



CRC Press  
Taylor & Francis Group

[美]弗莱彻·邓恩 (Fletcher Dunn) [美]伊恩·帕贝利 (Ian Parberry) 著 穆丽君 张俊 译

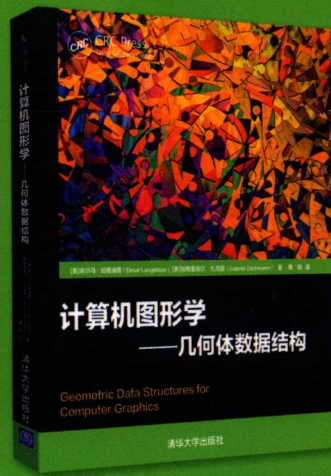
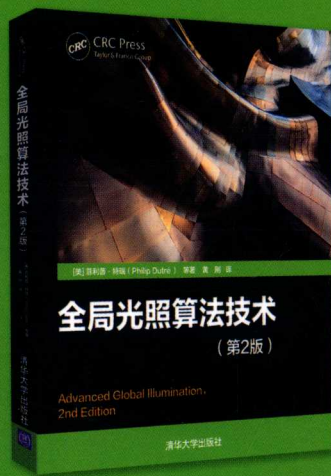
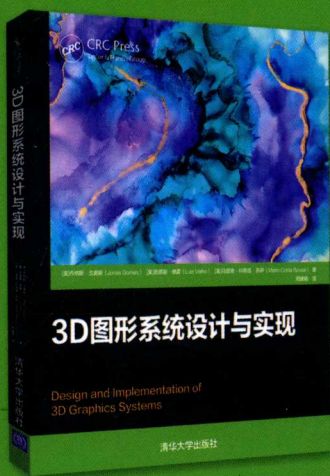
# 3D数学基础

## 图形和游戏开发 (第2版)

3D Math Primer for Graphics and  
Game Development, Second Edition

清华大学出版社





3D Math Primer for Graphics and Game Development, Second Edition



# 3D 数学基础：图形和游戏开发 (第 2 版)

[美] 弗莱彻·邓恩 (Fletcher Dunn)

[美] 伊恩·帕贝利 (Ian Parberry)

著

穆丽君 张俊 译

清华大学出版社

北京

## 内 容 简 介

本书详细阐述了在计算机图形学中数学相关的基本解决方案, 主要包括笛卡尔坐标系、矢量、多个坐标空间、矩阵简介、矩阵和线性变换、矩阵详解、极坐标系、三维旋转、几何图元、二维图形的数学主题、力学知识以及三维曲线等内容。此外, 本书还提供了相应的示例, 以帮助读者进一步理解相关方案的实现过程。

本书适合作为高等院校计算机及相关专业的教材和教学参考书, 也可作为相关开发人员的自学教材和参考手册。

北京市版权局著作权合同登记号 图字: 01-2013-6406

*3D Math Primer for Graphics and Game Development 2<sup>nd</sup> Edition*/by Fletcher Dunn and Ian Parberry  
/ISBN:978-1-56881-723-1

Copyright © 2011 by CRC Press.

Authorized translation from English language edition published by CRC Press, part of Taylor & Francis Group LLC; All rights reserved;

本书原版由 Taylor & Francis 出版集团旗下, CRC 出版公司出版, 并经其授权翻译出版。版权所有, 侵权必究。

Tsinghua University Press is authorized to publish and distribute exclusively the **Chinese(Simplified Characters)** language edition. This edition is authorized for sale throughout **Mainland of China**. No part of the publication may be reproduced or distributed by any means, or stored in a database or retrieval system, without the prior written permission of the publisher.

本书中文简体翻译版授权由清华大学出版社独家出版并限在中国大陆地区销售。未经出版者书面许可, 不得以任何方式复制或发行本书的任何部分。

Copies of this book sold without a Taylor & Francis sticker on the cover are unauthorized and illegal.

