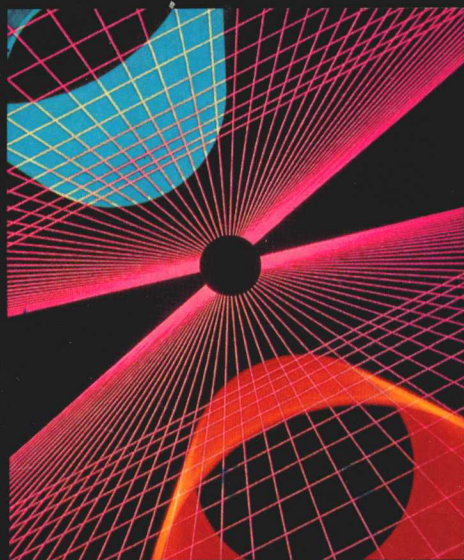


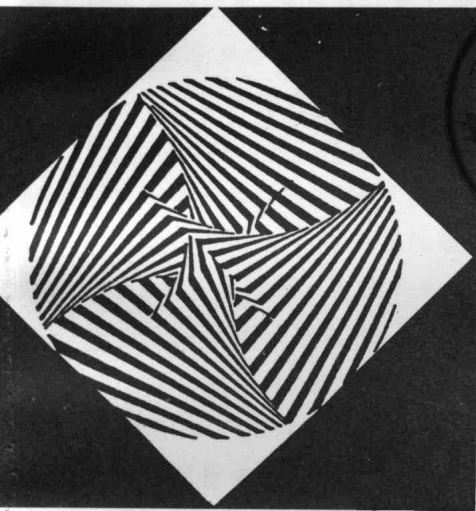
数 学 教 育 研 究 丛 书

# 数学 思维教育论

SHUXUE  
SIWEI  
JIAOYULUN



# SXJY



# 思维教育论

郭思乐 喻纬 著

上海教育出版社

数学教学研究丛书

**数学思维教育论**

郭思乐 喻 纬 著

上海教育出版社出版发行

(上海永福路 123 号)

(邮政编码:200031)

各地新华书店经销 上海市印刷十二厂印刷

开本 850×1156 1/32 印张 4.5 插页 4 字数 101,000

1997 年 2 月第 1 版 1999 年 4 月第 3 次印刷

印数 5171—7190 本

ISBN 7-5320-4879-9/G·4849 定价:(软精)7.20 元

如遇印刷、装订问题,请拨打电话 64688991

或到番禺路 870 号本厂调换

# 目 录

第一章 数学思维教育目的论.....	1
第一节 数学思维教育——面向 21 世纪数学教育的 核心.....	1
第二节 正确认识数学学科的教育价值.....	5
第三节 数学思维的素质教育意义.....	10
第二章 数学家的数学思维论.....	16
第一节 当代数学教育呼唤数学思维研究.....	16
第二节 怎样理解数学.....	23
第三节 数学家解决问题的过程.....	46
第三章 数学思维教育过程论.....	61
第一节 数学思维的一般过程.....	62
第二节 数学思维过程的辩证性.....	67
第三节 个体数学思维过程的不同风格.....	75
第四节 探索性思维的策略.....	89
第四章 数学思维观念论.....	98
第一节 数学观念教育是现代社会提出的要求.....	98
第二节 数学观念教育是提高数学教学水平的新的 动力.....	103
第五章 数学思维教学论.....	107
第一节 创造性思维的启迪式教育.....	107
第二节 数学思维能力培养的若干引导.....	114
参考书目.....	132

# 第一章 数学思维教育目的论

## 第一节 数学思维教育——面向 21 世纪 数学教育的核心

市场经济的大潮正激荡着我们古老的中华大地，也在呼唤着学校教育改革。数学作为教育学科的一部分，它承担着给人一定的数学知识的任务，同时给人以数学思维素养。所以，长期以来数学被称为思想的体操，似乎是没有什疑义的。然而也有一种见解认为：当今世界上市场激励着竞争，竞争就必须学会现实的数学，而要学习现实的数学，则必须捐弃数学的一些传统的特色，如抽象性、严密性、系统性等等。在这种情况下，数学是否还是思维的体操呢？于是我们要重新来检视数学思维教育的意义，以历史的深邃的眼光，去审视在数学教学改革的巨大变革中，数学思维教育的一些基本原则是否具有不变性。

