“十三五”国家重点图书出版规划项目

绿色金融与低碳发展丛书

The Mathematical Method of Green Finance

绿色金融数学方法

马晓明　田聿申　/著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

绿色金融数学方法/马晓明,田聿申著. —北京：北京大学出版社，2019.2
（绿色金融与低碳发展丛书）
ISBN 978-7-301-30416-7

Ⅰ. ①绿… Ⅱ. ①马… ②田… Ⅲ. ①金融业－绿色经济－经济数学
Ⅳ. ①F83

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 054245 号

书　　名	绿色金融数学方法 LÜSE JINRONG SHUXUE FANGFA
著作责任者	马晓明　田聿申　著
责任编辑	王树通
标准书号	ISBN 978-7-301-30416-7
出版发行	北京大学出版社
地　　址	北京市海淀区成府路 205 号　100871
网　　址	http://www.pup.cn　新浪官方微博：@北京大学出版社
电子信箱	zpup@pup.cn
电　　话	邮购部 010-62752015　发行部 010-62750672　编辑部 010-62764976
印 刷 者	三河市北燕印装有限公司
经 销 者	新华书店
	650 毫米×980 毫米　16 开本　9.5 印张　160 千字
	2019 年 2 月第 1 版　2019 年 2 月第 1 次印刷
定　　价	49.00 元

致　谢

本套丛书在资料收集、数据分析、模型建立、软件开发、案例剖析、出版发行等方面得到了深圳市发展和改革委员会“新能源金融与环境金融”学科建设项目的资助，深表感谢。

内容简介

绿色发展已日益成为经济与社会转型的重要理念。在追求绿色发展的过程中，金融作为重要支撑，其产品在广度、深度方面不断延拓与推进。2018年9月5日，《中国绿色金融发展报告(2017)》发布并指出，中国将继续履行应对气候变化和治理环境污染的大国责任，坚定不移地走绿色发展道路，大力推动绿色金融发展、持续完善绿色金融体系。

受制于多方面因素，目前绿色金融市场整体的效率仍有待提升。而发展已久的金融数学方法在产品设计、风险评估、投资分析等方面的应用则表明，其在这片新兴领域可大有作为。由此，绿色金融数学应运而生，它主要运用现代数学理论与方法对绿色金融市场的均衡与有价证券定价等进行分析研究，对含不确定性条件的投资策略进行评估和风险管理。

目光所至处，金融数学方法与绿色金融的碰撞，已成为探究绿色金融市场发展的重要方向。本书在总结目前高校金融数学主要课程和学术界主要研究成果的基础上，加入了自己的理解：引入随机游走模型对资产收益率预测提供理论支撑后，依据金融产品种类差异，对资本资产的定价和风险进行区分研究。内容涵盖了随机游走模型、资本资产定价模型、多因素定价模型、固定收益资产模型、无套利模型、利率市场模型、伊藤引理与B-S模型、衍生品定价模型和对冲模型。

本书可作为研究生探寻绿色金融数学理论与方法的指引，也可供其他相关研究人员参考，对于书中的疏漏之处，恳望读者指正。

绿色金融与低碳发展丛书

编 委 会

丛书总序

1979年，我国改革开放的总设计师邓小平创造性地提出建立经济特区。从那时始，深圳一直在高速发展，如今已从一个落后的边陲小县一跃成为一座美丽的现代化城市。深圳市综合实力已位居国内大城市前列。2017年深圳市国内生产总值(GDP)达到22 286亿元，在中国城市中排名第三，仅列上海、北京之后；城市单位面积GDP、人均GDP更是长期位居中国600多个城市之首。更值得骄傲的是，近年来，深圳市高度重视生态文明建设，低碳经济发展已走在全国前列，在多项经济指标持续上行的同时，实现了资源消耗没有同步增长、环境质量不断得到改善的目标。深圳市获得联合国工业发展组织发起的2018年度全球绿色低碳领域先锋城市蓝天奖。

