高等学校教学参考书

赋值论概要

戴执中 编

高等教育出版社

高等学校教学参考书

赋值论概要

戴执中 编

高等教育出版社

1981

内容提要

赋值论是域论的一个分支，是研究“代数数论”和“交换代数”的一个工具．本书介绍赋值论的主要结果，全书共分五章，第一章讲述绝对值，第二、三章讲述一般赋值，第四、五章介绍一阶赋值．

本书说理清楚，论证严格，并且注意到循序渐进的原则．本书可供大学高年级学生或研究生作参考书．

本书原由人民教育出版社出版。1983年3月9日，上级同意恢复“高等教育出版社”。本书今后改用高等教育出版社名义继续印行。

高等学校教学参考书
赋值论概要
戴执中 编
*
高等教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
河北省香河县印刷厂印装
*
开本 850×1168 1/32 印张 6.125 字数 140,000
1981年12月第1版 1984年2月第3次印刷
印数 8,801—13,060
书号 13010·0702 定价 0.66 元

前　言

这本小书是为大学高年级生写的．对于学过近世代数，又有兴趣向代数学的某些方向作进一步攻读的人，这本书提供了赋值论这一分支的一个初步介绍．

内容分五章．在安排上，以大约一半的篇幅来介绍一般赋值(第二、三章)；而另外的一半则讲述绝对值和一阶赋值．正如Endler 在他的书*）的导言中所指出的：撰写一本赋值论方面的书，必然会遇到一个如何处置绝对值与一般赋值间的轻重的问题．作为一本入门的书，作者采取了与 Endler 相同的态度，就是二者兼顾．因为，无论从这一分支发展的历史，或是从应用的角度来看，都有必要给绝对值和一阶赋值在这样一本教材中占有一定的份量．这里所给予的比例大约是一对一，这样安排是否适当，则有待于读者的批评．

本书要求读者具有近世代数的初步知识．考虑到当前近世代数这门课程的内容不太一致，所以对于有些概念在有关的地方仍然作了简单的介绍．至于 Witt 向量，则以单独的一节作详细的讲述．为便于自学，在写作上力求详尽．根据使用的经验，本书可供大约六十课时的教学之用；也可用作攻读代数的研究生的一本参考书．

本书承北京师范大学张禾瑞教授和北京大学聂灵沼教授提出许多宝贵的修改意见，对此谨致以由衷的感谢．限于作者的水平，本书的缺点和错误一定还不少，尚希读者给予批评指正．

作　者

一九八一年，七月

---

*）见参考书目[3]．

目 录

第一章 绝 对 值

§1.1 域的绝对值

在对任意域引入绝对值的概念之前，让我们首先回顾一下有理数域的通常绝对值这个熟知的概念. 有理数的通常绝对值$|\quad|$，可以看成是一个从有理数域$\mathbf{Q}$到实数域$\mathbf{R}$内的映象，$|\quad|: \mathbf{Q}\longrightarrow\mathbf{R}$，它满足以下的条件：

$$|a|\geqslant 0,\ |a|=0 \text{当且仅当 } a=0;$$
$$|ab|=|a||b|;$$
$$|a+b|\leqslant|a|+|b|,$$

其中$a, b\in\mathbf{Q}$. 现在摒弃绝对值$|\quad|$的具体含义*)而考虑某些从$\mathbf{Q}$到$\mathbf{R}$的映象$\varphi: \mathbf{Q}\longrightarrow\mathbf{R}$，要求$\varphi$满足类似的三个条件，即

$$\varphi(a)\geqslant 0,\ \varphi(a)=0 \text{ 当且仅当 } a=0; \tag{1.1.1}$$
$$\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b); \tag{1.1.2}$$
$$\varphi(a+b)\leqslant\varphi(a)+\varphi(b), \tag{1.1.3}$$