随着 21 世纪的到来，人类正在实现从工业社会到信息社会的转变。当代数学教育的根本出发点，正是适应信息社会的需求。

在信息社会中，大多数人将从事信息的管理和生产工作；工业生产将逐步从大批量、少品种的刚性系统过渡到中小批量、多品种的柔性系统；由于知识的不断更新，技术的不断进步，产品日益复杂精巧，而其市场则日益短暂。旧的产品尚未销售完毕，新的产品便已设计出来并投入生产。相应地，人们的职业寿命变得短促，工作和学习将会交替地进行。21 世纪的世界，将是用体力较少而用脑力较多，用机械较少而用电子较多，静态较少而变化较多的社

会，要求工作人员在智力上能适应工作，随时准备吸收新思想，感知事物的来龙去脉，适应变革，解决非传统式的问题。正是这种要求使得数学成为很多行业必备的知识。正如美国数学教育界的文件《人人有份》中指出的：“从来没有像现在这样，美国人需要为生存而思考，从来没有像现在这样，他们需要数学式的思维。”

经济发达国家的数学教育改革的方向是：

学校数学的焦点从双重任务——对大多数人教最少的数学，而把高等数学教给少数人——过渡到单一中心，把数学的最重要的公共核心教给所有的学生。

数学教学从基于传递知识的权威性的模式过渡到以启发学习为特征的、以学生为中心的实践活动。

数学教学从强调为后续内容作准备过渡到着重强调学生当前及未来所需要的东西。

数学教学从原来强调一张纸、一支笔式的计算到全面使用计算器和计算机。

我们分析经济发达国家所遇到的数学教育改革的要求，可以清楚地看到 21 世纪的趋向。事实上，所谓要给学生公共的材料，要使学生能适应职业周期缩短、节奏加快、竞争激烈的现代社会，使数学成为整个人生发展的有用工具。这意味着数学教育需要培养人的更内在的、更深刻的东西，这就是数学素质。社会的发展并没有否定我们原来已经意识到的数学教学的改革方向，而是更加肯定：中小学数学教学不仅仅是为了教学所需的知识，更是为了未来的发展。中小学数学中蕴藏着促进人未来发展的因素，这就是上面所说的人的数学素质，其核心是人的思维品质。就社会发展而言，教育在社会发展的平缓时期，重在传授知识；而在社会的突变时期，则需要培养创造性。

这里，所谓素质是指人改造主观世界和客观世界的基本品质。

一般说来,素质是对于人的后继活动来说的。在他各种各样的品格中,是原本的、基本的、内在的品格,而不是那种派生的、后发的、外部的品格。素质在人的后继活动中呈现的功能是整体的、广泛的、长期的,而不是仅仅服务于局部的、单一的、短期的。数学课培养的人的素质,也有着上述特点。借助于这些特点,我们不难把素质和人的一般的品格区分开来。

事实上,我们在教学实践中早就存在素质教育的问题。一位著名的数学特级教师曾总结过他的一段教学经历:他在早期的教学中是贯彻原苏联凯洛夫(Каиров, И. А.)的 5 个环节教学法。后来,他想仅仅复习旧课转入新课还是不够的,还必须把解法产生的过程告诉学生。于是他在课堂上给学生讲解了分析链。有一次,他上完课后,一位学生对他说:“我在家里也按老师讲的方法去想,但线索很快就断了,分析不下去了,而老师却在课堂上一下子找到了分析线索,这是什么原因呢?”老师答:“原因很简单,我在家里是备了课的。老师在寻找这个解答时也同样碰到了许多弯路,只不过没有在课堂上把它反映出来而已。如果说,老师有比你们学生强的地方,那就是老师容易看出哪些可能是弯路,哪些可能会成功,因而弯路走得少一些,成功的可能性大一些罢了。”这时,学生听了很兴奋,说:“老师,今后在课堂上你就讲这一点:怎样才能找到正确的思路。”学生的话使老师恍然大悟:原来教学的重点在这里!这位教师的教学经历了 3 个层次:展现解法,展现思路,展现思路的寻找过程。而当一个人能在新的环境之中,在数学观念的指引之下,具有对成功和弯路的敏感,这就等于找到了各种各样的分析链和各种各样解法的源泉。这就是说,第三个层次所需要的和所能培养的人的品质,较之上述第一、第二个层次要深刻得多。同时,这种品质,对学生将来的继续学习和参与社会生产活动,具有原本的、基础的、广泛的、长期的作用。在教学实践中,我们往往容易用