回顾过去的骄人成绩，深圳有很多经验值得总结。深圳通过建立优胜劣汰、公平竞争的市场机制，通过旨在提供高质量服务的政府体制创新，为深圳市高科技产业快速崛起、经济持续增长提供了制度保障。深圳市通过推动技术创新、市场创新，加大节能减排力度，淘汰落后污染企业和产能，促进一批战略性新兴产业迅速发展起来，构建起具有竞争力、绿色的现代产业体系。至今，深圳市产业结构调整优化取得显著成效，战略性新兴产业占GDP的比重已超过了40%；服务业占比已超过60%。深圳市通过推动建筑节能、绿色建筑与绿色建造、绿色建筑材料的推广与使用，大力推进公共建筑节能改造，在建筑节能方面取得明显成效；通过政策激励、市场创新、交通管理等手段，深圳的新能源汽车突破8万辆，使用量居全国城市前列，黄标车被全面限行；2018年深圳实现了公交车、出租车百分之百纯电动化，绿色出行已蔚然成风。在城市绿色低碳制度保障方面，深圳市率先开展了低碳立法工作，启动了中国首个碳交易市场，目前已将800多家重点工业企业纳入碳交易体系，覆盖了公共交通、能源生产和制造业。深圳市率先在国际低碳城市开展近零排放区示范工程建设，新建建筑沿用传统岭南建筑中低成本通风、隔热、遮阳节能技术，采用适应深圳本地气候条件的平面形式及总体布局，充分利用太阳能和风能，

实现了资源可再生利用。

一个城市的绿色发展需要政策、经济、科技等多方面要素的支撑，因此，对深圳市绿色发展的亮丽成绩也应该予以全方位系统解读。由于组织写作时间较为仓促，本人学科覆盖面不敷，丛书目前仅对深圳市低碳发展路径、新能源汽车推广利用创新模式、绿色金融等进行了梳理，尚未做到对深圳市低碳发展经验全面、系统的总结。鉴于此，本套丛书作者在希望丛书能对深圳市和全国低碳发展工作提供借鉴参考的同时，更期盼专家学者们能进一步分析、研究，以使对深圳市低碳发展经验的总结更深入、系统、全面，对中国低碳发展做出更大贡献。

北京大学深圳研究生院环境与能源学院是中国最早设立环境金融专业、最早招收环境金融研究生的单位(2010 年)。在设立专业、招生伊始就将绿色金融和低碳发展作为重要研究领域。经过近十年的耕耘，也取得了一些成绩。本套丛书纳入了学院在绿色投资、绿色投入产出等方面的研究项目，希望能对相关研究、政策制定、研究生教学等提供参考。

本套丛书写作过程中得到了包括编委会成员在内的很多领导、专家的大力支持与专业指导，在此表示真诚感谢。环境金融方向的博士、硕士研究生田聿申、熊思琴、胡广晓、周雅宁、张启航、金竹欣、白波、汤骅、邹姊鉴、胡庆辉、黄蕾、郭力瑕、杨博、孙魏、罗黎、姚佳、严俊杰、倪效龙等同学参与了资料收集、数据处理、模型分析等工作。对大家的辛勤努力和贡献，表示衷心感谢。

马晓明

2018 年 11 月 26 日于南国燕园

目　　录

第一章
资产收益率预测的基本统计模型：随机游走

金融市场中，计量经济学最古老、讨论最持久的一个问题就是金融资产的价格是否可以被预测。这一问题充满了挑战性，它在历史上吸引了大量数学家、金融学家。而研究如何规避市场风险，又是当代金融学中一个十分重要的内容。这使得金融资产特别是新兴的绿色金融产品的价格预测在当今依然是人们争相讨论的话题。

在本章，我们将仅根据金融资产的历史价格变化来构造我们的预测模型。虽然这种方法会有一定的局限性——毕竟，每一个投资者在投资时都会受其他外界信息的影响——然而从计量经济学角度看，即便是深入剖析这样一个很简单的问题也是有意义的，它使我们可以加深对资产价格走势的理解。

本章首先介绍随机游走的含义及其表现形式；然后分别介绍每一种随机游走及其常用的检验方式；最后，针对中国股票市场上证指数的分析，提供一些较为容易上手的随机游走检验程序及操作，以供读者学习时参考。