其中最后的条件称为三角不等式. 我们首先对满足以上条件的φ来作一些初步的考虑. 从(1.1.1)及 (1.1.2)立即有$\varphi(\pm 1)=1$. 又从(1.1.3)立即有

$$\varphi(a+b)\leqslant 2\max\{\varphi(a), \varphi(b)\}. \tag{1.1.4}$$

其次，我们可以反过来从(1.1.1)，(1.1.2)及(1.1.4)推导出三角不等式(1.1.3). 首先，对于2^r个有理数$a_1, \cdots, a_{2^r}$(r是任何自然数)逐次使用(1.1.4)可以得出

---

*）指对于有理数$a>0$，规定$|a|=a$；对$a<0$规定$|a|=-a$.

$$\varphi(a_1+\cdots+a_{2^r})\leqslant 2^r\max_i\{\varphi(a_i)\}.$$

今设n个有理数$a_1, \cdots, a_n$，此处$2^r\leqslant n<2^{r+1}$. 添进$2^{r+1}-n$个0，使得$a_1, \cdots, a_n, 0, \cdots, 0$一共是$2^{r+1}$个数，于是

$$\begin{aligned}\varphi(a_1+\cdots+a_n)&=\varphi(a_1+\cdots+a_n+\underbrace{0+\cdots+0}_{2^{r+1}-n\text{ 个}})\\&\leqslant 2^{r+1}\max_i\{\varphi(a_i)\}.\end{aligned}$$

但$2^{r+1}\leqslant 2n$，所以上式又给出

$$\varphi(a_1+\cdots+a_n)\leqslant 2n\max_i\{\varphi(a_i)\}. \tag{1.1.5}$$

特别对于每个正整数m有

$$\varphi(m)\leqslant 2m\max\{\varphi(1)\}=2m. \tag{1.1.6}$$

现在来考虑$\varphi((a+b)^n)$，此处$n\in\mathbf{N}$，

$$\begin{aligned}\varphi((a+b)^n)&=\varphi\left(\sum_i\binom{n}{i}a^ib^{n-i}\right)\\&\leqslant 2(n+1)\max_i\left\{\varphi\left(\binom{n}{i}a^ib^{n-i}\right)\right\}\\&\leqslant 4(n+1)\max_i\left\{\binom{n}{i}\varphi(a^i)\varphi(b^{n-i})\right\}\\&\leqslant 4(n+1)\sum_i\binom{n}{i}(\varphi(a))^i(\varphi(b))^{n-i}\\&=4(n+1)(\varphi(a)+\varphi(b))^n,\end{aligned}$$

从而有$\varphi(a+b)\leqslant\sqrt[n]{4(n+1)}(\varphi(a)+\varphi(b))$. 当$n\to\infty$，有

$$\sqrt[n]{4(n+1)}\to 1.$$

因此得到

$$\varphi(a+b)\leqslant\varphi(a)+\varphi(b).$$

从上面的论证得知，对于映象φ: $\mathbf{Q}\longrightarrow\mathbf{R}$，条件组(1.1.1)，

(1.1.2), (1.1.3)与条件组(1.1.1), (1.1.2), (1.1.4)是等价的.同时我们还可以见到，尽管我们是就有理数域Q进行讨论，事实上我们只用到域的性质，并不涉及有理数的任何特性，因此我们可以把上述的概念作进一步的推广后移植到任意域上去. 现在就来给出任意域F的绝对值概念：

定义 1.1 从域F到实数域R的映象φ: $F \longrightarrow \mathbf{R}$，如果满足条件

(1) $\varphi(a) \geqslant 0$, $\varphi(a)=0$ 当且仅当 $a=0$(F的零元素)；

(2) $\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)$；

(3) $\varphi(a+b) \leqslant C\max\{\varphi(a), \varphi(b)\}$，

其中 $a, b \in F$, C是一个实数，满足 $0<C\leqslant 2$, 则称φ是F的一个绝对值.