本书封面贴有 Taylor & Francis 公司防伪标签, 无标签者不得销售。

版权所有, 侵权必究。侵权举报电话: 010-62782989 13701121933

### 图书在版编目(CIP)数据

3D 数学基础: 图形和游戏开发: 第2版 / (美) 弗莱彻·邓恩(Fletcher Dunn), (美) 伊恩·帕贝利(Ian Parberry) 著; 穆丽君, 张俊译. —北京: 清华大学出版社, 2020.3  
ISBN 978-7-302-54932-1

I. ①3… II. ①弗… ②伊… ③穆… ④张… III. ①游戏程序-程序设计 IV. ①TP317.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2020)第024546号

责任编辑: 赵洛育 贾小红

封面设计: 刘超

版式设计: 文森时代

责任校对: 马军令

责任印制: 杨艳

出版发行: 清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址: 北京清华大学学研大厦A座 邮 编: 100084

社总机: 010-62770175 邮 购: 010-62786544

投稿与读者服务: 010-62776969, [c-service@tup.tsinghua.edu.cn](mailto:c-service@tup.tsinghua.edu.cn)

质量反馈: 010-62772015, [zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn](mailto:zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn)

印 装 者: 清华大学印刷厂

经 销: 全国新华书店

开 本: 185mm×230mm 印 张: 48.25 字 数: 967千字

版 次: 2020年5月第1版 印 次: 2020年5月第1次印刷

定 价: 199.00元

献给 A'me

——Fletcher Dunn

献给 Maggie

希望她继续保持对数学的兴趣

——Ian ParBerry

# 译者序

提到三维视频游戏制作，可能很多人脑海中想到的就是 3d Max、Maya 或 Combustion 之类的软件，但是，如果要学习和利用好这些软件，仍然需要掌握一定的基础知识；否则在实际制作过程中，你可能会遇到很多疑问或麻烦。“蒙惠者虽知其然，而未必知其所以然也。”本书就是帮助读者解决“知其所以然”问题的。

本书详细阐述了三维视频游戏制作所需的基础知识，从对点、线、面的分析开始，详细介绍了三维游戏中的空间坐标系、方向和矢量、坐标空间的变换、三维中的旋转、几何图元、三维图形工作原理、渲染方程、多边形网格、纹理贴图、骨骼动画、凹凸贴图、实时图形管道、线性运动学、速度和加速度、匀速圆周运动、动量、冲击力和碰撞测试、实时刚体模拟、参数化多项式曲线等较为全面的内容，并且为难点内容提供了具体的实现代码。为了更好地通过数学方式计算图元，本书还引入了三角函数、矩阵和线性变换、导数和积分等工具，使读者能更好地理解物理模拟和数学之间的关系，以及代码实现方式。总之，本书是学习和掌握三维视频游戏开发技术的一本不可多得的优秀入门读物。

在翻译本书的过程中，为了更好地帮助读者理解和学习，本书以中英文对照的形式保留了大量的术语，这样的安排不仅方便读者理解书中的代码，而且也有助于读者查找和利用相关技术网站上的资源。

本书由穆丽君和张俊翻译，马宏华、唐盛、黄刚、郝艳杰、黄永强、陈凯、黄进青、熊爱华等参与了程序测试和资料整理等工作。由于译者水平有限，错漏之处在所难免，在此诚挚欢迎读者提出任何意见和建议。

译者

# 前 言

火炮要打响，顺序不重要。

——Who 博士，*Meglos* (1980)

## 本书适宜的读者范围

本书是关于 3D 数学、三维空间的几何和代数的入门教材。它旨在告诉你如何使用数学描述三维中的物体及其位置、方向和轨迹。这不是一本关于计算机图形学、模拟，甚至计算几何的书，但是，如果读者打算研究这些科目，那么肯定需要这里的信息。

这是一本适宜视频游戏程序开发人员阅读的图书。虽然本书假定大多数读者都是为了编写视频游戏而学习，但我们期待更广泛的受众，并且在设计这本书的体例时也考虑到了不同的受众。如果你是程序开发人员或有兴趣学习如何制作视频游戏，欢迎加入！如果你没有达到这些标准，那么你在这里仍然可以收获很多。我们已经尽一切努力使本书对设计师和技术美工也很有用。虽然本书中有一些代码片段，但即使对于非程序开发人员来说，它们也很容易阅读（希望如此）。最重要的是，虽然你需要先理解相关的概念才能理解代码，但是反过来并不成立。我们使用代码示例来说明如何在计算机上实现创意，而不是解释这些创意本身。

本书的标题有“游戏开发”字样，但我们所涵盖的大量材料适用于视频游戏之外。实际上，任何想要模拟、渲染或理解三维世界的人都会觉得这本书很有用。虽然我们确实尝试提供来自视频游戏开发世界的一些激动人心的示例，因为这是我们的专业领域以及主要目标受众，但是，如果完成的最后一个游戏是 *Space Quest*，那么你将不会被排除在外。<sup>①</sup> 如果你的兴趣在于比视频游戏更“成熟”的东西，请放心，这本书中没有关于一枪爆头或残肢断臂之类的视频游戏中的具体示例，也不会讨论如何让血腥画面恰到好处之类的问题。