1.1 随机游走概述

1.1.1 有效市场假说

在研究金融市场中资产价格的可预测性之前，首先要了解有效市场假说的概念。

最早研究有效市场假说(Efficient Markets Hypothesis，EMH)的是一位名叫路易斯·巴舍利耶(Louis Bachelier)的法国数学家，他在1900年写了一篇题为《投机理论》的论文。他在论文中指出，如果价格变动将价格参与者的所有期望和信息全部结合在一起，那么价格变动就是无法预测的，这样的市场就是信息有效的市场。1970年，美国经济学家法玛(Eugene F. Fama)总结了这一观点。他提出“在一个市场上，如果价格总是‘完全反映’所有信息，那么这个市场就是有效率的。”1992年，美国经济学家麦克基尔(Burton Malkiel)对“完全反映”一词给出了更确切的标准：检验市场效率可以通过向市场参与者提供信息，并对资产价格的反映进行度量。如果在信息披露之后，市场上的资产价格没有变化，那么针对所披露的信息而言，这个市场就是有效率的。

我们根据罗伯特(Harry V. Roberts)在1967年提出的传统信息分类法，对市场进行了划分，由此得出以下三种有效市场假说及其各自的推论：

(1) 弱式有效市场假说

弱式有效市场假说(Weak-Form Market Efficiency)认为，所有过去历史的证券价格信息已在市场价格中充分反映，包括股票的成交价、成交量、卖空金额、融资金额等。

推论：如果弱式有效市场假说成立，则股票价格的技术分析将不再有效，但投资者仍可以通过基本分析来获得超额利润。

(2) 半强式有效市场假说

半强式有效市场假说(Semi-Strong-Form Market Efficiency)认为，所有已公开的有关公司营运前景的信息已在价格中充分反映。这些信息包括：成交价、成交量、盈利资料、盈利预测值、公司管理状况及其他公开披露的财务信息等。一旦投资者迅速获得这些信息，股价也会相应作出迅速反应。

推论：如果半强式有效市场假说成立，在市场中利用基本面分析将

不再有效，但投资者可以通过内幕消息来获得超额利润。

（3）强式有效市场假说

强式有效市场假说（Strong-Form Market Efficiency）认为，所有关于公司营运的信息已在价格中充分反映，这些信息包括已公开的或内部未公开的信息。

推论：如果强式有效市场假说成立，在该市场中，任何投资者都不能获得超额利润，包括基金和有内幕消息者。

根据有效市场假说我们可以进一步推断，如果一个绿色金融市场是完全有效的，那么我们就无法预测这个市场中绿色金融资产的价格。因此我们在做绿色金融资产价格的预测之前，第一步要检验这个资产所在的市场是否是有效的。而随机游走假设检验，则是一种行之有效的方法。换句话说，随机游走假设检验，就是在判断绿色金融资产价格的未来变化是否能用历史价格的变化进行预测。如果一项绿色金融资产的价格变化符合随机游走，那么我们就不能用历史价格的变化来预测这项绿色金融资产未来的价格变化。

1.1.2　随机游走及其分类

在上一小节我们提到，用绿色金融资产的历史价格来预测其未来价格首先要进行随机游走假设检验。那么，什么是随机游走呢？通常来说，对于一个研究对象，如果基于它过去的表现，我们无法判断它未来的发展方向，那么我们就称这个研究对象的运动规律是随机游走（Random Walk）。随机游走就是布朗运动的理想数学状态。

为了用一个统一的形式描述随机游走所有类型的特征，我们可以从两个时间点 t 和 $t+k$ 的资产回报 rt 和 $rt+k$ 间的相关性来对随机游走分类。假设有两个任意的函数 $f(x)$ 和 $g(x)$，如果对所有的 t 以及 $k\neq0$，有

$$\mathrm{Cov}(f(rt),g(rt+k))=0 \tag{1-1}$$

那么所有形式的随机游走都符合公式(1-1)，只要选择适当的 $f(x)$ 和 $g(x)$，再加上一些特定的限定条件，就可以对它们进行分类。例如，如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均为任意的线性函数，则随机游走模型即为本章 1.4 节提到的随机游走模型 3。如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均为除线性函数以外的其他函数时，则与本章 1.2 与 1.3 节提到的随机游走模型 1 和 2 具有类似的特征。

如果只限定 $g(x)$ 是线性的，而 $f(x)$ 是除线性以外的其他函数，则模型和鞅假设是等价的。鞅假设并不是本章所讲解的重点，因此不在此展开讲解。简单来说，鞅假设就意味着以下事实：未来绿色金融资产价格