从条件(2)得知，对于F的乘法单位元素e，应有$\varphi(e)=1$，再根据条件(1)，(3)可得$C\geqslant 1$. 换言之，定义中出现的实数C事实上所满足的条件是 $1\leqslant C\leqslant 2$. 另一方面，每个绝对值必然满足$C=2$的最弱情形. 根据我们对Q所作的讨论(对于F也同样适用)，此时φ必然满足三角不等式，即对于F的任何绝对值φ恒有

$$\varphi(a+b) \leqslant \varphi(a)+\varphi(b)$$

成立.

有理数的通常绝对值$|\ |$，就是在定义 1.1 的意义下域Q的一个绝对值，此时 $C=2$. 若对于每个复数$\alpha=a+b\sqrt{-1}$，令$\varphi(\alpha)=\sqrt{a^2+b^2}$，不难验明，$\varphi$是复数域C的一个绝对值，并且常数$C$也取值 2. 还应当提及一个最简单的情形，即对于$F$中每个非零元素$a$，令$\varphi(a)=1$以及$\varphi(0)=0$，这样规定的映象$\varphi$显然满足定义的条件，所以是$F$的一个绝对值，我们称它作浅显绝对值，或者说它是浅显的.

设域F是整环D的商域，φ是一个从D到R的映象，并且满足

定义 1.1 的条件(1)，(2)，(3)．我们能够把 φ 开拓成为 F 的一个绝对值(仍记作 φ)．因为，若 d 是 F 的任意元素，表如 $d=a/b$，其中 $a, b\in D$，并且 $b\neq 0$．令

$$\varphi(d)=\varphi(a)/\varphi(b). \tag{1.1.7}$$

首先，这样的规定是有效的，因若有 $a/b=a'/b'$，从 $ab'=a'b$ 即得 $\varphi(a)\varphi(b')=\varphi(a')\varphi(b)$，从而有 $\varphi(a)/\varphi(b)=\varphi(a')/\varphi(b')$．其次，它满足定义 1.1 中的三个条件(读者可自行验明)．因此由(1.1.7)所确定的 φ 是域 F 的一个绝对值．从这个事实得知，若 F 是其中某个整环 D 的商域，要定出 F 的绝对值只需对 D 来确定即可．

从 F 的一个绝对值 φ 出发，很容易作出另外一些绝对值．设 r 是满足 $0<r\leqslant 1$ 的任何实数．我们令

$$\varphi^r(a)=(\varphi(a))^r. \tag{1.1.8}$$

容易验明，这样规定的 φ^r 满足定义 1.1 的三个条件．此时出现于条件(3) 的常数是 C^r(C 表示出现于 φ 的定义中的常数)，它显然满足 $0<C^r\leqslant 2$. 因此，φ^r 是 F 的绝对值．

F 的两个绝对值 φ_1, φ_2，如果其间有关系 $\varphi_2=\varphi_1^r$，其中 r 是一个正的实数，则称 φ_1, φ_2 是等价的，记作 $\varphi_1\sim\varphi_2$. 如果二者间不存在上述关系，就称为不等价的，或者独立的．浅显绝对值与非浅显的绝对值自然是不等价的．

§1.2 非亚基米德绝对值(一阶赋值)

在定义 1.1 的条件中，如果常数 $C=1$，此时(3)成为一个较强的条件，称为强三角不等式，即

$$(3')\qquad \varphi(a+b)\leqslant\max\{\varphi(a), \varphi(b)\}.$$

我们把满足定义1.1的条件(1)，(2)以及上述(3′)的映象 $\varphi: F\longrightarrow \mathbf{R}$ 称为域 F 的一个非亚基米德绝对值，或者一阶赋值；而把那些满足定义 1.1，但不满足上述(3′)的绝对值称为亚基米德绝对值．

