂直与平行关系，线段成比例问题，线段的平方和面积问题，几何不等式，定值问题，点共线、线共点、点共圆问题，计算题，作图题，杂题等 12 个方面. 书中收录了大量的几何题，对每一道题都采用不同思路、不同方法加以求解，既有技巧性很强的方法，也有通用性很好的一般方法，有助于读者拓宽视野，提升解题能力，养成多角度思考问题的习惯.

本书适合中学生、中学数学教师、高等院校尤其师范类院校的数学系师生阅读使用，也可供数学爱好者参考.

图书在版编目(CIP)数据

平面几何题的解题规律/周沛耕，刘建业著. —合肥：中国科学技术大学出版社，2017. 3 (2017. 6 重印)

ISBN 978-7-312-04053-5

Ⅰ. 平… Ⅱ. ① 周… ② 刘… Ⅲ. 平面三角—研究 Ⅳ. O124. 1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 315098 号

出版 中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路 96 号，230026
http://press. ustc. edu. cn
https://zgkxjsdxcbs. tmall. com

印刷 安徽联众印刷有限公司

发行 中国科学技术大学出版社

经销 全国新华书店

开本 787 mm×1092 mm 1/16

印张 29. 75

字数 724 千

版次 2017 年 3 月第 1 版

印次 2017 年 6 月第 2 次印刷

印数 3001—7000 册

定价 78. 00 元

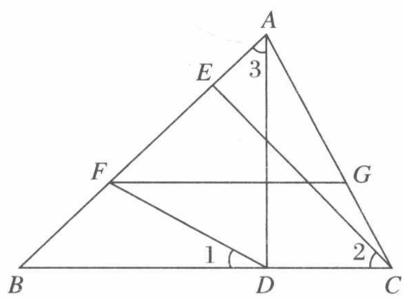
前　言

平面几何对于培养学生形象思维能力和逻辑思维能力有着重要作用. 学生们经过努力，解出一个又一个平面几何题，会感到很兴奋，很有成就感. 这门学科有利于激发青年人的创造力，有利于提升他们的理性思维品质.

在数学各分类中，平面几何是历史非常悠久的分支之一，在从公元 4 世纪中叶以来近 1700 年的发展中积累了十分丰富的几何知识和解题方法. 平面几何又是各国中学数学教材和各种级别的数学考试(包括国际数学奥林匹克竞赛(IMO))中的重点. 从全社会来看，许多并不是学生和数学教师的人，比如科研人员、商务人士、公司职员、公务员等，他们对平面几何也很感兴趣.

解平面几何题常要添加一些辅助线. 这是对解题者能力的挑战. 有些题目中精彩的辅助线能让人赏心悦目，交口称赞，可以说是对平面几何解题方法的贡献. 辅助线的功能是“沟通”和“显现”，沟通这部分图形与那部分图形的关系，显现可用定理和判断的依据. 在添加辅助线时不应有思维定势，要具体情况具体分析. 解题时可供选择的辅助线有：线段、射线、直线、角、弧、圆以及基本图形(例如正三角形、正方形等). 也有的题目可以不添加辅助线. 下面介绍几例.

[例 1]　如序图 1 所示，在$\triangle ABC$中，$AD \perp BC$于D，$CE \perp AB$于E，F、G分别在AB、AC上，$FG \parallel BC$，$FG = CE$. 求证：$\angle BDF = \frac{1}{2}\angle BCE$.



序图 1

证明　由 $\mathrm{Rt}\triangle ADB \backsim \mathrm{Rt}\triangle CEB$ 知$\angle 2 = \angle 3$.

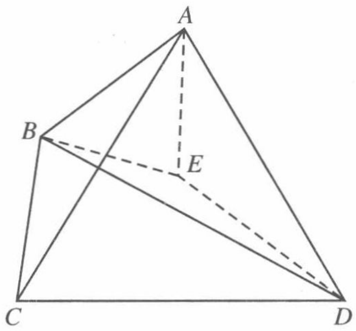
由$FG \parallel BC$知$\frac{AF}{AB} = \frac{FG}{BC} = \frac{CE}{BC}$，所以 $AB \cdot CE = AF \cdot BC$.