非素质教育的内容去取代素质教育的内容。所以,明确数学教育的目的对提高数学教育的效益是十分重要的。

为什么要学习数学?对这个问题,有的人说,那完全是因为“数学是生活和斗争的工具”。那么,我们周围的中学毕业生,除少数人将来成为科技工作者或数学工作者外,许多人都无需直接用到稍深的数学知识,为什么还要他们不辞劳苦地学习12年的中小学数学呢?如果仅仅解释为数学很美,那么世间上美好的事物比比皆是,未必一定要学习数学;如果仅仅解释为数学可以使思想合乎逻辑,那么大部分没有学过逻辑规则的人也可以通过生活去学习它。比如,在西方国家里,资本家对工人说,干得不好就会“炒鱿鱼”(解雇),工人都很明白,这决不是说,干得好就不会挨“炒”。

数学教育的意义在于用学科自身的品质,陶冶人,启迪人,充实人,促使人的素质的全面发展。数学教育是一种文化,使人得到数学方面的修养,更好地理解、领略现代社会的文明;它是一种方法论,使人善于处世和做事,能提高在现代化建设中的工作效率;它是一种精神和态度,使人实事求是,锲而不舍,坚持不懈地追求真理;它是“思维的体操”,使人思维敏锐,表述清楚。一个人学习了数学可以得到自身品质的提高;广大青少年学习了数学可以使整个民族的素质得到提高。因之,数学教学与人的素质发展相结合,是数学教育的最主要的宗旨。<sup>[1]</sup>

数学教育作为一种文化来提出,思维能力的发展是至关重要的。思维是一个健全人的需要,甚至可以说是人存在的标志。它同时又是获得理念享受的一个重要原因。现代社会使人对生活质量的要求更高了。而高质量生活的一个重要内涵,是人能更科学地、更健康地思维,特别是人必须有很强的创造性。这种创造性不仅是为了发明或发现什么,还在于要使人更好地适应竞争和发展的时代,更有创意地生活。创造力的培养是多方面的。数学给人一

种正确的科学的创造思维的示范。其原因是数学因其处理对象的抽象性，而为自己立下了最高的心智标准——逻辑标准。人们为了寻找数学模型和运用数学模型，展开了有创造性的、辩证的思维。这些与数学的严格逻辑思维一起，成为基础教育中一种必须而可能的训练项目。也就是说，数学思维教育是培养健全的现代人的需要。

无论对现代社会还是对现代人而言，都要求提高人的素质。21世纪，世界经济的发展只会使这种趋势增强而不会削弱。数学的主要的特性——抽象性、严密性、系统性，将更好地为人类服务。它使人们更好地对复杂多变的客观世界进行抽象概括，从而揭示新规律和提出新结论，更好地驾驭客观世界。

## 第二节 正确认识数学学科的教育价值

在信息社会中，产品、商品更新换代的速度越来越快，花色品种越来越多，新生事物、新的思想层出不穷，要求人们的从业思想和从业工艺不断吐故纳新。充满新事物、新思想的世界要求人们善于判断、善于选择，通过自己的独立思考，去定出判断与选择的标准。人们还要善于分析种种变化，发现他人成功的原因，从而提高自己的预测能力，实现创新。信息社会就是这样对社会成员提出了越来越高的要求。