这种称谓的含义在下面就会认识到．应该指出，非亚基米德绝对值是一种远为重要的情形，从第二章起，我们将对它作较详细的讨论．现在先就有理数域Q来看一些实例，并且对非亚基米德绝对值的基本性质作出刻划．首先，从上面的条件(3′)立即有

$$\varphi(a_1+\cdots+a_n)\leqslant\max_i\{\varphi(a_i)\}. \tag{1.2.1}$$

例 域Q的非亚基米德绝对值．

设 p 是一个任意取定的素数．每个有理数 $a\neq0$ 总可以表如以下的形式

$$a=p^{v(a)}\cdot\frac{m}{n}, \tag{1.2.2}$$

其中 m, n 是与 p 互素的整数，$v(a)\in\mathbf{Z}$．如果不计 m, n 的正负号，表式(1.2.2)是由 a 唯一确定的．现在任取一个实数 ρ，满足 $0<\rho<1$．对于由(1.2.2)所表示的有理数 a，今规定

$$\varphi(a)=\rho^{v(a)}, \tag{1.2.3}$$

又令 $\varphi(0)=0$．于是映象 φ: $\mathbf{Q}\longrightarrow\mathbf{R}$ 显然满足定义 1.1 的条件(1), (2)．今证明它满足条件(3′)．

若 a, b 中有一个为0，或者 $a+b=0$，则条件(3′)显然成立．不妨设 $a, b\neq0$，同时 $a+b\neq0$．设 a 的表式为(1.2.2)，b 的表式为

$$b=p^{v(b)}\cdot\frac{m'}{n'},$$

其中 m', n' 与 p 互素．若 $v(a)<v(b)$，此时

$$\begin{aligned}a+b&=p^{v(a)}\left(\frac{m}{n}+p^{v(b)-v(a)}\cdot\frac{m'}{n'}\right)\\&=p^{v(a)}\left(\frac{mn'+p^{v(b)-v(a)}\cdot m'n}{nn'}\right)\\&=p^{v(a)}\cdot\frac{s}{t},\end{aligned}$$

其中 s，t 都与 p 互素．由此得知 $\varphi(a+b)=\rho^{v(a)}=\max\{\varphi(a), \varphi(b)\}$．若 $v(a)=v(b)$，此时

$$a+b=p^{v(a)}\left(\frac{m}{n}+\frac{m'}{n'}\right)=p^{v(a)}\cdot\frac{mn'+m'n}{nn'},$$

但分子 $mn'+m'n$ 不一定与 p 互素，因此，$v(a+b)\geqslant v(a)$. 从而有

$$\varphi(a+b)=\rho^{v(a+b)}\leqslant\rho^{v(a)}=\max\{\varphi(a),\varphi(b)\}.$$

对于 $v(a)>v(b)$ 的情况可完全类似证明. 以上证明了 φ 满足条件(3′), 因此它是Q的一个非亚基米德绝对值. 又由 $\varphi(p)=\rho<1$, 可知它是非浅显的. 对于每个素数，都可以按照上述的方式作出Q的一个非亚基米德绝对值，这种绝对值我们习惯上称它为有理数域Q的p-进赋值.

在上面的作法中, 实数 ρ 的取法是无关重要的. 因为, 如果另取一个适合 $0<\rho'<1$ 的实数 ρ', 由此得到的 p-进赋值与由(1.2.3)所确定的 p-进赋值显然是等价的.

在(1.2.3)中出现的整数 $v(a)$ 可称为有理数 a 关于素数 p 的次数. 我们已经见到:

$$v(ab)=v(a)+v(b), \tag{1.2.4}$$

$$v(a+b)\geqslant\min\{v(a),v(b)\}. \tag{1.2.5}$$

在上面二式中, a 与 b 以及 $a+b$ 都设作$\neq 0$. 另外, 再规定

$$v(0)=\infty. \tag{1.2.6}$$

此处符号∞满足运算律 $\infty+k=k+\infty=\infty+\infty=\infty$，以及 $\infty>k$, $k\in\mathbf{Z}$. 由(1.2.4), (1.2.5)以及(1.2.6)所规定的映象

$$v:\quad \mathbf{Q}\longrightarrow\mathbf{Z}\cup\{\infty\}$$

称为有理数域Q的指数赋值.