由面积算法知 $AB \cdot CE = AD \cdot BC$，所以 $AD = AF$，$\triangle AFD$ 是等腰三角形，所以

$$\begin{aligned}\angle AFD &= \angle AFG + \angle GFD \\ &= \angle B + \angle 1 \\ &= \angle ADF \\ &= 90^\circ - \angle 1.\end{aligned}$$

所以 $90^\circ - \angle B = 2\angle 1$，即$\angle 2 = 2\angle 1$.

注　本例没有添加辅助线.思路很通畅.



序图 2

［例 2］　如序图 2 所示，在凸四边形 $ABCD$ 中，求证：$AC \cdot BD \leqslant AB \cdot CD + AD \cdot BC$. 并指出等号成立时，四边形 $ABCD$ 的特征.

证明　作 $\angle BAE = \angle CAD$，$\angle ABE = \angle ACD$，连 ED，则 $\triangle ABE \backsim \triangle ACD$，所以 $\dfrac{BE}{CD} = \dfrac{AB}{AC}$，即

$$AB \cdot CD = BE \cdot AC. \qquad ①$$

由 $\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{AE}{AB}$ 得到 $\triangle ADE \backsim \triangle ACB$，所以 $\dfrac{AC}{AD} = \dfrac{BC}{ED}$，即

$$BC \cdot AD = AC \cdot ED. \qquad ②$$

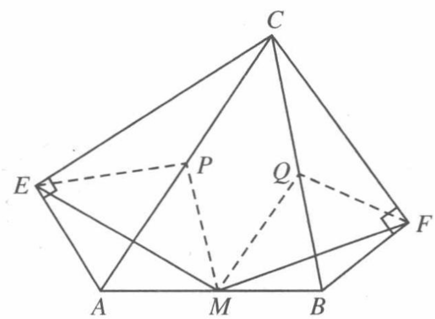
式①＋式②，得

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC(BE + ED) \geqslant AC \cdot BD.$$

等号成立时，$BE + ED = BD$，即 E 点在 BD 上.此时 $\angle ABD = \angle ACD$. 故 A、B、C、D 四点共圆.

注　本例中添加了 3 条辅助线，产生了 2 对相似三角形.

［例 3］　如序图 3 所示，在 $\triangle ABC$ 中，分别以 AC、BC 为斜边向外作两个直角三角形：$\triangle ACE$、$\triangle BCF$. 其中 $\angle AEC = \angle BFC = 90^\circ$，$\angle ACE = \angle BCF$. M 为 AB 的中点.求证：$ME = MF$.



序图 3

证明　易知 $\triangle ACE \backsim \triangle BCF$. 取 AC、BC 的中点 P、Q，连 PM、PE、QM、QF.

PM 是 $\triangle ABC$ 的中位线，故 $PM = \dfrac{1}{2}BC$，QF 是 $\mathrm{Rt}\triangle BFC$ 的斜边上的中线，故 $QF = \dfrac{1}{2}BC$，所以 $PM = QF$.

同理 $QM = PE$.

由 $PM \parallel BC$，$QM \parallel AC$ 知 $\angle APM = \angle ACB = \angle BQM$. 又因为 $\angle EPA = 2\angle ECA = 2\angle FCB = \angle FQB$，所以 $\angle EPA + \angle APM = \angle FQB + \angle BQM$，即 $\angle EPM = \angle FQM$.

所以 $\triangle EPM \cong \triangle FQM$，所以 $ME = MF$.

注　本例中添加了 4 条辅助线，呈现了全等三角形的对应边相等的性质.

［例 4］　如序图 4 所示，求证：$AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD - AD^2 \cdot BC = BD \cdot BC \cdot DC$.