数学教育在帮助人们适应信息社会的需求方面，到底能起多大的作用呢？在我们探讨信息社会中数学教育的作用时，首先应当建立正确的数学教育的价值观。

起先，数学提供给人们以数学知识；接着，人类又发现了数学教学的其他意义，数学学科的作用才丰富起来。数学为什么能够数千年来历久不衰，这不仅仅是由于它的知识本身，而是由于它的综

合功能。

像食用一种食品，我们如果知道了它所含的维生素或其他的营养物质，在使用它时就会恰到好处。我们研究数学教育在培养人的素质中的作用时，先要了解其学科的特点，才能把握其功能的产生机制。数学首先是一门基础的工具学科，然而对广大的未来公民来说，数学作为工具时所表现出来的抽象性、逻辑性和系统性的特点，使得数学深刻地、准确地把握数量关系，揭示规律。

数学的抽象，是指数学抛弃了同它的研究对象（一般来说指空间形式和数量关系）无关的非本质因素，而摄取同研究对象有关的本质因素。例如，数学研究的直线，是一种理想化了的直线，它没有粗细、颜色，也没有具体的长短——也就是说，连长短这样一个同生活中的直线相联系的性质都舍弃了。又如，三角形和圆，对于拓扑学来说是没有什么区别的，这种情形如同电工在检验导线的导通性时的想法是一致的。一个人若要解决最简单的数学问题，也必须进行数学的抽象。譬如说，我们要列方程解应用题，就先要把应用题所表达的语言信息转化为数学符号的信息。其中转化的中介环节就是对所论事物的第一步抽象。例如，

把 35% 和 60% 两种浓度的酒精溶液配制成 50% 的酒精溶液 150 千克，需各取多少？

第一步思考是：混合前的纯酒精量 = 混合后的纯酒精量。

这时，不问物质的浓度，不问已知还是未知条件，概括性地给学生以显而易见的等量关系。进而，把它具体化：

含量 35% 的酒精溶液含的纯酒精量 + 含量 60% 酒精溶液含的纯酒精量 = 含量 50% 的酒精溶液的纯酒精量。

进一步，

$35\% \cdot \text{酒精 1 的质量} + 60\% \cdot \text{酒精 2 的质量} = 50\% \cdot \text{酒精 3 的质量}$ 。

这时,想到其中哪些是已知的,哪些是未知的. 由于上式未知数有 2 个,而方程只有一个,注意到另一个概括的关系:

酒精 1 的质量 + 酒精 2 的质量 = 酒精 3 的质量.

.....

在数学教学中,这种概括活动是经常出现的. 最典型的是在数学计算中括号的应用: 每一个括号都是一次概括. 它要求人们把括号中的式看成一个数. 学生仅仅会添括号还是不够的,他还应当善于把整个括号看作一个数. 这样,他就能在概括条件下清晰地思考问题了. 由此看来,即便在一个简单的算式中,解题者也要进行若干次性质不同的概括活动,一种是数量的概括,而另一种是模式的概括.

数学给予人的抽象概括能力,不仅可以使之有条理地在简约状态下进行思考,而且抽象概括本身就有发现真理的功能. 这是数学给人的思维素养的最重要的部分. 例如,牛顿(Newton, I.)发现万有引力的那个苹果,在他看来,就不仅仅是一个具体的苹果,能把苹果下落从具体上升到抽象,从而发现新的规律,这就是牛顿区别于千千万万看到过苹果下落的凡夫俗子的地方. 这样,如果注意到数学天天都教给学生以抽象,我们就会为之激动. 因为我们看到了数学是如何作为智力教育的有效工具的.