上升与下降的概率是相等的。或者说,明天的资产期望价格“最好的”预测值,就等于今天的资产价格。

1.2 随机游走模型 1 及其假设检验

1.2.1 随机游走模型 1

前一节简单提到了随机游走模型 1 的特征,本节将介绍限定最多、计算最易的随机游走模型 1。首先我们给出一个遵从最简单形式的随机游走模型,给定价格时间序列$\{P_t\}$,有

$$P_t = \mu + P_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \mathrm{IID}(0,\sigma^2) \tag{1-2}$$

(1-2)式中,μ 是价格变化的期望,又称作漂移项;ε_t 为价格的增量;$\mathrm{IID}(0,\sigma^2)$表示 ε_t 为独立同分布随机变量序列,均值为 0,方差为 σ^2。$\{\varepsilon_t\}$增量的独立性表明不仅增量本身是不相关的,其非线性函数也是不相关的。我们称(1-2)式为随机游走模型 1,记为 RW1。

根据(1-2)式,我们可以发现 RW1 有以下两个性质:

$$\mathrm{E}(P_t \mid P_0) = P_0 + \mu t \tag{1-3}$$

$$\mathrm{Var}(P_t \mid P_0) = \sigma^2 t \tag{1-4}$$

从(1-3)式和(1-4)式我们可以发现,随机游走是非平稳的,同时它的条件均值和条件方差在时间序列上都是线性的。当然,这些性质对于下面两节将要讲解的另外两种随机游走模型(RW2,RW3)也都成立。

在研究增量时,我们首先要对它的分布做出一些规定,否则就很难进行进一步的检验。在这里,我们选择最通常的假定,也即该增量服从正态分布。如此可以简化许多相关运算。而同时,我们也要对(1-2)式进行改进,否则在 P_t 的条件分布是正态的假定下,$P_t<0$ 始终存在一个非 0 的概率。

参照几何布朗运动对于布朗运动的改进,我们可以设资产价格的自然对数 $p_t \equiv \log P_t$ 遵从具有正态分布增量的随机游走,这就是说连续收入是独立同分布的均值为 μ、方差为 σ^2 的正态随机变量。

1.2.2 RW1 的假设检验

虽然 RW1 的限定条件很苛刻,在现实中几乎不存在这样的例子,但从该模型的检验中仍可以了解到许多关于随机游走的性质,因此这对我

们之后的学习是必要的。

RW1 的检验方法有很多种，其中最常用的是逆序法和游程检验法。

1.2.2.1　逆序法检验

接上节，为方便计算，我们用 RW1 的对数形式来进行讨论。首先考虑无漂移项的 RW1 模型：设价格的对数 p_t 遵从无漂移的独立同分布随机游走，则

$$p_t = p_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \mathrm{IID}(0,\sigma^2) \tag{1-5}$$

记 I_t 为随机变量，定义为

$$I_t = \begin{cases} 1, & \text{假设 } r_t \equiv p_t - p_{t-1} > 0 \\ 0, & \text{假设 } r_t \equiv p_t - p_{t-1} \leqslant 0 \end{cases} \tag{1-6}$$

接着，科尔斯和乔恩斯(Cowles and Jones)给出了顺序和逆序的定义：两个不间断的股票收益样本符号相同，称为一个"顺序"；两个不间断的股票收益样本符号相反，称为一个"逆序"。当给定一组含 $n+1$ 个收益 $r_1,\cdots,r_{n+1}$ 的样本，有了(1-6)式，则顺序总数 N_s 和逆序总数 N_r 可以表示为 I_t 的如下函数：

$$N_s \equiv \sum_{t=1}^{n} Y_t, \quad Y_t \equiv I_t I_{t+1} + (1-I_t)(1-I_{t+1}) \tag{1-7}$$

$$N_r \equiv n - N_s \tag{1-8}$$

在(1-5)式的条件下，若再限定增量 ε_t 的分布是对称的，这就意味着 r_t 取正值和负值的概率是相等的，那么这就意味着我们所构造的顺序与逆序其实与伯努利实验中的硬币正反两面是一种概念。接着我们引入统计量

$$\hat{\mathrm{CJ}} \equiv \frac{N_s}{N_r}$$

这一统计量称为科尔斯-乔恩斯比率(Cowles-Jones Ration)，它可解释为顺序出现的概率 π_s 和逆序出现的概率 $1-\pi_s$ 的比值的一致估计。根据之前的分析，这一比值应近似等于 1。也即

$$\hat{\mathrm{CJ}} \equiv \frac{N_s}{N_r} = \frac{N_s/n}{N_r/n} = \frac{\hat{\pi}_s}{1-\hat{\pi}_s} \xrightarrow{pr} \frac{\pi_s}{1-\pi_s} = \mathrm{CJ} = \frac{1/2}{1/2} = 1 \tag{1-9}$$