---

<sup>①</sup> *Space Quest* 是一款太空探索题材的游戏，玩家的任务是要求探索的伙伴“一个也不能少”，所以说你“不会被排除在外”。当然，这款游戏最后失败了，抱歉。

## 阅读本书的理由

本书有许多特色，包括其主题、方法、作者和写作风格等。

### 独特的主题

这本书填补了其他三维游戏开发类书籍在图形、线性代数、模拟和编程等方面留下的空白。这是一本入门教材，这意味着我们的写作重点是提供对基本三维概念的全面阐述——这些主题在一些快速入门网页中通常都会被掩盖，或者降级到其他书籍的附录中，因为有些内容可能会被作者默认为读者已经掌握的基础知识。但是，我们发现这些主题往往是初学者的关键点！在某种程度上，这本书是将图形、物理和曲线等方面的书籍黏合在一起的镜像。我们将首先全面介绍数学基础知识，然后给出高级应用领域的简明描述。

本书确实试图为初学者提供比较平缓的入门通道，但这并不意味着我们将永远行驶在慢车道上。事实上，这里有很多资料，传统上被认为是“先进的”，并仅在高年级或研究生课程中教授。这些主题的专业性超过了它们的难度，并且它们最近成为需要早期教授的重要先决条件，这也是推动对这类图书的需求的一部分动力。

### 独特的方法

所有作者都认为，为了给读者最好的阅读体验，需要在一本正经地讲授内容和插科打诨之间取得完美的平衡，我们也不例外。但是，我们也意识到，有些认真的读者可能会不认同我们的这种自我评价，他们会觉得这本书不太正式。其实，我们专注于明显的解释和直觉的建立，这样做有时也是以牺牲严谨为代价的。我们的目标是简化，但不过度简化。我们将引领读者进入一条能避开巨魔和恶龙的道路，从而顺利抵达终点。但是，我们也知道读者最终将需要自己穿越山林，因此，在到达我们指引的目的地之后，我们还将转过身来指出危险所在，以帮助读者独闯山林。当然，本书也无法做到面面俱到，所以，有些资料性的工具建议读者通过其他来源获得，这就好比我们已经告诉你闯荡山林的基础知识，但是如果打算扎根山林，则仍然应该咨询当地人以获得更多外人无法通晓的知识，避免可能遇到的危险。这并不是说我们认为严谨是不重要的，我们只是认为在确定了宏观的直觉之后更容易获得严谨的思考和方法，而不是用处理个别案例所需的定义和公理来进行每一项的讨论。坦率地说，现在读者可以在 [wikipedia.org](http://wikipedia.org) 或 [Wolfram MathWorld \(mathworld](http://Wolfram MathWorld (mathworld)

wolfram.com) 上免费阅读到很多简明而正式的演示文稿, 所以我们认为任何一本书都不会过多地依赖于定义、公理、证明和边缘情况, 特别是主要针对工程师的入门资料。

## 独特的作者

我们的综合经验使得我们可以将学术权威理论与在开发人员战壕中的实用建议结合在一起。Fletcher Dunn 拥有 15 年的专业游戏编程经验, 在各种游戏平台上拥有大约十几款游戏。他曾在达拉斯的 Terminal Reality 工作, 担任首席程序员, 他是 Infernal 引擎的架构师和 BloodRayne 的首席程序员。他曾担任芝加哥 Wideload Games 的 Walt Disney 公司的技术总监, 以及 IGN 的 E3 2010 年度家庭游戏 Disney Guilty Party 的首席程序员。他目前在华盛顿州贝尔维尤的 Valve Software 工作。但迄今为止让他声名鹊起的就是 *Call of Duty: Modern Warfare 2* (中文版名称《使命召唤: 现代战争 2》) 中的 Dunn (邓恩) 下士的同名。

Ian Parberry 博士在学术研究和教学方面拥有超过 25 年的经验。这是他的第六本书, 也是他的第三本关于游戏编程的书。他目前是北德克萨斯大学计算机科学与工程系的终身教授, 也是知名的高等教育游戏编程专业先锋人物之一, 自 1993 年以来一直在北德克萨斯大学教授游戏编程课程。

