题海

高中数学

TI·HAI

中国大百科全书出版社

题海·高中数学

中国大百科全书出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学题海/《题海》编辑委员会编．-北京：中国大百科全书出版社，1994.5
(中小学各科各种题型题海)
ISBN 7-5000-5329-0
I. 高…　II. 题…　III. ①数学-高中-试题②试题-数学-高中　IV. G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(94)第 00626 号

编写说明

为了全面提高中小学的教学质量和水平，我们汇编了这套中小学各科各种题型的《题海》。本套《题海》是在收集历年历届各种考试题进行筛选、整理、研究、修订、增补的基础上编写而成的，包括《小学语文》、《小学数学》、《中学语文》、《初中数学》、《高中数学》、《中学物理》、《中学化学》、《中学英语》、《中学历史》和《中学地理》，共10册。各册内容基本按现行教材结构和知识分类编排，尽量使教材中所包含的知识反映到各类题目之中。为了有助教师拓宽思路和视野，各种题型尽量收全，既有标准化题，又有非标准化题；既考虑知识的覆盖面，又注意命题的新颖、典型、规范、精确、灵活、科学。收题类型也尽量多样化，既有期中、期末、毕业、升学、会考、中考、高考试题，又有大量的选择题、填空题、判断题、推断题、计算题、证明题和实验题。在解题上力求针对知识点、重点和难点，进行分析和解答，有的一题一解，有的一题多解，一道题有几种解法就介绍几种，尽量帮助教师掌握各类题的解题思路、方法、规律和技巧。这套《题海》不是学生的练习册，而是供教师使用的教学参考书。

由于水平所限，这套丛书难免会存在一些缺点和不足，恳切希望读者提出指正。

《题海》编委会

1994年1月20日

目　　录

代数部分

三角部分

立体几何部分

解析几何部分

代 数 部 分

第 一 章 集合与映射

第一节 集 合

【填空题】

1. 集合 $A=\{x|ax^2+2x+1=0\}$ 中只有一个元素，则 a 的值为______。

答案：0 或 1

2. 如果 $a\in Z, b\in Z$ 且 $b\neq0$，那么 $\frac{a}{b}\in$______。

答案：Q

3. 用列举法可将集合 $\{x|x^2-5x-6<0, x\in Z\}$ 表示为______________。

答案：$\{0,1,2,3,4,5\}$

4. 用描述法可将集合 $\{1,-3,5,-7,9,-11,\cdots\cdots\}$ 表示为______________。

答案：$\{x|(-1)^{n+1}(2n-1), n\in N\}$

5. 方程 $x^2+ax-2a^2=0(a\neq0)$ 的解集是__________，不等式 $x^2+ax-2a^2<0\quad(a<0)$ 的解集是__________。

答案：$\{-2a,a\}$；$\{x|a<x<-2a\}$

6. {小于 2^{30} 的自然数}是__限集；{小于 5 的整数}是__限集；$\{x|0<x<1, x\in Q\}$ 是__限集。

答案：有；无；无

7. 集合 $A=\{(x,y)|x+2y=7, x、y\in N\}$，用列举法可将 A 表示为__________，集合 A 的子集有__个。

答案：$\{(1,3),(3,2),(5,1)\}$；8

8. 设 $I=$ {三角形}，$M=$ {锐角三角形}，$N=$ {钝角三角形}，那么 $\overline{M}\cap\overline{N}=$____，$\overline{M}\cup\overline{N}=$____。

答案：{直角三角形}；{三角形}

9. 设 $I=$ {绝对值小于 5 的整数}，$M=\{-1,0,-2,-4\}$，$N=\{2,0,3,-4\}$，则 $M\cap N=$____，$\overline{M}\cup\overline{N}=$____。

答案：$\{0,-4\}$；$\{-3,-2,-1,1,2,3,4\}$。

10. 设 $I=$ {小于 9 的正整数}，$A=\{1,2,3\}$，$B=\{3,4,5,6\}$，则 $A\cup B=$____，$\overline{A\cap B}=$____。

答案：$\{1,2,3,4,5,6\}$；$\{1,2,4,5,6,7,8\}$

11. 绝对值不大于 6 的偶数集用列举法可以表示为____。

答案：$\{-6,-4,-2,0,2,4,6\}$

12. 若 $A\cup B=I$，$B\subset A$，则 $\overline{A}$____。

答案：Φ。

13. 设 $A=\{x|-2<x<\frac{1}{2}\}$，$B=\{x|x\leqslant-2\}$，则 $A\cup B=$__________；$A\cap B=$__________。