然而，无漂移项的假设对这一统计量的取值是有决定性影响的。无论漂移项是正值或是负值，都会令整个收益序列更容易出现顺序。

下面这个例子可以清楚地说明这一现象，假定价格的对数遵从有漂移的正态随机游走，有

$$p_t = \mu + p_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0,\sigma^2) \tag{1-10}$$

这时，随机变量 I_t 就不再表示伯努利模型，而是随漂移的正负取值有所偏差：

$$I_t = \begin{cases} 1, & \text{具有概率 } \pi \\ 0, & \text{具有概率 } 1-\pi \end{cases} \tag{1-11}$$

这里：

$$\pi \equiv P(r_t > 0) = \Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) \tag{1-12}$$

若漂移 μ 为正，则 $\pi > \frac{1}{2}$；若 μ 为负，则 $\pi < \frac{1}{2}$。在这种更为一般的条件下，也即考虑 μ 的情况下，CJ 统计量的取值结果为

$$\mathrm{CJ} = \frac{\pi^2 + (1-\pi)^2}{2\pi(1-\pi)} \geqslant 1 \tag{1-13}$$

可见，只要漂移项非 0，那么顺序的可能性始终大于逆序的可能性。

1.2.2.2 游程检验

游程检验也经常用来检验 RW1，这一检验可以简单概括为：通过比较不间断的正或负收益的顺序数和在随机游走假设下的样本分布，来检验这些收益是否符合随机游走。以(1-6)式中定义的 I_t 为例，给定 8 个资产收益数据的样本，令 I_t 的取值为 10101010，这一序列一共包含了 8 个游程，其中对象为 1 的游程有 4 个，长度均为 1；对象为 0 的游程也有 4 个，长度也都为 1。但是如果 I_t 的取值为 00001111，则只含有 2 个游程，其中对象为 1 的游程只有 1 个，长度为 4；对象为 0 的游程也是 1 个，长度为 4。

通过对样本中的游程数与 RW1 假设下的期望游程数比较，就可以构造对独立同分布随机游走假设的检验。下面本书将简单介绍一下由穆德（A. M. Mood）首次提出的关于游程的分析法。

假设 n 个 IID 样本分别以概率 π_i，$i = 1, \cdots, q\left(\sum_i \pi_i = 1\right)$ 在 q 个可能值中取值。如在(1-6)式所定义的 I_t 中，q 等于 2；记 $N_{\text{runs}}(i)$ 为 i 类游程（任意长度）的总数，$i = 1, \cdots, q$；因此游程总数 $N_{\text{runs}} = \sum_i N_{\text{runs}}(i)$。穆德指出，$N_{\text{runs}}(i)$ 有下列数字特征：

$$\mathrm{E}(N_{\text{runs}}(i)) = n\pi_i(1-\pi_i) + \pi_i^2 \tag{1-14}$$

$$\mathrm{Var}(N_{\text{runs}}(i)) = n\pi_i(1-4\pi_i+6\pi_i^2-3\pi_i^3) + \pi_i^2(3-8\pi_i+5\pi_i^2) \tag{1-15}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(N_{\text{runs}}(i), N_{\text{runs}}(j)) = &-n\pi_i\pi_j(1-2\pi_i-2\pi_j+3\pi_i\pi_j) \\ &-\pi_i\pi_j(2\pi_i+2\pi_j-5\pi_i\pi_j)\end{aligned} \tag{1-16}$$

而且，穆德指出，经过适当的正态变换，游程数的分布渐进收敛于正

态分布，因而我们有

$$x_i \equiv \frac{N_{\text{runs}}(i) - n\pi_i(1-\pi_i) - \pi_i^2}{\sqrt{n}} \overset{a}{\sim} N(0, \pi_i(1-\pi_i) - 3\pi_i^2(1-\pi_i)^2) \tag{1-17}$$

$$\mathrm{Cov}(x_i, x_j) \overset{a}{=} -\pi_i\pi_j(1 - 2\pi_i - 2\pi_j + 3\pi_i\pi_j) \tag{1-18}$$

$$x_i \equiv \frac{N_{\text{runs}} - n(1 - \sum_i \pi_i^2)}{\sqrt{n}} \overset{a}{\sim} N\left(0, \sum_{i=1}^{k} \pi_i^2(1+2\pi_i) - 3\left(\sum_{i=1}^{k} \pi_i^2\right)^2\right) \tag{1-19}$$