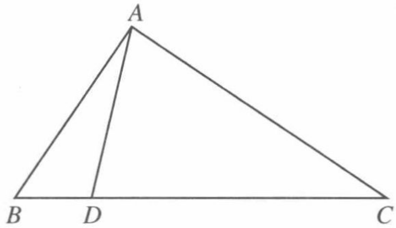
证明　因为

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2AD \cdot DC \cdot \cos\angle ADC,$$

$$AB^2 = AD^2 + DB^2 - 2AD \cdot DB \cdot \cos\angle ADB,$$

所以

$$
\begin{aligned}
&AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD \\
&= (AD^2 + DB^2) \cdot DC + (AD^2 + DC^2) \cdot BD \\
&= AD^2 \cdot (DC + BD) + BD \cdot DC(BD + DC) \\
&= AD^2 \cdot BC + BD \cdot BC \cdot DC.
\end{aligned}
$$



序图 4

注　本例中运用了余弦定理，未添加辅助线，从而解决了这个图形简单、结论不简单的问题.

[例 5]　如序图 5 所示，$\angle BAD = \angle CAE$. 求证：$\dfrac{BD}{DC} \cdot \dfrac{BE}{EC} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$.

证明　因为

$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{\frac{1}{2}AB \cdot AD \cdot \sin\alpha}{\frac{1}{2}AD \cdot AC \cdot \sin(\alpha+\beta)} = \frac{BD}{DC},$$

$$\frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle AEC}} = \frac{\frac{1}{2}AB \cdot AE \cdot \sin(\alpha+\beta)}{\frac{1}{2}AE \cdot AC \cdot \sin\alpha} = \frac{BE}{EC},$$

所以$\dfrac{BD}{DC} \cdot \dfrac{BE}{EC} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$.

注　本例运用了面积方法，未添加辅助线.

[例 6]　如序图 6 所示，求证：$PB \cdot \sin\angle APC = PC \cdot \sin\angle APB + PA \cdot \sin\angle BPC$.

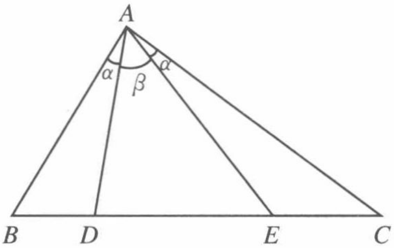
证明　连 BC、AC、AB. 记$\angle APB = \alpha$，$\angle BPC = \beta$，则$\angle APC = \alpha + \beta$.

设圆的半径为 R，由正弦定理，得

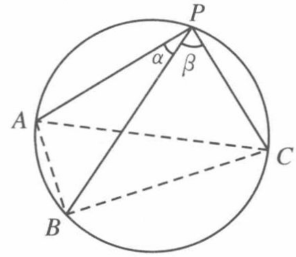
$$\frac{AC}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{AB}{\sin\alpha} = \frac{BC}{\sin\beta} = 2R.$$

根据托勒密(Ptolemy)定理，有 $AC \cdot PB = AB \cdot PC + BC \cdot PA$，所以 $PB \cdot 2R\sin(\alpha + \beta) = PC \cdot 2R\sin\alpha + PA \cdot 2R\sin\beta$，即 $PB \cdot \sin(\alpha+\beta) = PC \cdot \sin\alpha + PA \cdot \sin\beta$.

注　本例用到的托勒密(Ptolemy)定理就是前言例 2 中等号成立的情况.



序图 5



序图 6

[例 7]　$\odot O_1$、$\odot O_2$、$\odot O_3$的半径相等，且两两相交，如序图 7 所示. 求证：$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD} +$

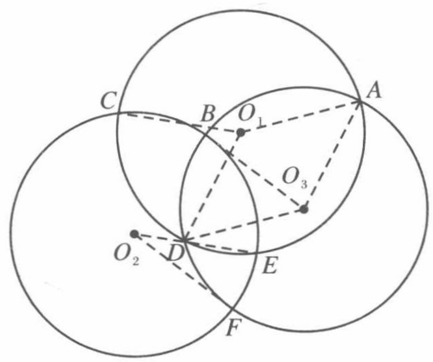
$\overset{\frown}{EF} \overset{\mathrm{m}}{=} 180^\circ$.

证明 连 O_1C、O_1D、O_2E、O_2F、O_3A、O_3B、O_1A、O_3D.