答案：$\{x|x<\frac{1}{2}\}$；Φ

14. 如果集合 $A=$ {非负实数}，集合 $B=$ {非正实数}，那么 $A\cap B=$____。

答案：$\{0\}$

15. 若 $A\cap B=\Phi$，且 $A=\{x|x^2-2x-8<0\}$，$B=\{x|x-a<0\}$，则 a 的取值范围是__________。

答案：$a\leqslant-2$ 或 $a\geqslant4$

16. 非零实数 a、b、c 构成一个数 $\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}+\frac{|c|}{c}+\frac{|a\,b\,c|}{a\,b\,c}$，则这样的数的集合是__________。

答案：$\{4,0,-4\}$

17. $x、y\in R$，$A=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$，$B=\{(x,y)\mid \frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{b}=1,a>0,b>0\}$，若 $A\cap B$ 只有一个元素时，则 $a、b$ 之间的关系是______。

答案：$a^2+b^2=a^2b^2$

18. 设方程 $\sin^2x-\cos x\cdot \mathrm{tg}x=0$ 的解集为 A，$\sin x=0$ 的解集为 B，则集合 A 和集合 B 的关系是______。

答案：$A=B$

19. 已知 $A=\{$斜线和平面所成的角$\}$，$B=\{$两条异面直线所成的角$\}$，$C=\{$直线的倾斜角$\}$，$D=\{$复数的幅角主值$\}$，那么集合 $A、B、C、D$ 的包含关系是______。

答案：$A\subset B\subset C\subset D$

20. 用描述法可将 $A=\{\frac{2}{3},\frac{3}{9},\frac{4}{27},\frac{5}{81},\frac{6}{243}\}$ 表示为______，可将 $B=\{(x,y)\mid (x-2)^2+|5-y|=0,x,y\in R\}$ 用列举法表示为______。

答案：$A=\{x\mid x=\frac{n+1}{3^n},1\leqslant n\leqslant 5$ 且 $n\in N\}$；$B=\{(2,5)\}$

21. 已知 $A\cup B=\Phi$，$C=\{x\mid x^2<2x+3\}$，则 $A\cap C=$______，$B\cup C=$______。

答案：Φ；$\{x\mid x^2<2x+3\}$

22. 设有两个集合 $S、T$，有 $S\cup T=I$（全集），则 $\overline{S}\cap\overline{T}=$______。

答案：Φ

23. 设全集 $I=\{2,3,a^2+2a-3\}$，$A=\{|a+1|,2\}$，$\overline{A}=\{5\}$，则实数 $a=$______。

答案：$a=2$ 或 $a=-4$

24. 若 $A=\{x\mid x^2+2x-3<0\}$，$B=\{x\mid x+a>0\}$ 且 $A\subset B$，则 a 的取值范围是______。

答案：$a\geqslant 3$

25. 若 $A\cap B=A$ 且 $A=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$，$B=\{(x,y)\mid y>2x+k\}$，则实数 k 的范围是______。

答案：$k<-\sqrt{5}$

26. 数集 $\{x\mid 15\leqslant x\leqslant 125\}\cap\{x\mid x=4n+1\}$（其中 $n\in N$）中，所有元素的和等于______。

答案：$17+21+25+\cdots+125=1988$

27. 集合 $A=\{1,2,3,4,5\}$ 的非空真子集的个数为______。

答案：$C_5^1+C_5^2+C_5^3+C_5^4=2^5-2=30$ 个

28. 设 $M\cap N=\Phi$，且 $M=\{(x,y)\mid \frac{y-3}{x-2}=a+1\}$，$N=\{(x,y)\mid (a^2-1)x+(a-1)y=15\}$，则 a 的值为______。

答案：$1,-1,\frac{5}{2},-4$

29. 数集 $X=\{x\mid x=12m+8n,m、n$ 是整数$\}$与数集 $Y=\{y\mid y=20p+16q,p、q$ 是整数$\}$之间的关系是______。

答案：$X=Y$

30. 集合 $M=\{1,2,(1,2)\}$ 的子集有______。

答案：$\Phi,\{1\},\{2\},\{(1,2)\},\{1,2\},\{1,(1,2)\},\{2,(1,2)\},M$

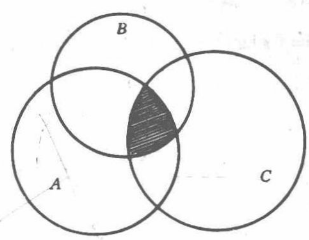
31. 某年级有 52 人参加了数学或英语小组，其中参加数学小组的有 32 人，参加英语小组的有 40 人，那么同时参加数学和英语小组的有____人。