数学的逻辑严密性带来了精确性. 数学是研究纯粹的量的关系和空间形式的一门科学. 数学上的概念是明确定义的. 它的理论是按照严格的逻辑法则推得的. 这种推理对每个懂得它的人来说都是无可争辩和确信无疑的. 所以,数学结论具有逻辑的必然性,在满足了存在性定理之后,还具有量的精确性. 爱因斯坦(Einstein, A.)曾这样描述数学:“为什么数学比其他的一切科学受到尊重,一个理由是,它的命题是绝对可靠的和无可争辩的,而其他一切科学的命题在某种程度上都是可争辩的,并且经常处于

被新发现的事实推翻的危险之中。数学给予精密的自然科学以某种程度的可靠性，没有数学，这些科学是达不到这种可靠性的。”

数学的这种逻辑严密性首先给学生以严密思维的熏陶。学生在学习数学的过程中树立了推理的意识。他们从数学中看到了许多差之毫厘、失之千里的事实。例如，某些问题的初始条件略加改变，往往引起结论的巨大变化。看到了感觉的局限性，因而深切地感受到进行理论论证的必要性。这种理论论证的意识在学习了平面几何的初二学生中开始表现出来。他们开始打破沙锅问到底，对许多事情都要问一个为什么。这其实是尊重严密性的意识的表现。而一个人的思维缜密，对于他的未来生活会带来多大的好处，是可想而知的。著名数学家阿·雅·辛钦（Хинчин, А. Я.）对此有一段生动的描写：“中学生首次在自己的生活中遇到论证的严格要求，它使之惊奇，使之敬而远之，使之害怕。但这一对学生似乎是不必要的、超过限度的苛刻要求，他们很快就适应了……他们感受到，正是论证的完备性才是他们在论辩中致胜的武器，于是他们努力想要掌握这一武器，使自己时刻地备有它。当然，不仅在数学中，而且在任何其他的场合的讨论中，他都会越来越多地、越来越经常地努力进行完备的论证。”（《提高数学课教养的效率》）也许对于数学教师来说，值得注意的是如何达到严密的方法，然而对于普通教育的目的来说，更重要的在于数学的严密性为学习者树立了一种崇高的心智标准——逻辑论证。它将被学生们用来检查自己原有的思想，使原有思想形成一种新的结构，变得合乎逻辑。我们在一次教学试验中发现，一些高二学生对某参考资料的一个证明中出现的下列字句并不接受：

“显然， $6^p \neq 7^q$ （其中  $p, q$  为互质的正整数）”。尽管书上说的是“显然”，而且从奇偶性也就可以认为证明已被通过。然而他们总感到似乎还有破绽——如果一个自然数的质因数分解式不唯

一,那么证明就失去了根据。直言之,固然偶数可以分解出质因数2,但是如果它的分解式不唯一的话,那么是否可以分解出不含2的质因数分解式呢。如果可以,我们的论证也就会垮下来。于是问题归结为“素因子唯一分解定理”。当然,也许我们的学生并不会想到这一步,然而他们却可以对原来的论证产生不满足感。这种不满足感对一个人发现问题和解决问题是十分可贵的。它使得一个人有对思维不正确的敏感,从而也就保证了他能够正确思维。当然,总是正确思维的人能够成为人群中的卓越者,而数学学习就为其铺设了这样的前景。

数学的另一个特征是它的系统性。数学的各个分支都具有系统性。这个系统是依靠原名、公理和逻辑规则来联结的,其建构称为公理化。公理化发展的实质是从一些不定义的术语出发,这些术语的性质是用公理规定的,目标是导出这些公理的结论。每个系统的公理必须满足独立性、相容性、完备性等结构的规定性。希尔伯特(Hilbert, D.)认为,能够成为数学思考对象的任何事物,在一个理论的建立一旦成熟时,就开始服从公理化方法,从而进入了数学。通过突进到公理的更深的层次……我们能够获得科学思维的更深入的洞察力,并弄清楚知识的统一性。特别是,得力于公理化方法,数学似乎就被请来在一切科学中起主导作用。<sup>[2]</sup>数学的系统性,在科学的进步中起了很好的作用。人类科学在16、17世纪得到较大发展,同自然结构观的出现是分不开的。而数学作为自然结构观的模型和典范,大大地促进了科学的进步。数学的结构是科学整理中的完美的模型。它拒绝烦琐,以简驭繁,注重逻辑联系,尽可能地揭示最本质、最能支配事物的全局的基本理论。这同人类思维的简约有效的要求是十分一致的,并被实践证明是一种发现真理的方式。在历史上,数学先期于其他学科,得助于系统化而发展起来。在数学结构思想的影响下,自然科学和社会科学