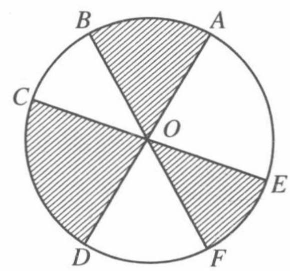
根据"两圆相交，连心线是公共弦的中垂线"，可知 O_1AO_3D 是菱形. 同理 O_2FO_3B、O_1EO_2C 是菱形，所以 $O_3A \underline{\parallel} O_1D$，$O_2F \underline{\parallel} O_3B$，$O_1E \underline{\parallel} O_2C$.

设想把扇形 O_1CD，扇形 O_2EF，扇形 O_3AB 平移，使 O_1、O_2、O_3 重合于 O，则 $\overset{\frown}{AB}$、$\overset{\frown}{CD}$、$\overset{\frown}{EF}$ 合为一个圆中三段互相分离的弧，如序图 8 所示，易知 AD、CE、BF 是 $\odot O$ 的直径.

所以 $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{EF} \overset{\mathrm{m}}{=} 180^\circ$.



序图 7

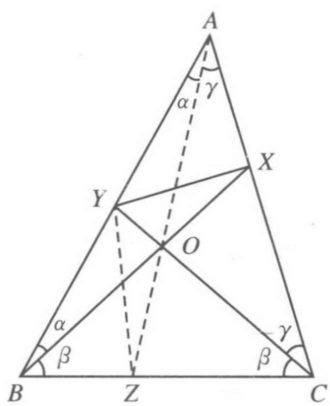


序图 8

注 $O_3A \underline{\parallel} O_1D$、$O_2F \underline{\parallel} O_3B$、$O_1E \underline{\parallel} O_2C$ 是三个扇形平移的基础. 平移法是证明平面几何题的方法之一.

在证明过程中不必把所有辅助线都作出，可用"同理"处理.

[例 8] 如序图 9 所示，在 $\triangle ABC$ 中，O 是外心. 射线 BO 交 AC 于 X，射线 CO 交 AB 于 Y. $\angle AYX = \angle XYC = \angle BAC$. 求 $\triangle ABC$ 的各内角的度数.



序图 9

分析 $\triangle ABC$ 是一个特殊三角形. 解题时应从特殊条件 $\angle AYX = \angle XYC = \angle BAC$ 入手，并发挥外心的作用. 为了获取更多的几何信息，显现可用几何定理的"环境"，可考虑添加一些辅助线.

解 连 AO 并延长，交 BC 于 Z，连 YZ.

记等腰 $\triangle ABO$、$\triangle OBC$、$\triangle OCA$ 的底角分别为 α、β、γ，则

$$\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ, \qquad ①$$

$$\begin{aligned}\angle AYC &= 2\angle BAC = 2(\alpha + \gamma) \\ &= \angle YBC + \angle BCY \\ &= \alpha + 2\beta. \qquad ②\end{aligned}$$

由 YX 是 $\angle AYC$ 的平分线，可知 $\dfrac{YA}{YC} = \dfrac{AX}{XC}$.

在$\triangle ABC$中，由塞瓦(Ceva)定理，有

$$\frac{AY}{YB}\cdot\frac{BZ}{ZC}\cdot\frac{CX}{XA}=1.$$

由上述两个比例式，可得

$$\frac{BZ}{ZC}=\frac{YB}{YC}.$$

可见YZ平分$\angle BYC$.

根据YX、YZ分别是$\angle AYC$、$\angle BYC$的平分线，可知$YZ\perp YX$，即$\angle OYZ+\angle OYX=\angle OYZ+(\alpha+\gamma)=90^\circ$. 再由①式可知$\angle OYZ=\beta$.

在四边形$YBZO$中，$\angle OYZ=\angle OBZ$，所以Y、B、Z、O四点共圆，所以$\angle YZO=\angle YBO=\alpha$.