答案：20

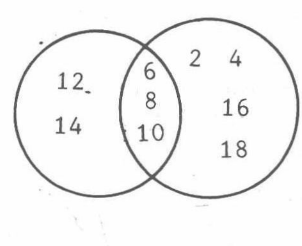
32. 有 $a、b、c$ 三本新书，至少读过其中一本的有 18 人，读过 a 的 9 人，b 的 8 人，c 的 11 人，同时读过 $a、b$ 的 5 人，读过 $b、c$ 的 3 人，读过 $c、a$ 的 4 人，那么 $a、b、c$ 全部读过的有____人。

答案：2 人

说明：设 $A=\{$读过 a 的人$\}$，$B=\{$读过 b 的人$\}$，$C=\{$读过 c 的人$\}$，则 $A\cap B=\{$同时读过 $a、b$ 的人$\}$，$A\cap C=\{$同时读过 $a、c$ 的人$\}$，$B\cap C=\{$同时读过 $b、c$ 的人$\}$，$A\cap B\cap C=\{$同时读过 $a、b、c$ 的人$\}$，$A\cup B\cup C=\{a、b、c$ 中至少读过一本的人$\}$，由韦恩图可知 $n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$。



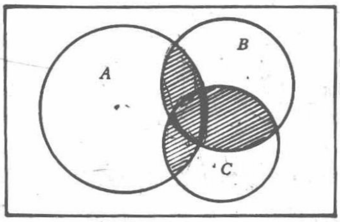
33. 设全集 $I=\{x\mid x$ 是小于 20 的正偶数$\}$，若 $A\cap\overline{B}=\{12,14\}$，$\overline{A}\cap B=\{2,4,16,18\}$，$\overline{A}\cap\overline{B}=\Phi$，那么 $A=$______，$B=$______。

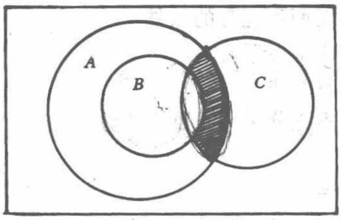


答案：$A=\{6,8,10,12,14\}$；$B=\{2,4,6,8,10,16,18\}$

说明：由 $\overline{A}\cap\overline{B}=\Phi$ 可知 $\overline{A}\subseteq B$，$\overline{B}\subseteq A$，利用韦恩图可得上述答案。

34. 下列各图中的阴影部分所表示的集合分别为______，______。





答案：$(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(A\cap C)$；$A\cap C\cap\overline{B}$ 或 $C\cap\overline{B}\cap A$

【选择题】

1. 设集合 $A=\{x\mid x\leqslant\sqrt{13}\}$，$a=2\sqrt{3}$，那么下列关系正确的是（　　）。

   (A)$a\subset A$　(B)$a\in A$

   (C)$a\notin A$　(D)$\{a\}\in A$

答案：(B)

2. 已知集合 $A=\{-2,0,1\}$，那么 A 的非空真子集的个数是（　　）。

   (A) 5　(B)6　(C)7　(D)8

答案：(B)

3. 若集合 $M=\{0,1,2\}$，$N=\{-1,0\}$，那么 $M\cup N$ 的真子集有（　　）。

   (A)14 个　(B)15 个

   (C)16 个　(D)32 个

答案：(B)

4. 若集合 X 满足 $\{0,1\}\subseteq X\subset\{-2,-1,0,1,2\}$，则 X 的个数是（　　）。

   (A)2 个　(B)4 个　(C)6 个　(D)7 个

答案：(D)

5. 若全集 I 的两个非空子集为 M、N，且 $M\subset N$，则下列集合中的空集是（　　）。

   (A)$M\cap N$　(B)$\overline{M}\cap N$

   (C)$M\cap\overline{N}$　(D)$\overline{M}\cap\overline{N}$

答案：(C)

6. 下列各表示式中正确的是（　　）。

   (A)$a\subset\{a,b\}$　(B)$\{a,c\}\cap\{b,d\}=\{0\}$

   (C)$a=\{a,b\}\cap\{a,c\}$　(D)$\{a,b\}\supseteq\{b,a\}$

答案：(D)

7. 设 $S=\{x\mid -x<0\}$，$T=\{x\mid -x^2<0\}$，则 $S\cap T$ 等于（　　）。

   (A)$\{x\mid x>0\}$　(B)R

   (C)$\{x\mid x\leqslant 0\}$　(D)$\{x\mid x<0\}$

答案：(A)