现在我们来对非亚基米德绝对值作出一个刻划. 为此，先对域 F 的元素引进一个称谓：由 F 的单位元素 e 经加法运算所得的元素 me(m个 e 的和), 以及它的关于加法的逆元素 $-me$, 都称作 F 的整元. 若 F 的特征为0, 它的整元所成的集为$\{0,\pm e,\pm 2e,\cdots\}$;

若F的特征为$p\neq 0$，则只有p个整元$\{0, e, \cdots, (p-1)e\}$. 为简便计，今后把F的单位元素径记作1. 于是F的整元集可分别记作$\{0, \pm 1, \cdots\}$和$\{0, 1, \cdots, p-1\}$. 今有

定理 1.1 设φ是域F的一个非浅显绝对值. φ成为非亚基米德绝对值的必要充分条件是对于F的每个整元m，总有$\varphi(m)\leqslant 1$成立.

证明 必要性显然成立. 设n为任何自然数. 按F上的二项式展开$(a+b)^n=\sum_i \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$，即有

$$\begin{aligned}\varphi((a+b)^n)&=\varphi\left(\sum_i \binom{n}{i} a^i b^{n-i}\right)\\&\leqslant 2(n+1)\max_i\left\{\varphi\left(\binom{n}{i} a^i b^{n-i}\right)\right\}\\&\leqslant 2(n+1)\max_i\{(\varphi(a))^i(\varphi(b))^{n-i}\}\\&\leqslant 2(n+1)[\max\{\varphi(a), \varphi(b)\}]^n.\end{aligned}$$

两边各开n次方，再令$n\to\infty$，即有$\sqrt[n]{2(n+1)}\to 1$. 因此

$$\varphi(a+b)\leqslant \max\{\varphi(a), \varphi(b)\}.$$

这证明了φ是F的一个非亚基米德绝对值. ※

上述定理说明了为什么把满足(3′)的绝对值称为非亚基米德绝对值. 此外，它还指出，绝对值φ成为亚基米德绝对值的必要充分条件是对于某个整元m，有$\varphi(m)>1$成立.

由定理1.1的证明可以看出，这个定理可改进为如果存在某个正的实数k，使得$\varphi(m)\leqslant k$对域中每个整元m都成立，则φ是非亚基米德的. 上面曾经提到，在域F的特征为素数p时，F仅有p个整元$0, 1, \cdots, p-1$. 对于它的任何一个绝对值φ，自然可以找到实数k，使得k大于$\varphi(1), \cdots, \varphi(p-1)$中的每一个. 从而有如下的事实：

推论 特征为素数 p 的域只能具有非亚基米德绝对值. ※

下面给出一个有关非亚基米德绝对值的基本性质:

定理 1.2 设 φ 是域 F 的一个非亚基米德绝对值. 若 $\varphi(a)\neq\varphi(b)$, 则有

$$\varphi(a+b)=\max\{\varphi(a),\varphi(b)\}.$$

证明 不失一般性, 设 $\varphi(a)>\varphi(b)$. 于是

$$\begin{aligned}\varphi(a)=\varphi(a+b-b)&\leqslant\max\{\varphi(a+b),\varphi(b)\}\\&=\varphi(a+b).\end{aligned}$$

另一方面,

$$\varphi(a+b)\leqslant\max\{\varphi(a),\varphi(b)\}=\varphi(a).$$

合并以上二式即有

$$\varphi(a+b)=\varphi(a)=\max\{\varphi(a),\varphi(b)\}. \text{※}$$

推论 设 φ 如前. 对于 F 的 n 个元素 $a_1,\cdots,a_n$, 若有 $\varphi(a_1)>\varphi(a_i)$, $i=2,\cdots,n$, 则

$$\varphi(a_1+\cdots+a_n)=\varphi(a_1)=\max_i\{\varphi(a_i)\}. \text{※}$$

§1.3 等价的绝对值

在§1.1中已经定义了什么是域的等价的绝对值, 现在我们从另一角度来考虑这个概念. 我们知道, 对任意域给出了一个绝对值就是对它的元素规定了一个度量, 从而可以与在数学分析中一样来讨论诸如邻域、收敛和极限等问题. 为了以后的需要, 现在简单介绍一些有关的概念.