都类似地努力形成自己的以基本原理为基础的体系或结构，把学科知识整理得又透彻又简约，并由于借此发现了基本原理和普遍性理论而引起了革命性变化。例如，在物理、化学中出现的各种定律、理论力学、元素周期表等。事实上，我们在数学教学中强调基本知识和基本概念，不仅出于教育技术上的考虑，更重要的是体现数学结构的基本精神。也就是说，我们的学生在数学学习中将会受到数学的结构观的熏陶，从而逐步地变得善于科学地整理自己的思想。

以上这些，说明数学对于人类健康的、敏锐的思维，的确有很大的贡献。犹如历史可以鉴古今、音乐可以悦耳、美术可以悦目一样，数学也是人类文化的组成部分，而且由于它给人类以理念的享受，在文化中更占有突出的地位。

### 第三节 数学思维的素质教育意义

如上所述，信息社会对数学教育的要求更深刻了。我们为什么要教学生思维？传统的、不成文的回答是，我们需要解决教科书或复习资料中的那些难题，以便应付考试。这是一种非常现实的回答。这种回答的好处，看得见、摸得着，有着很强的可操作性。但是由上所述，我们认识到事情不止于此。数学思维教育应是学校对人的教育工程的一个重要的组成部分。它像各门学科和学校的其他活动一样，培养着未来的人的素质。因此，我们需要说明数学对培养人的思维素质的意义。换句话说，我们必须把数学思维教育的目的从单纯的应试目的转变到素质教育上来。

数学思维教育的意义，不仅仅是为了培养数学家，而是为所有人的未来发展打下基础。在于培养人的数感、数学观念和数学思想。概括地说，数学教育是为了扩展人们头脑中的数学空间。每

个人都有隶属于自己的数学空间和一般生活空间。数学空间是对他生活空间的数学方面的抽象,是指反映他生活、思考着的特定客观世界的数学概念、运算规律和数学知识结构。数学空间是因人而异的、特定的。我们把一个人所已经具有的数学空间,称为他的数学现实空间,而把他所能具有的数学空间,称为他的数学的可能性空间。不难理解,对于普通教育来说,学生所学的数学,应是与大多数人有关的数学现实材料,也就是在实际中能够应用的数学。然而,人们往往把数学空间看得太小了。事实上,可能的数学空间比我们想象的要大得多,问题是我們有没有使学生对所学的数学知识有所领悟。例如,我们如果领悟到矩阵原来是一张表,矩阵的运算不过是对表的运算的一种规定,学生就有可能去创造他所需要的运算。所以,这里的领悟就成为扩展数学空间的手段。一节课能使学生有所领悟,就意味着有可能发展他的数学空间。衡量数学教学好坏的标准之一,就是看教学能否有效地扩大人的现实数学空间。数学空间不仅仅依靠一些既得的知识而构成,更重要的是借助于所学知识的生长点和开放面,以及数学思维过程,获得一种与数学相关的能力,从而使数学空间具有某种开放性,其中包括:数学化——人们用数学方法观察现实世界,分析研究各种数学现象,并对现实世界加以整理组织的过程。我们学习数学,最重要的是学习数学化。同样地,我们学习公理的知识,还不如说是学习“公理化”;与其说是学习形式体系,还不如说是学习“形式化”。每个学生都可能在一定的指导下,通过自己的实践来获得这些知识。

数学教育家辛钦对数学教育给人的数学空间的扩展有独到的见解。他认为,一个人学习了数学,长时间地受到数学的熏陶,就必然会培养起学习的意志。这是因为,数学是一门以论证方式建立的学科,要实现逻辑论证,必须经过不懈的努力。学习数学的那种精神,对所有的学习者都是有益的。我们在数学教学中常常看