## 独特的写作风格

我们希望读者能喜欢阅读这本数学书有两个原因。最重要的是, 我们希望读者能在本书的学习过程中, 了解到感兴趣的内容其实也是很有趣的; 其次, 我们希望读者喜欢阅读本书, 就像喜欢阅读文学作品一样。当然我们不奢望能和马克·吐温在同一个层次, 或者本书能够成为像 *The Hitchhiker's Guide to the Galaxy* (中文版译名《银河系漫游指南》) 之类的经典之作, 但做人做事总要满怀抱负不是? 话说回来, 无论写作风格如何, 对于本书来说, 第一原则应该是明确交流有关电子游戏的数学知识。<sup>①</sup>

## 阅读本书的基础

我们已经尝试让尽可能多的受众都可以阅读这本书。但是, 这一努力也不应该超越刚才讲过的第一原则, 所以, 我们期望读者具备以下基本数学技能:

---

<sup>①</sup> 这就是为什么我们把大部分的趣味内容放在脚注中的原因。看, 我们还是挺正儿八经的。

- ❑ 掌握代数表达式、分数和基本代数定律，例如结合律、分配律和二次方程。
- ❑ 理解变量是什么、函数是什么，并且知道如何绘制函数的图形等。
- ❑ 了解一些非常基本的二维欧几里得几何，例如点是什么、线是什么、平行线和垂直线意味着什么等。在一些地方使用了一些面积和周长的基本公式。如果你暂时忘记了，那也没关系——当你看到它们时，自然会认出它们。
- ❑ 事先能掌握三角学是最好的。我们在本书前面的章节也对三角学进行了一些简要的复习，只是没有给出解释而已。
- ❑ 之前接触过微积分的读者会有一些优势，但是我们将本书中对微积分的使用限制在非常基础的水平上，我们将在第 11 章中给那些没有接受过这种教育的读者提供一些基础概念。本书只需要掌握这些概念和基本定律即可。

如果读者具有一些编程知识做基础，那自然是极好的，但这并不是必需的。在一些地方，我们提供简短的代码片段，以展示如何将讨论的想法转化为代码（此外，某些过程在代码中更容易解释）。这些代码片段是非常基础性的，并且提供了很好的注释，读者只需要对 C 语言语法（也可用于其他几种语言）具有最基本的理解即可。大多数的技术美工或关卡设计师应该能够轻松理解这些代码片段。

## 章节内容概述

- ❑ 第 1 章将通过讲述本书其余部分所需的一些基础内容进行热身，这些内容读者可能已经掌握。本章将回顾二维和三维中的笛卡儿坐标系，并讨论如何使用笛卡儿坐标系来定位空间中的点。还包括对三角学和求和符号的快速复习。
- ❑ 第 2 章将介绍数学向量和几何角度的矢量，并研究点和向量（矢量）之间的重要关系。本章还将讨论许多向量运算，如何执行它们，在几何上执行它们的含义以及一些可能发现它们很有用的情况。
- ❑ 第 3 章将讨论坐标空间的示例以及它们如何嵌套在层次结构中。本章还将介绍基矢量和坐标空间变换的核心概念。
- ❑ 第 4 章将从数学和几何角度介绍矩阵，并展示矩阵如何成为线性变换背后数学的紧凑符号。
- ❑ 第 5 章将详细研究不同类型的线性变换及其相应的矩阵。本章还将讨论各种变换的类以及分类方法。
- ❑ 第 6 章将介绍一些有趣且有用的矩阵特性，如仿射变换和透视投影，并解释三维世界中四维矢量和矩阵的目的和作用。