在$\triangle AYZ$中，由内角和定理，有

$$2(\alpha+\gamma)+\beta+2\alpha=180^\circ. \tag{③}$$

由式①、式②、式③，得

$$\begin{cases}\alpha=20^\circ,\\ \beta=40^\circ,\\ \gamma=30^\circ.\end{cases}$$

所以

$$\begin{cases}\angle BAC=\alpha+\beta=50^\circ,\\ \angle ABC=\alpha+\beta=60^\circ,\\ \angle ACB=\beta+\gamma=70^\circ.\end{cases}$$

注　① 辅助线AOZ是出于与BOX、COY“地位对等”而添加的，目的是充分发挥外心O的作用.

② Ceva定理、角平分线性质定理及逆定理在建立α、β、γ之间的代数关系中起到了桥梁作用.

③ 四点(Y、B、Z、O)共圆的判定定理及性质的作用是得到式③，否则α、β、γ是求不出来的.

笔者在20世纪60年代初以优异成绩考入北京大学数学力学系，1968年毕业后在北大附中任教. 培养过几个北京市高考状元，培养过我国第一位参加国际数学奥林匹克竞赛(IMO)的考生王锋，还培养过出自同一个班的3名IMO竞赛中国队队员张里钊、王绍昱、刘彤威(中国队只有6名队员). 曾任中国数学奥林匹克集训队教练、北京集训队主教练，在近50年的教学过程中积累了数学教师培训，中学生数学竞赛指导，中、高考命题研究以及教材

建设等多方面较为丰富的经验.

本书不仅讲解了平面几何问题的求解,更重要的是介绍了研究平面几何的方法,书中的题目既可以作为考试命题的素材,也可以成为深入研究平面几何的起点.

周沛耕

2016年初于北京大学

符号与公式

符　　号

① Rt:直角,如 Rt$\triangle ABC$(直角$\triangle ABC$).

② $\underline{\underline{\parallel}}$:平行且相等,如 $AB \underline{\underline{\parallel}} CD$($AB$ 平行且等于 CD).

③ $\square$:平行四边形,如$\square ABCD$(平行四边形 $ABCD$).

④ $\frown$:弧,如 $\overset{\frown}{AB}$(AB 弧),$\overset{\frown}{ABCD}$(过 A、B、C、D 的弧).

⑤ l:弧长,如 $l_{\overset{\frown}{AB}}$($\overset{\frown}{AB}$ 的弧长).

⑥ $\overset{\text{m}}{=}$:度量相等,如 $\overset{\frown}{AB} \overset{\text{m}}{=} 30^\circ$($\overset{\frown}{AB}$ 的度数为 30°).

⑦ S:面积,如 $S_{\triangle ABC}$($\triangle ABC$ 的面积),S_{ABCDE}(五边形 $ABCDE$ 的面积),$S_{\text{扇形}AOB}$(扇形 AOB 的面积).

⑧ $M(a,b)$:平面直角坐标系中点 M 的坐标,其中 a 是横坐标,b 是纵坐标.

⑨ M_x:点 M 的横坐标.

⑩ M_y:点 M 的纵坐标.

⑪ $\max(a,b,c)$:元素 a、b、c 中的最大者,例如 $a \geqslant b$,$a \geqslant c$,则 $\max(a,b,c)=a$.

公　　式

设在$\triangle ABC$ 中,$BC=a$,$CA=b$,$AB=c$,$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$,BC 边上的中线长 m_a,高线长 h_a,$\angle A$ 的平分线长 t_a(余类推).

① 中线长:

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2},$$

$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2c^2+2a^2-b^2},$$

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}.$$

② 角平分线长：

$$t_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcs(s-a)},$$

$$t_b = \frac{2}{a+c}\sqrt{acs(s-b)},$$

$$t_c = \frac{2}{a+b}\sqrt{abs(s-c)}.$$

③ 高线长：

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

$$h_b = \frac{2}{b}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

④ 面积：

$$\begin{aligned} S_{\triangle ABC} &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= rs \quad (r\text{ 为内切圆半径}) \\ &= \frac{abc}{4R} \quad (R\text{ 为外接圆半径}) \\ &= \frac{1}{2}ab\sin\angle C = \frac{1}{2}bc\sin\angle A = \frac{1}{2}ca\sin\angle B. \end{aligned}$$