设 φ 是域 F 的一个绝对值, $\{a_i\}=\{a_1,a_2,\cdots\}$ 是 F 中的一个无限序列. 如果对于每个实数 $\varepsilon>0$, 总可以找到一个自然数 n_0, 使得当标号 $s,t\geqslant n_0$ 时, 恒有

$$\varphi(a_s-a_t)<\varepsilon$$

成立，则称$\{a_i\}$是个关于φ的基本序列，或者φ-基本序列. 若对于F的某个元素a，对于任意给定的$\varepsilon>0$，总有一个n_0，使得

$$\varphi(a_s-a)<\varepsilon$$

对所有的$s\geqslant n_0$都成立，则称$\{a_i\}$关于φ是收敛的，或者是φ-收敛的，并且以a为其关于φ的极限，或者φ-极限. 此时可以写如$\varphi\text{-}\lim\limits_{i\to\infty}a_i=a$. 特别在$a=0$的时候，称这种序列为关于$\varphi$的零序列，或者$\varphi$-零序列.

由于绝对值一定满足三角不等式，因此有

$$|\varphi(a)-\varphi(b)|\leqslant\varphi(a-b) \tag{1.3.1}$$

成立，这里$|\ \ |$表示实数的通常绝对值. 从这个事实可知，若$\{a_i\}$是个φ-基本序列，则实数序列$\{\varphi(a_i)\}$就是通常的基本序列.

设域F有绝对值φ；E是一个与F同构的域，有绝对值ψ. 如果在F与E之间存在这样一个同构映象θ，使得F的序列$\{a_i\}$成为φ-零序列，当且仅当经θ所得的E中序列$\{\theta(a_i)\}$是个ψ-零序列，我们就称F与E是拓扑同构的，此时θ是二者间的一个拓扑同构映象. 在这种情况下，若F的序列$\{a_i\}$有$\varphi\text{-}\lim\limits_{i\to\infty}a_i=a$，则在$E$中相应的序列$\{\theta(a_i)\}$有$\psi\text{-}\lim\limits_{i\to\infty}\theta(a_i)=\theta(a)$，反之也成立. 又若$\{a_i\}$是$F$的$\varphi$-基本序列，则$\{\theta(a_i)\}$是$E$的$\psi$-基本序列，反之也成立.

设域E有绝对值ψ；F是与E同构的域；θ是其间的一个同构映象，θ: $F\longrightarrow E$. 我们可以对F来规定一个绝对值φ如下：

$$\varphi(a)=\psi(\theta(a)),$$

并且写成$\varphi=\psi\circ\theta$. 规定了F的这个绝对值后，带有绝对值φ的域F就与带有绝对值ψ的域E成为拓扑同构的域了.

以上这些概念，联系到绝对值的等价性，就有如下的判别条件：

定理 1.3 设φ_1，φ_2是域F的两个非浅显的绝对值. 下述诸命题是等价的：

(i) φ_1, φ_2 是等价的绝对值.

(ii) F 的序列 $\{a_i\}$ 成为 φ_1-零序列，当且仅当它是个 φ_2-零序列.

(iii) $\varphi_1(a)<1$ 隐含 $\varphi_2(a)<1$.

(iv) $\varphi_1(a)<1$ 当且仅当 $\varphi_2(a)<1$.

证明 用循环证法. 设(i)成立，此时有 $\varphi_2=\varphi_1^r$, $r>0$. 显然可知 φ_1-零序列必然同时是 φ_2-零序列；反之也成立，故有(ii)成立.

设(ii)成立. 对于 $a\neq 0, \varphi_1(a)<1$, 此时 $\{a^i\}$ 是个 φ_1-零序列. 据所设，它同时是 φ_2-零序列，从而有 $\varphi_2(a)<1$, 即(iii)成立.