利用(1-17)式和(1-19)式，我们就可以进行 RW1 的检验。其中 π_i 可由 $\hat{\pi}_i = n_i/n$ 得到，其中 n_i 是容量为 n 的样本的第 i 类游程数。

漂移项是否为 0 同样会影响游程检验的结果。以 $k=2$ 的伯努利实验为例，(1-6)式中 $I_t=1$ 的概率为 π，则游程数的期望为

$$\mathrm{E}(N_{\text{runs}}) = 2n\pi(1-\pi) + \pi^2 + (1-\pi)^2 \tag{1-20}$$

此时，对任意的 $n \geqslant 1$，(1-20)是在定义域上的凹函数，在 $\pi = \frac{1}{2}$ 时达到最大值。这意味着，漂移项无论是取正值或者负值，都会降低游程数的期望；而无漂移的随机游走，可以使游程数的期望值达到最大。

1.3　随机游走模型 2 及其假设检验

1.3.1　随机游走模型 2

随机游走模型 1 中同分布增量的假定对金融资产的长期价格来说显然是过于理想的。实际生活中股票价格还要受到经济、社会、技术等一系列因素影响，假定长期价格有相同的分布规律明显不能令人接受。因此需要将 RW1 的假定进一步放宽至增量独立但不同分布，我们称这样的模型为随机游走模型 2，记为 RW2。需要强调的是，与 RW1 一样，RW2 也具有以下经济性质：未来价格增量的任意函数形式都无法通过使用过去价格增量的任意函数形式来预测。

1.3.2　RW2 的假设检验

在不假定同分布的情况下，检验独立性的难度也会进一步加大，尤其是对于时间序列数据来说。样本分布不同意味着我们连基本的统计量都

无法构建。这种情况下，我们只能依赖于一些非参数检验。

常见的非参数检验方法有亚历山大(Alexander)提出的滤波器法则：当一种资产的价格预期增长 $x\%$时买入；当该资产价格预期下跌 $x\%$时卖出。还有埃德华兹和麦哲(R. W. Edwards and Jhon. Magee)提出的技术分析法：以图像方式对特定股票或市场平均的实际历史交易进行记录，并从历史图像上推断可能的未来趋势。

鉴于非参数检验的各种方法并没有太多使用正式的统计推断，而且分支极广，所依据的标准也各有不同，因此在这里我们只做粗略地回顾，不展开介绍。

1.4 随机游走模型 3 及其假设检验

1.4.1 随机游走模型 3

继续放宽 RW2 的独立性假设，可以得到一个有关随机游走假设更为一般的形式：即增量非独立但不相关，我们把这种形式称为随机游走模型 3，记为 RW3。RW1 和 RW2 是 RW3 的两个特例。满足 RW3 的假设而不满足 RW1 和 RW2 的随机过程的一个典型例子是：对某一随机过程，当 $k\neq0$ 时，有 $\mathrm{Cov}(\varepsilon_t,\varepsilon_{t-k})=0$，且 $\exists k\neq0$，有 $\mathrm{Cov}(\varepsilon_t^2,\varepsilon_{t-k}^2)\neq0$。这就是说，虽然在 RW3 的假设下，上述随机过程是增量不相关的，但因其增量的平方相关，因此其增量也是不独立的。

1.4.2 RW3 的检验

判断一个时间序列是否是随机游走，最直接的方式是检查其序列相关性，即这个序列不同时点两个观察值之间的相关性。RW3 这种随机游走假设最弱，它任意时间点增量或序列的一阶差分，其前置或滞后都应该是不相关的。因此我们可以用“该序列任意滞后的一阶差分自相关系数均为 0”这一假设作为原假设，来检验一个符合 RW3 限定条件的序列是否是随机游走。

在下文我们将介绍一些常用的检验。在 1.4.2.1 节，我们将介绍自相关系数的一些性质；在 1.4.2.2 节，我们将介绍数学家们基于自相关系数构造的一些检验。

1.4.2.1 自相关系数

首先我们给出两个变量 x 和 y 的相关系数的定义：