⑤ 外接圆半径：

$$\begin{aligned} R &= \frac{a}{2\sin\angle A} = \frac{b}{2\sin\angle B} = \frac{c}{2\sin\angle C} \\ &= \frac{abc}{4S_{\triangle ABC}}. \end{aligned}$$

⑥ 内切圆半径：

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} \\ &= (s-a)\tan\frac{\angle A}{2} = (s-b)\tan\frac{\angle B}{2} = (s-c)\tan\frac{\angle C}{2}. \end{aligned}$$

⑦ 余弦定理：

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\angle A,$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\angle B,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle C.$$

目　　录

绪　　论

平面几何题主要分证明题、计算题和作图题三类.每类问题都离不开证明.

证明方法分为直接证法和间接证法两种.直接证法是从题设出发,根据公理、定理,用逻辑推理方法作出一系列判断而得到结论的方法.间接证法一般指反证法和同一法.反证法的证题过程是:先作出与待证结论相反的假设,再根据公理、定理进行逻辑推理,直到出现与公理、定理或题设矛盾的结论,从而否定假设,完成证明.同一法的证题过程是:利用辅助线先作出与待证结论一致的图形,然后从题设出发,根据公理、定理进行逻辑推理,最后根据某些具有一定特点的几何元素(点或直线等)位置的唯一性证出结论.可见,无论哪一种证明方法都离不开逻辑推理.

从推理方式看,证明方法可分为综合法和分析法(即倒推法)两种.综合法是从已知条件出发,运用公理、定理层层推进,最后得到结论;分析法则是从待证结论出发,找出产生结论的条件,再进一步找出产生这个条件的条件……最后归结到已知条件.一些较难的题目是通过交替使用综合法和分析法得到结论的.

平面几何题按问题类型大致可分为12类,每一类又有相应的规范方法和较灵活的特殊方法,本书将分章介绍它们.读者在读完每章的范例和研究题的基础上应充分理解"解法概述"中的内容.

中学数学的各分支(代数、几何、三角、解析几何)间有一定联系.解几何题除了使用"纯几何"的方法之外,也可以用代数、三角或解析的方法.为配合平面几何的教学与研究,本书在介绍几何题的各种解法时着重介绍"纯几何"的方法.

在不少几何题的证明过程中需要在已知的图形上添加辅助线.辅助线是沟通已知条件和待证结论的桥梁,是使公理、定理能在具体条件下起作用的媒介.添辅助线往往是解某些几何题的关键,也是初学时的难点.常用的辅助线有下列14种.

① 在等腰三角形中,如图1所示,作底边的中线 AD,则有三线合一定理可用;作腰上的高,则有$\triangle BEC \backsim \triangle ADC$,又可写出面积算式.

② 如图2所示,在直角三角形中,作斜边上的中线,则可引用斜边中线定理,产生等腰$\triangle MCB$ 和等腰$\triangle MAC$;作斜边上的高线,则出现相似三角形,可引用射影定理.

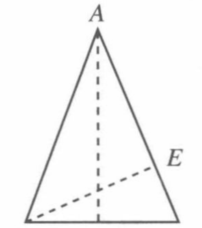


图1

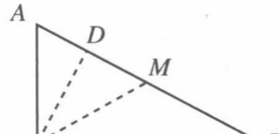


图2

③ 如图 3 所示，在有中线的三角形中，把中线延长一倍，可得到▱$ABDC$；作 $BE /\!/ AM$，交直线 CA 于 E，可引用三角形中位线定理.

④ 如图 4 所示，在有角平分线的三角形中，设 AD 是 $\angle BAC$ 的平分线，作 $CE \perp AD$，交 AB 于 E，或作 $BF \perp AD$，交 AC 的延长线于 F，则可得到等腰$\triangle ACE$ 和等腰$\triangle ABF$，AD 是 CE、BF 的中垂线，在 $\angle C \geqslant \angle B$ 时，$\angle BCE = \frac{1}{2}(\angle C - \angle B)$，$\angle AEC = \frac{1}{2}(\angle C + \angle B)$.