8. 设以实数集 R 为全集，$A=\{x\mid -3<x\leqslant 3\}$，$B=\{x\mid x\leqslant -3\}$，$C=\{x\mid x>3\}$，则 A 是 B 和 C 的（　　）。

   (A)交集　(B)并集

   (C)交集的补集　(D)并集的补集

答案：(D)

9. 设 $A=\{x\mid x=2n,n\in Z\}$，$B=\{y\mid y=2n+1,n\in Z\}$，则下列关系正确的是（　　）。

   (A)$A\cap B=\Phi$　(B)$A\subset B$

   (C)$A=B$　(D)$A\supset B$

答案：(A)

10. 设集合 $A=\{(x,y)\mid 3x+2y=7\}$，$B=\{(x,y)\mid 2x+3y=8\}$，则 $A\cap B$ 是（　　）。

   (A)(1,2)　(B)$\{x=1\}\cap\{y=2\}$

   (C)$\{1,2\}$　(D)$\{(1,2)\}$

答案：(D)

11. 设集合 $A=\{(x,y)\mid y=x\}$，$B=\left\{(x,y)\mid \dfrac{y}{x}=1\right\}$，则集合 A、B 间的关系是（　　）。

   (A)$A\subset B$　(B)$A\supset B$

   (C)$A=B$　(D)没有上述关系

答案：(B)

12. 由 $A\cup B=A\cup C$ 可以推出（　　）。

   (A)$B=C$　(B)$A\cap B=A\cap C$

   (C)$\overline{A}\cap B=\overline{A}\cap C$　(D)$A\cap\overline{B}=A\cap\overline{C}$

答案：(C)

13. 已知全集 $I=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，$A=\{3,4,5\}$，$B=\{1,3,6\}$，那么集合 $\{2,7,8\}$ 是（　　）。

   (A)$A\cup B$　(B)$A\cap B$

   (C)$\overline{A}\cup\overline{B}$　(D)$\overline{A}\cap\overline{B}$

答案：(D)

14. 如果 $I=\{a,b,c,d,e\}$，$M=\{a,c,d\}$，$N=\{b,d,e\}$，其中 I 是全集，那么 $\overline{M}\cap\overline{N}$ 等于（　　）。

   (A)Φ　(B)$\{d\}$　(C)$\{a,e\}$　(D)$\{b,e\}$

答案：(A)

15. 设 S，T 是两个非空集合，且 $S\not\subseteq T$，$T\not\subseteq S$，令 $X=S\cap T$，那么 $S\cup X$ 等于（　　）。

   (A)X　(B)T　(C)Φ　(D)S

答案：(D)

说明：可用特殊值法，令 $S=\{0,1\}$，$T=\{1,2\}$，则 $X=S\cap T=\{0,1\}\cap\{1,2\}=\{1\}$，而 $S\cup X=\{0,1\}\cup\{1\}=\{0,1\}$ 即可排除(A)、(B)、(C)，故选(D)。

16. 数集 $X=\{(2n+1)2\}$，n 是整数，与数集 $Y=\{(4k\pm1)2\}$，k 是整数，之间的关系是（　　）。

   (A)$X\subset Y$　(B)$X\supset Y$

   (C)$X=Y$　(D)$X\neq Y$

答案：(C)

17. 如果 $S=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1,x>0\}$

$T=\{(x,y)|x^2+y^2<1,y>0\}$

$M=\{(x,y)|x^2+y^2<,x<0\}$

$N=\{(x,y)|x^2+y^2<1,y<0\}$

那么(　　)。

(A)$S\cup T=M\cup N$　　(B)$S\cup N=T\cap M$

(C)$S\cap T=M\cap N$　　(D)$S\cap M=T\cap N$

答案:(D)

18. 设$I=\{$三角形$\}$,$P=\{$锐角三角形$\}$,$Q=\{$纯角三角形$\}$,则$\overline{P}\cap\overline{Q}$等于(　　)。

(A){锐角三角形}　(B){直角三角形}

(C){钝角三角形}　(D){三角形}

答案:(B)

19. 设$M=\{$正四棱柱$\}$,$N=\{$长方体$\}$,$P=\{$直四棱柱$\}$,$Q=\{$正方体$\}$,则下列关系正确的是(　　)。

(A)$Q\supset M\supset N\supset P$　(B)$Q\subset M\subset N\subset P$

(C)$Q\supset N\supset M\supset P$　(D)$Q\subset N\supset M\supset P$

答案:(B)

20. 若方程$x^2-px+6=0$的解集是M,方程$x^2+6x-q=0$的解集是N,且$M\cap N=\{2\}$,那么$p+q$等于(　　)。

(A)21　(B)8　(C)6　(D)7

答案:(A)