- 第 7 章将讨论如何在二维和三维中使用极坐标，这样做为什么是有用的，以及如何在极坐标和笛卡儿坐标之间进行转换。
- 第 8 章将讨论在三维中表示方向和角位移的不同技术——欧拉角、旋转矩阵、指数映射和四元数。对于每种方法，本章解释该方法的工作原理，并介绍该方法的优缺点以及何时使用该方法。本章还显示如何在不同的表示方式之间进行转换。
- 第 9 章将研究一些常用的几何图元，包括直线、球体、包围盒、平面、三角形和多边形等，并讨论如何用数学方法表示和操作它们。
- 第 10 章是关于图形的快速进阶课程，涉及一些选定的理论和现代实际问题。首先，本章将阐述关于“图形工作原理”的高级主题，从而推出渲染方程。然后，本章将介绍一些数学性质的理论主题，包括三维视图、坐标空间和多边形网格等。接下来，它将讨论两个当代主题：骨骼动画和凹凸贴图。这些主题通常是数学难度的来源，读者应该特别感兴趣。最后，本章还将简要介绍实时图形管道，演示如何在当前渲染硬件的环境下实现本章前半部分的理论。
- 第 11 章将两个相当大的主题合并为一章。它将第一学期微积分的最高级主题与刚体运动学的讨论联系起来——如何描述和分析刚体的运动，而不必理解其原因或关注方向与旋转。
- 第 12 章将继续讨论刚体力学。它首先对经典力学进行简要的解释，包括牛顿的运动定律和惯性、质量、力和动量等基本概念。它回顾一些基本的力定律，如重力、弹簧力和摩擦力。本章还考虑到目前为止所讨论的所有线性思想的旋转类比，适当关注碰撞的重要主题。本章最后讨论使用计算机模拟刚体时出现的问题。
- 第 13 章将介绍三维中的参数化曲线。本章的前半部分解释如何以一些常见的重要形式表示相对较短的曲线——单项式、贝塞尔和埃尔米特。下半部分涉及将这些较短的部分连接成较长的曲线（称为样条曲线）。在理解每个系统时，本章将考虑系统提供给曲线设计师的控制，如何描述设计师制作的曲线并重新创建曲线，以及如何使用这些控制构建具有特定属性的曲线等。
- 第 14 章将激发读者追求在视频游戏方面的成就。
- 附录 A 是可以对几何图元执行的各种有用测试。我们的目的是将它作为一个有用的参考，当然，即便是简单浏览一下也是很有益的。
- 附录 B 包含本书各章练习的所有答案。

小心，我们可不想从中吸取教训。

——摘自 Bill Watterson 著 *Calvin And Hobbes* (1958—)

## 致 谢

Fletcher 要感谢他的妻子 A'me，她忍受了本书写作过程中的漫长煎熬。虽然，我还对其他一些大型项目提出了很有趣的想法（这些想法在刚开始后就被放弃了四分之一），但是，我保证至少两三个星期之内不会再有大项目！

Ian 要感谢他的妻子和孩子们没有大声抱怨；感谢 Fletcher 忍受了他的拖延症；他还要感谢 Douglas Adams 的鲑鱼三明治勺子、牵牛花盆；感谢在本书中可以找到的无数其他有关《银河系漫游指南》三部曲的引用。

感谢 Mike Pratcher，他知识渊博而又细致耐心，并且还撰写了本书的很多练习题；感谢 Matt Carter 制作了本书的机器人和厨房示例，并满足了我们以各种方式摆放机器人的要求；感谢 Glenn Gamble 提供了死羊方面的资料；感谢 Eric Huang 创作了封面插图和所有其他需要艺术才能的二维艺术作品（作者完成了其余部分）；感谢 Pavel Krajcevski 提供的有益批评。

懂得感恩是获得更多恩惠的秘诀。

——Francois De La Rochefoucauld，法国思想家（1613—1680）

多看看，多感受。

——RILEY DUNN（1945—）

这么多时间，没什么事可干！  
罢工，调剂一下。

——威利·旺卡，电影《查理和巧克力工厂》

# 目 录

第 1 章 笛卡儿坐标系 .....	1
1.1 一维数学 .....	1
1.2 二维笛卡儿空间 .....	4
1.2.1 示例：假设的 Cartesia 城市 .....	5
1.2.2 任意二维坐标空间 .....	6
1.2.3 使用笛卡儿坐标指定二维中的位置 .....	10
1.3 三维笛卡儿空间 .....	11
1.3.1 新增维度和轴 .....	12
1.3.2 在三维中指定位置 .....	13
1.3.3 左手与右手坐标空间 .....	13
1.3.4 本书中使用的一些重要约定 .....	16
1.4 一些零散的基础知识介绍 .....	17
1.4.1 求和与求积的表示法 .....	17
1.4.2 区间符号 .....	18
1.4.3 角度、度数和弧度 .....	19
1.4.4 三角函数 .....	20
1.4.5 三角函数的恒等式 .....	23
1.5 练习 .....	25
第 2 章 矢量 .....	29
2.1 向量和 other 无聊东西的数学定义 .....	29
2.2 矢量的几何定义 .....	32
2.3 使用笛卡儿坐标指定矢量 .....	33
2.3.1 作为位移序列的矢量 .....	34
2.3.2 零矢量 .....	35
2.4 矢量与点 .....	36
2.4.1 相对位置 .....	36
2.4.2 点与矢量之间的关系 .....	37