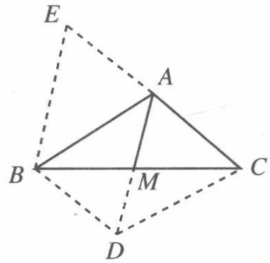


图 3

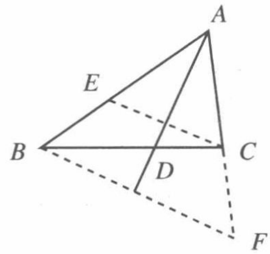


图 4

⑤ 如图 5 所示，在有两条边的中点的三角形中，作中位线 MD，则有 $MD \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} \frac{1}{2}AB$；连中线 AM，则有 $S_{\triangle AMB} = S_{\triangle AMC}$.

⑥ 如图 6 所示，已知 $\angle C = 2\angle B$ 时，延长 BC 到 D，使 $CD = AC$，连 AD，则得到等腰$\triangle ABD$ 和$\triangle CDA$，这两个三角形相似.

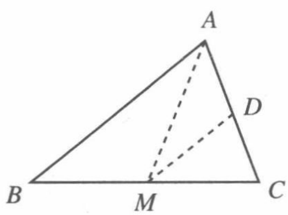


图 5

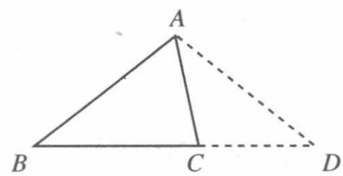


图 6

⑦ 如图 7 所示，在有高线的三角形中，作出另一边上的高 BE，交 AD 于 H，则可利用面积等式 $AD \cdot BC = BE \cdot AC$，又有 D、C、E、H 共圆，H 是垂心.

⑧ 如图 8 所示，已知梯形一腰的中点 M 时，作出中位线 MN，则 $MN = \frac{1}{2}(AB + CD)$，$MN /\!/ AB$；连 AM 并延长，交 DC 的延长线于 E，则有$\triangle AMB \cong \triangle EMC$；连 DM，则有 $S_{\triangle AMD} = S_{\triangle AMB} + S_{\triangle DMC} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$.

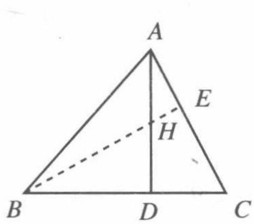


图 7

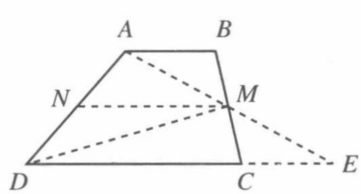


图 8

⑨ 如图 9 所示，在等腰梯形中，作 AM、$BN \perp CD$，则有 $\mathrm{Rt}\triangle AMD \cong \mathrm{Rt}\triangle BNC$，$AM =$

BN；延长 DA、CB 交于 O，则$\triangle ODC$、$\triangle OAB$ 是等腰三角形；作 BE∥对角线 AC，交 DC 的延长线于 E，则得到等腰$\triangle BDE$，又得到▱$ABEC$.

⑩ 如图 10 所示，已知内切圆的三角形，连内心和切点，则 $OD \perp BC$，$OE \perp AC$，$OF \perp AB$，O、D、C、E，O、E、A、F，O、F、B、D 分别共圆；连 OA、OB、OC，则 OA、OB、OC 分别是$\triangle ABC$ 各个内角的平分线；又可引用切线长定理.

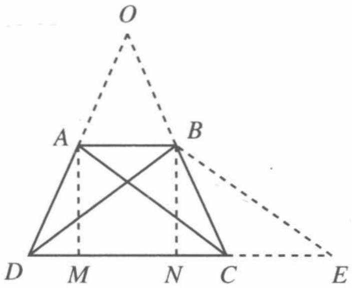


图 9

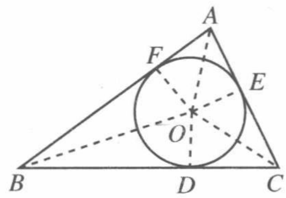


图 10

⑪ 如图 11 所示，在已知外接圆的三角形中，作 $OD \perp BC$，$OE \perp AC$，$OF \perp AB$，则有垂径定理可用；作直径 CM，连 BM，则有$\angle CBM = 90^\circ$，$\angle CMB = \angle A$.