21. 数集$A=\{\sin 2n\pi,n\in z\}$,$B=\{\cos n\pi,n\in z\}$则A与B的关系是(　　)。

(A)$A\subset B$　(B)$A\supset B$

(C)$A=B$　(D)$A\neq B$

答案:(D)

22. 以复数集C为全集,设集合$M=\{x|x=z-\bar{z},z\in C\}$,$N=\{$纯虚数$\}$,则$M$与$N$的关系是(　　)。

(A)$M=N$　(B)$M\cap N=\Phi$

(C)$M\subset N$　(D)$M\supset N$

答案:(D)

23. 若集合$A=\{z|z=\cos\frac{n\pi}{5}+i\sin\frac{n\pi}{5},n\in N\}$,$B=\{z|z=(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)^n,n\in N\}$,则$A$与$B$之间的关系是(　　)。

(A)$A\cap B=\Phi$　(B)$A\supset B$　(C)$A\subset B$

(D)$A\cap B\neq\Phi$,且A与B之间不存在包含关系

答案:(D)

24. 若集合$M=\{1,2,(m^2-3m-1)+(m^2-5m-6)i\}$,$m\in R$,集合$N=\{-1,3\}$且$M\cap N\neq\Phi$,则$m$等于(　　)。

(A)$m=0$或3　(B)$m=-1$或3

(C)$m=-1$或6　(D)以上答案都不对

答案:(D)

25. z为复数,集合$A=\{z||z-1|\leqslant1\}$,$B=\{z|\arg z\geqslant\frac{\pi}{12}\}$,在复平面内,$A\cap B$所表示的图形的面积为(　　)。

(A)$\frac{5\pi}{6}$　(B)$\frac{5\pi}{6}-\frac{1}{4}$

(C)$\frac{11\pi}{12}-\frac{1}{4}$　(D)$\frac{5\pi}{12}-\frac{1}{4}$

答案:(C)

26. 设M、N均为非空集合,且$M\neq N$,则$a\in M$是$a\in G=M\cup N$的(　　)。

(A)必要而不充分的条件

(B)充分而不必要的条件

(C)充要条件

(D)既不充分也不必要的条件

答案:(B)

27. 已知$A=\{x|x^2+(p+2)x+1=0,x\in R\}$,且$A\cap R^+=\Phi$,则实数$p$的取值范围是(　　)。

(A)$p\geqslant-2$　(B)$p\geqslant0$

(C)$-4<p<0$　(D)$p>-4$

答案:(B)

28. 设$A=\{x|2x^2+7x-15\geqslant0\}$,$B=\{x||2x|\leqslant3\}$,$C=\{x|4x^2-12x+9=0\}$,则下列关系成立的是(　　)。

(A)$C\cap B=A$　(B)$C\cap B\supset A$

(C)$A\cap B=C$　(D)$A\cap B\subset C$

答案:(C)

29. 已知在直角坐标系XOY和极坐标系(极点与XOY的原点O重合,极轴与X轴正半轴重合)中,分别有两个点集M、N,$M=\{(x,y)|(x-1)^2+y^2=1\}$,$N=\{(\rho,\theta)|\rho=2\cos\theta\}$,则$M$与$N$的关系是(　　)。

(A)$M\subset N$　(B)$M\supset N$

(C)$M\neq N$　(D)$M=N$

答案:(D)

30. 已知全集$I=Z$,$M=\{x|x=2n,n\in Z\}$,$N=\{x|x=3n,n\in Z\}$,则$\overline{M}\cap\overline{N}$是(　　)。

(A)$\{x|x=3n\pm1,n\in Z\}$

(B)$\{x|x=4n\pm1,n\in Z\}$

(C)$\{x|x=6n\pm1,n\in Z\}$

(D)$\{x|x=6n\pm2,n\in Z\}$

答案:(D)

【解答题】

1. 设$x^2-px-q=0$的解集为A,$x^2+qx-p=0$的解集为B,若$A\cap B=\{1\}$,求实数p和q的值和$A\cup B$。

解:将$x=1$分别代入题设的两个方程得

$$\begin{cases}p+q=1\\p-q=1\end{cases}$$

解此方程组得$p=1,q=0$;

即原题设方程可化为$x^2-x=0$和$x^2-1=0$,它

们的解集分别为 $A=\{0,1\}$，$B=\{-1,1\}$，得

$$A\cup B=\{-1,0,1\}$$

2. 某车间共有 11 名工人，他们都有钳工或车工技术，其中会钳工的有 8 人，会车工的有 7 人，问这 11 名工人中既会钳工又会车工的有几人？现要从这个车间选出 3 人去支援其他车间，要求 3 人中至少有一名既会车工又会钳工，问有多少种选法？