设(iii)成立. 今设 $\varphi_2(a)<1$. 若 $\varphi_1(a)>1$, 则 $\varphi_1(1/a)<1$. 按(iii)，应有 $\varphi_2(1/a)<1$, 即 $\varphi_2(a)>1$, 与所设矛盾. 因此不可能有 $\varphi_1(a)>1$. 若 $\varphi_1(a)=1$, 取元素 b 使得 $\varphi_1(b)>1$. 由(iii)，应有 $\varphi_2(b)>1$. 令 $c=a^n b$, 于是 $\varphi_1(c)=\varphi_1(a^n)\varphi_1(b)>1$, 从而 $\varphi_2(c)>1$, 即 $\varphi_2(a^n b)>1$. 但由于 $\varphi_2(a)<1$, 所以当 n 适当地大时可以使得 $\varphi_2(a^n b)<1$. 这表明了不能有 $\varphi_1(a)=1$ 出现，因此从 $\varphi_2(a)<1$ 只能得出 $\varphi_1(a)<1$, 即(iv)成立.

最后设(iv)成立. 首先，$\varphi_1(a)=1$ 与 $\varphi_2(a)=1$ 必然同时成立或同时不成立. 同样，$\varphi_1(a)>1$ 与 $\varphi_2(a)>1$ 也必然同时成立或否. 若能证明对于 $\varphi_1(b)\neq 1$ 的那些元素 b, $\log(\varphi_2(b))/\log(\varphi_1(b))$ 是一个与 b 的选择无关的实数 r, 那么就有

$$\varphi_2(b)=(\varphi_1(b))^r$$

对所有的 b 都成立(因为对于 $\varphi_1(b)=1$ 的那些 b, 上式自然成立)，从而得到 $\varphi_2=\varphi_1^r$, 即(i)成立.

不失一般性，只需就 $\varphi_1(b)>1$ 的那些 b 来讨论. 此时 $\varphi_2(b)>1$, 从而有 $\log(\varphi_1(b))>0$ 以及 $\log(\varphi_2(b))>0$. 如果 $\log(\varphi_2(b))/\log(\varphi_1(b))$ 因 b 的不同取择而异，则对某个元素 $c\neq 0$,

有$\log(\varphi_1(c))>0$以及

$$\log(\varphi_2(b))/\log(\varphi_1(b))>\log(\varphi_2(c))/\log(\varphi_1(c))$$

成立．于是

$$\log(\varphi_1(c))/\log(\varphi_1(b))>\log(\varphi_2(c))/\log(\varphi_2(b)).$$

上式的两边都是正的实数，故有有理数m/n(不妨设$m, n>0$)，使得

$$\log(\varphi_1(c))/\log(\varphi_1(b))>m/n$$
$$>\log(\varphi_2(c))/\log(\varphi_2(b))$$

成立．由此得到

$$n\log(\varphi_1(c))/m\log(\varphi_1(b))>1$$
$$>n\log(\varphi_2(c))/m\log(\varphi_2(b)),$$

上式又可改写成

$$\frac{\log(\varphi_1(c))^n}{\log(\varphi_1(b))^m}>1>\frac{\log(\varphi_2(c))^n}{\log(\varphi_2(b))^m}. \tag{1.3.2}$$

从(1.3.2)可得出

$$\log(\varphi_1(c))^n>\log(\varphi_1(b))^m$$

以及 $$\log(\varphi_2(b))^m>\log(\varphi_2(c))^n;$$

或者 $$\varphi_1(c^n/b^m)>1,$$

$$\varphi_2(c^n/b^m)<1.$$

但这与所设矛盾．这就证明了$\log(\varphi_2(b))/\log(\varphi_1(b))$与$b$的选择无关，从而(i)成立．※

推论 设φ_1，φ_2是域F的两个独立的非浅显绝对值．于是，对于F的某个元素a，有$\varphi_1(a)<1$与$\varphi_2(a)>1$同时成立．

证明 从定理得知有某个$b\neq0$，使得$\varphi_1(b)<1$与$\varphi_2(b)\geqslant1$同时成立；又有某个$c\neq0$，使得$\varphi_1(c)\geqslant1$与$\varphi_2(c)<1$同时成立．取$a=b/c$即能满足要求．※