⑫ 如图 12 所示，过直线形图形的交点或顶点，作出已知直线的平行线，例如作 CN、EQ ∥ AB，作 ER、FP ∥ BC，作 FM ∥ AC 等，则可引用平行截比定理和相似三角形.

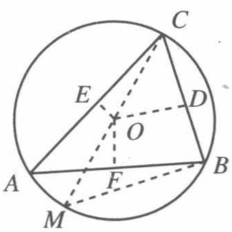


图 11

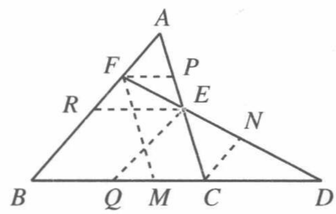


图 12

⑬ 如图 13 所示，两圆相切，作连心线，则 $O_1O_2 = |R_1 \pm R_2|$（外切为 +，内切为 −，这里 R_1、R_2 为两圆半径），O_1O_2 必过切点 C；作公切线，则可引用切线长定理、切割线定理、弦切角定理；连圆心和切点，则有 O_1A ∥ O_2B，$O_1A \perp AB$ 等.

⑭ 如图 14 所示，两圆相交，连公共弦，则连心线 O_1O_2 是公共弦的中垂线.

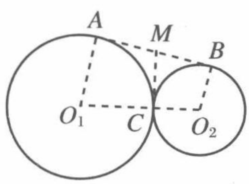


图 13

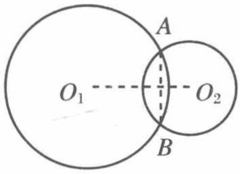


图 14

除这些常用的辅助线外，还有些不常用的辅助线，例如作出辅助圆、辅助角，作出相似图形、位似图形，作出对称图形（中心对称或轴对称），作出特殊图形（例如正三角形）等. 作这些辅助线需要一定的经验，读者可从本书例题中体会. 总之，添辅助线要具体情况具体分析，目的要明确. 一般来说，添加的辅助线的数目要尽量少，但这不是绝对的，有的题目要添七八条辅助线之多. 只要熟悉常用辅助线的添法和目的，多研究、多练习些题目，添辅助线的经验就会逐渐积累起来，解题能力也会逐渐提高.

第1章　线段相等

1.1　解法概述

一、常用的主要定理

(1) 全等三角形的对应边相等.

(2) 线段的垂直平分线上的点到线段两端的距离相等.

(3) 角平分线上的点到角两边的距离相等.

(4) 同一个三角形中,等角对等边.

(5) 在等腰三角形中,底边上的高、顶角的平分线平分底边.

(6) 过三角形一边的中点且平行于另一边的直线平分第三边.

(7) 平行等分线段定理.

(8) 平行四边形对边相等,对角线互相平分;矩形、正方形对角线相等;菱形、正方形四边相等;等腰梯形两腰相等;等腰梯形两对角线相等.

(9) 正多边形各边长相等,半径相等,边心距相等.

(10) 平行线间距离相等.

(11) 直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半;30°角所对的直角边等于斜边的一半.

(12) 同圆或等圆的半径相等.

(13) 同圆或等圆中,等弧对等弦.等弦的弦心距相等;反之,弦心距相等的弦相等.

(14) 垂直于弦的直径平分弦.

(15) 两圆相交,连心线垂直平分公共弦.

(16) 自圆外一点向圆作的两切线长相等.

二、常用的主要方法

简单的题目可直接引用上述定理,但是更多的情况下需要认真分析已知条件,把已知条件改换、集中、深化后才可应用上述定理,主要方法如下.

(1) 平移法:把某线段平行移动到适当位置.

(2) 旋转法:把某线段绕其一端旋转到适当位置.

(3) 等量代换法:找一条线段作为“媒介”,利用相等关系的传递性证明两线段相等.

(4) 添加适当的辅助线.