解：11 名工人中既会钳工又会车工的有

$$8+7-11=4(\text{人})$$

选出 3 人支援其他车间的选法有

$$C_4^1C_7^2+C_4^2C_7^1+C_4^3=84+42+4=130(\text{种})$$

3. 已知集合 $A=\{x|x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x|x^2-ax+(a-1)=0\}$，$C=\{x|x^2-mx+2=0\}$，且 $A\cup B=A$，$A\cap C=C$，求 a，m。

解：$\because A\cup B=A$，$\therefore B\subseteq A$

又 $\because A=\{1,2\}$，它的子集有 Φ；$\{1\}$；$\{2\}$；$\{1,2\}$，

而方程 $x^2-ax+(a-1)=0$ 的根为 1 和 $a-1$，

$\therefore B$ 的可能性只有 $a-1=1$ 或 $a-1=2$

即 $a=2$ 或 $a=3$

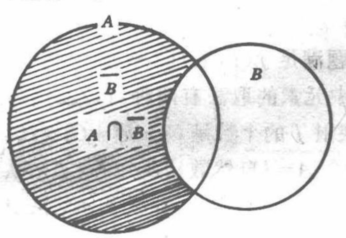
$\because A\cap C=C$，$\therefore C\subseteq A$

易知当 $m=3$ 时，$C=A$；当 $C=\Phi$ 时，

$\because \Delta=m^2-8<0$，

$\therefore -2\sqrt{2}<m<2\sqrt{2}$。

4. 设 $I=\{x|x$ 为小于 20 的正偶数$\}$，I 为全集，若 $A\cap\overline{B}=\{12,14\}$，$\overline{A}\cap B=\{2,4,16,18\}$，$\overline{A}\cap\overline{B}=\Phi$；求集合 A 与集合 B。



解：$\because A\cap B=(A\cap\overline{B})\cup\Phi=(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap\overline{B})$
$=(A\cup\overline{A})\cap\overline{B}=I\cap\overline{B}=\overline{B}=\{12,14\}$，

又 $I=\{2,4,6,8,10,12,14,16,18\}$

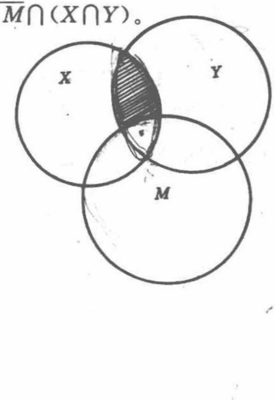
$\therefore B=\{2,4,6,8,10,16,18\}$

同理可得 $A=\{6,8,10,12,14\}$

说明：本题中因为 $\overline{A}\cap\overline{B}=\Phi$，所以 $\overline{A\cup B}=\Phi$，可知 $A\cup B=I$，因此从韦恩图上可以直接看出 $A\cap\overline{B}=\overline{B}$，$\overline{A}\cap B=\overline{A}$。

5. 简化表达式 $\overline{(X\cap Y)\cap M}\cap(X\cap Y)$。

解：用韦恩图表示题中集合表达式（如图中阴影部分），从图中可以看出它是集合 X、Y 和 $\overline{M}$ 的子集，可以简化为



$$(X\cap Y)\cap\overline{M}$$

6. 已知 $A=\{x,xy,\lg(xy)\}$，$B=\{0,|x|,y\}$，$A=B$，求 x，y。

解：$\because$ 要使 $\lg(xy)$ 有意义，必须 $xy>0$，

$\therefore x\neq0$，$y\neq0$，即 A 中的元素 x，xy 都不可能与 B 中的元素 0 对应，于是只能有

$$\lg(xy)=0$$

$\therefore xy=1$，$A=\{x,1,0\}$

$\because A=B$，$\therefore \{x,1,0\}=\{0,|x|,y\}$，

$\because y\neq1$，$\therefore x\neq1$

又 $\because$ 由 $|x|=1$ 只能得到 $x=-1$，

$\therefore y=-1$，这时 $A=B=\{-1,1,0\}$

说明：本题中若 $y=1$，则 $x=1$，这样，集合 A 中有两个元素都为 1，与集合中元素的互异性矛盾，因此，判断两集合中元素的对应关系，是解本题的关键。

7. 已知 $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$，$B=\{a_1^2,a_2^2,a_3^2,a_4^2,a_5^2\}$，其中 $a_i\in Z(i=1,2,3,4,5)$，设 $a_1<a_2<a_3<a_4<a_5$，且 $A\cap B=\{a_1,a_4\}$，$a_1+a_4=10$，又 $A\cup B$ 元素之和为 224，求：①a_1，a_4；②$a_2+a_3+a_5+a_2^2+a_3^2+a_5^2$；③$a_5$；④$A$。