到学生在对材料产生兴趣时的意志特征。如许多学生虽然知道用圆规和直尺三等分一角是不可能的，但他们还要亲自试一试，摸清不可能的原因。同时，他们将被培养起对空间和数量关系的敏感。由于各行各业的各种事物都存在一定的空间形式和数量关系，所以这种敏感已经不仅局限于数学思维品质，而是一种社会行为品质了。其表现形式是，努力使外界现象数学化，注意现象的数学方面，到处注意空间和数量关系以及函数依存关系。前苏联克鲁捷茨基(Крутецкий, В. А.)在对大量儿童的观察中发现，“这些儿童的大多数人的特点(虽然在程度上有所不同)是，倾向于从逻辑和数学范畴的角度去解释外界现象，……在感知某一活动中的大量现象时识别数学的那一方面”。例如，在记忆诗歌时，他们明显地试图摸索一首诗的逻辑性和词序。他们能够很好地记住诗的内容。但在背诵诗歌时，他们经常改变词序，而且用逻辑方式把诗重新组织一遍。前苏联学者夏皮罗观察到，一个数学学习优秀者 M，对他来说一切都带有数学色彩，他不喜欢化学，“因为化学不落实到比例”，当我们开始做有关热平衡方程的题目和力学题目时，物理学引起了他的兴趣。M 在学习语言理论的数学处理时，对语法着了迷(在此之前他对语法从来不感兴趣)，原因是他对语法研究中的字母出现的频率很感兴趣，他不仅由此发现了一些语法规律，而且为自己在方法论上的发现产生成就感。有一次，他读到一篇研究每一个字母出现次数的文章，他立即去检验其中的命题，并得出了这个命题是正确无误的判断。数学学习使人产生“数学感”，从而大大地扩展了他们的数学空间。<sup>[3]</sup>

此外，数学还给了学生以积极的、寻找共同特征和规律的意识，就是对一定范围内的事物概括其特征或对一定阶段的事物变化寻找规律。数学培养了人的概括能力。受到这方面熏陶的学生，在实际生活中总是积极地进行概括，努力发现周围世界的大大

小小的规律,成为工作中新计划、新思想、新建议的提出者。这时,他的建议似乎同数学无关,然而,他能这样地积极和善于概括,实在是得益于长期的数学思维。

数学思维教育的意义,还在于培养人本质地看问题的意识。“抽象几乎是数学的同义语”。抽象是从一定的角度把事物的相关的质提取出来。通过数学学习可以有效地培养人的抽象意识。学生走上社会后,经常要碰到生活和生产中许多复杂的问题,他必须能够透过现象看本质,不为表面现象所迷惑,这就需要抽象意识。例如,一个人不仅在科学研究或抽象思维中需要抽象,而且甚至在形象思维和艺术创作中也需要抽象。一个善于作画的人,他的画不是照搬生活中的景象,而是对之进行了抽象。他从“最能打动自己和观众”的角度,把对象的某种美抽象出来。例如,画高山注意了雄伟之美;画花鸟,注意了秀丽之美;……这样,他就以这一抽象物为尺子,去更深刻地认识自然,刻划自然,决定取舍和详略,去掉芜杂的东西,强调本质的东西(当然,并非像数学上的要或不要的二值逻辑,而是有多变化、多层次的中间状态的适度抽象),从而达到了寓神于形,形神兼备,同观众观赏该事物时的抽象发生了共鸣,赢得读者的会心的赞美。

数学思维教育的意义,更在于培养了人的良好的思维习惯,形成良好的思维策略,增强人的反应能力。每一道数学题都为学生提供了一个思维项目,学生千百次地受到了训练,就会形成好的思维习惯。心理学家曾经观察过许多通过大量思维训练而获得所谓简缩思维的例子。简缩思维者对外来刺激有一种特别敏捷的反应,他们对有些事物简直是用不着思考,就提出了解决的办法。尤其是,数学的论证特征使人凡事都要问一个“为什么”,要通过更为确定的基础知识去认识新的还有某些未知因素的事物。而这正是一个人的科学思维的入门的特征。笛卡儿(Descartes, R.)在他的《方