2.4.3	一切都是相对的 .....	38
2.5	负矢量 .....	40
2.5.1	正式线性代数规则 .....	40
2.5.2	几何解释 .....	41
2.6	标量和矢量的乘法 .....	42
2.6.1	正式线性代数规则 .....	42
2.6.2	几何解释 .....	43
2.7	矢量的加法和减法 .....	43
2.7.1	正式线性代数规则 .....	44
2.7.2	几何解释 .....	45
2.7.3	从一点到另一点的位移矢量 .....	47
2.8	矢量大小 .....	47
2.8.1	正式线性代数规则 .....	47
2.8.2	几何解释 .....	48
2.9	单位矢量 .....	49
2.9.1	正式线性代数规则 .....	50
2.9.2	几何解释 .....	50
2.10	距离公式 .....	51
2.11	矢量点积 .....	52
2.11.1	正式线性代数规则 .....	52
2.11.2	几何解释 .....	53
2.12	矢量叉积 .....	60
2.12.1	正式线性代数规则 .....	60
2.12.2	几何解释 .....	61
2.13	线性代数恒等式 .....	63
2.14	练习 .....	64
<b>第 3 章</b>	<b>多个坐标空间 .....</b>	<b>71</b>
3.1	为什么需要多个坐标空间? .....	71
3.2	一些有用的坐标空间 .....	73
3.2.1	世界空间 .....	73
3.2.2	对象空间 .....	74

3.2.3	相机空间 .....	75
3.2.4	直立空间 .....	75
3.3	基矢量和坐标空间转换 .....	77
3.3.1	双重视角 .....	78
3.3.2	指定坐标空间 .....	85
3.3.3	基矢量 .....	86
3.4	嵌套坐标空间 .....	93
3.5	针对直立空间的再解释 .....	94
3.6	练习 .....	95
<b>第 4 章</b>	<b>矩阵简介 .....</b>	<b>99</b>
4.1	矩阵的数学定义 .....	99
4.1.1	矩阵维度和表示法 .....	100
4.1.2	方形矩阵 .....	100
4.1.3	作为矩阵的矢量 .....	101
4.1.4	矩阵转置 .....	102
4.1.5	矩阵与标量相乘 .....	103
4.1.6	两个矩阵相乘 .....	103
4.1.7	矢量和矩阵相乘 .....	106
4.1.8	行与列矢量 .....	108
4.2	矩阵的几何解释 .....	109
4.3	线性代数的宏大图景 .....	113
4.4	练习 .....	115
<b>第 5 章</b>	<b>矩阵和线性变换 .....</b>	<b>121</b>
5.1	旋转 .....	122
5.1.1	在二维中的旋转 .....	122
5.1.2	围绕主轴的三维旋转 .....	122
5.1.3	围绕任意轴的三维旋转 .....	124
5.2	缩放 .....	126
5.2.1	沿主轴缩放 .....	127
5.2.2	任意方向的缩放 .....	128
5.3	正交投影 .....	130

5.3.1	投影到主轴或主平面上 .....	131
5.3.2	投影到任意线或平面上 .....	132
5.4	反射 .....	133
5.5	错切 .....	134
5.6	组合变换 .....	135
5.7	变换的分类 .....	136
5.7.1	线性变换 .....	137
5.7.2	仿射变换 .....	138
5.7.3	可逆变换 .....	138
5.7.4	保持角度的变换 .....	139
5.7.5	正交变换 .....	139
5.7.6	刚体变换 .....	140
5.7.7	变换类型总结 .....	140
5.8	练习 .....	141
<b>第 6 章</b>	<b>矩阵详解 .....</b>	<b>143</b>
6.1	矩阵的行列式 .....	143
6.1.1	关于 $2 \times 2$ 和 $3 \times 3$ 矩阵的行列式 .....	143
6.1.2	子矩阵行列式和余子式 .....	145
6.1.3	任意 $n \times n$ 矩阵的行列式 .....	146
6.1.4	行列式的几何解释 .....	149
6.2	逆矩阵 .....	149
6.2.1	经典伴随矩阵 .....	150
6.2.2	逆矩阵——正式线性代数规则 .....	151
6.2.3	逆矩阵——几何解释 .....	152
6.3	正交矩阵 .....	152
6.3.1	正交矩阵——正式线性代数规则 .....	153
6.3.2	正交矩阵——几何解释 .....	153
6.3.3	矩阵的正交化 .....	155
6.4	关于 $4 \times 4$ 齐次矩阵 .....	157
6.4.1	关于四维齐次空间 .....	157
6.4.2	关于 $4 \times 4$ 平移矩阵 .....	158