204

解：①$\because A\cap B=\{a_1,a_4\}$，且 $a_1+a_4=10$，

又 $\because a_1,a_4\in B$，$\therefore a_1$，a_4 是两个完全平方数且其和为 10，故这两个数为 1，9

$\because a_1<a_4$，$\therefore a_1=1$，$a_4=9$

②$\because A\cup B$ 元素和为 224，

即 $a_2+a_3+a_5+a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2=224$，

而 $a_1^2+a_4^2=82$，

$\therefore a_2+a_3+a_5+a_2^2+a_3^2+a_5^2=142$

③$\because a_4<a_5$，$\therefore a_5>9$，设 $a_5=11$，则有 $a_2+a_3+a_2^2+a_3^2=10$，这是不可能的，

$\therefore a_5=10$

④$A=\{1,3,4,9,10\}$

8. 设 a，b 是两个实数，

$A=\{(x,y)|x=n,y=na+b,n$ 是整数$\}$，

$B=\{(x,y)|x=m,y=3m^2+15,m$ 是整数$\}$，

$C=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant144\}$，

是平面 XOY 内的点集合，讨论是否存在 a 和 b 使得：

(1)$A\cap B\neq\Phi$ （Φ 表示空集），

(2)$(a,b)\in C$ 同时成立。

解：如果实数 a 和 b 使得(1)成立，则存在整数 m、n，使得 $(n,na+b)=(m,3m^2+15)$

即 $\begin{cases}m=n\\3m^2+15=na+b\end{cases}$

从而得 $3n^2+15=na+b$

即 $na+b-(3n^2+15)=0$

说明点 $p(a,b)$ 在直线 $l:nx+y-(3n^2+15)=0$ 上。

设原点到直线 l 的距离为 d，则

$$d=\frac{3n^2+15}{\sqrt{n^2+1}}=6\left(\frac{\sqrt{n^2+1}}{2}+\frac{2}{\sqrt{n^2+1}}\right)\geqslant 12,$$

($\because$ 当 $x>0$ 时，$x+\frac{1}{x}\geqslant 2$)

当且仅当 $\frac{\sqrt{n^2+1}}{2}=1$ 时，即 $n^2=3$ 时，

上式取等号。

但由于 n 是整数，所以 $n^2\neq 3$，所以上式等号不能成立，即 $d>12$。

$\because$ $p(a,b)$ 在直线 l 上，所以 p 到原点距离 $\sqrt{a^2+b^2}\geqslant d>12$，另一方面，(2)的成立要求 $a^2+b^2\leqslant 144$，即 $\sqrt{a^2+b^2}\leqslant 12$，由此可知，使(1)成立的 a,b 不能使(2)成立。

$\therefore$ 不存在实数 a 和 b，使(1)、(2)同时成立。

说明：以上解法中的讨论是采用先从满足一个条件出发，经分析得出不可能满足另一个条件的结论，此题还可以用假设实数 a、b 可以使(1)、(2)同时成立，从而引出矛盾的反证法思想来解决。

9. 设 $I=R$，$P=\{y\mid y=-x^2,x\in R\}$，$Q=\{y\mid y=|x|-1,x\in R\}$，求 $P\cap Q$，$P\cup Q$，$\overline{P\cup Q}$ 与 $\overline{P}\cap Q$。

解：由已知得 $P=(-\infty,0]$，$Q=[-1,+\infty)$，于是 $P\cap Q=(-\infty\ 0]\cap[-1,+\infty)=[-1,0]$，$P\cup Q=(-\infty,0]\cup[-1,+\infty)=R$，$\overline{P\cup Q}=\overline{R}=\Phi$，$\overline{P}\cap Q=(0,+\infty)\cap[-1,+\infty)=(0,+\infty)$。

第二节 映 射

【填空题】

1. 已知集合 $A=\{$非零实数$\}$，集合 $B=R^+$，那么从集合____到集合____的映射的对应法则是“平方”。

答案：A；B

2. 如果集合 $A=\{\alpha\mid 0\leqslant\alpha<\pi\}$，且从集合 A 到集合 B 的映射的对应法则是“求正切”，那么集合 $B=$____。

答案：{实数}

3. 如果集合 $A=\{x\mid -1\leqslant x<1\}$，集合 $B=\{\alpha\mid 0°\leqslant\alpha<180°\}$，且对应法则是“求角 α 的正弦值”，那么可以把这个对应看成从______的映射，这个映射_______一一映射；如果对应法则是“求角 α 的余弦值”，那么从 A 到 B 的映射可以看成从 B 到 A 的____映射。

答案：B 到 A；不是；逆

4. 设 $A=\{$平面 M 内的四边形$\}$，$B=\{$平面 M 内的圆$\}$，对应法则是“画四边形的外接圆”，那么从 A 到 B 的对应____映射。

答案：不是

5. 已知集合 $A=\{$平面 M 内的三角形$\}$，$B=\{$平面 M 内的圆$\}$，那么从 A 到 B 的映射的对应法则是_______。

答案：作三角形的外接圆或内切圆、旁切圆等

6. 若给定映射 $f:(x,y)\longrightarrow(x+y,x-y)$，则在映射 f 下，象 $(3,1)$ 的原象是_____，原象 $(-1,1)$ 的象是_____。

答案：$(2,1)$；$(0,-2)$

7. 若给定映射 $f:x\longrightarrow\frac{x^2-1}{x+1}$，$g:x\longrightarrow x-1$，那么映射 f 和 g____同一映射。

答案：不是

8. 已知 $A=\{0,1,2,3,4\}$，如果从 A 到 B 的映射的对应法则是“从 A 中任取两个元素相乘”，那么 $B=$_____，B 的所有子集的个数为_____。

答案：$\{0,2,3,4,6,8,12\}$；$1+C_7^1+C_7^2+C_7^3+C_7^4+C_7^5+C_7^6+C_7^7=2^7=128$

9. 设 f 是集合 $M=\{1,2,3,4\}$ 到 $N=\{1,2,3\}$ 的映射，且有 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=9$，那么映射 f 的个数是_____。

答案：16

说明：本题满足 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=9$ 的集合 N 中元素的取法有两种：1,2,3,3 或 2,2,2,3，所以映射 f 的个数是 $C_4^2\cdot P_2^2+C_4^1=16$。

10. 已知集合 $A=\{$自然数$\}$，$B=\{-1,1\}$，从 A 到 B 的对应是 $f:x\longrightarrow(-1)^x$，那么 f____从 A 到 B 的映射。

答案：是

11. 若集合 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$，且从 A 到 B 的对应关系是 $f:x\longrightarrow x(x-4)$ 的映射，则集合 $B=$_______。

答案：$\{-4,-3,0,5,12\}$

12. 已知集合 $A=\{0\}\cup N$，$B=N$，从 A 到 B 的对应关系是 $f:x\longrightarrow|x-3|$，那么 f____从 A 到 B 的映射。

答案：不是

13. 若从集合 A 到 B 的对应关系是 $f:x\longrightarrow 2^x$，又知 $A=Q$(有理数集)，则 $B=$____；如果 $A=R$，那么映射 f 的逆映射是 f^{-1}：_______。

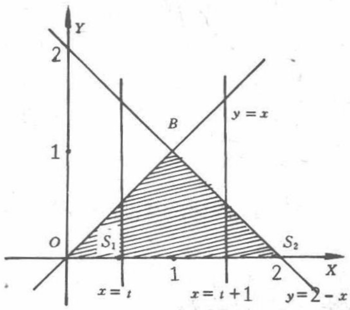
答案：R^+；$x\longrightarrow\log_2 x$

14. 设集合 $M=\{(x,y)\mid y\geqslant 0,y\leqslant x,y\leqslant 2-x\}$ 与 $N=\{(x,y)\mid t\leqslant x\leqslant t+1,0\leqslant t\leqslant 1\}$ 那么在平面直角坐标

系中 $M\cap N$ 所表示的图形面积是对应法则 $f:t\longrightarrow f(t)=$__________。

答案：$-t^2+t+\frac{1}{2}$

说明：$f(t)=S_{\Delta OAB}-S_1-S_2$（如图）$=1-\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}(1-t)^2=-t^2+t+\frac{1}{2}$。



15. 当元素是自然数的集合 S 满足条件"如果 $x\in S$，那么 $6-x\in S$"时，则只有一个元素的集合 $S=$______，元素个数为 2 的集合 $S=$_______；满足条件的集合 S 总共有____个。

答案：$\{3\}$；$\{1,5\}$或$\{2,4\}$；7

说明：$\because x\in S, 6-x\in S$，它们都是自然数，
$\therefore 1\leqslant x\leqslant 5$，$S$ 的元素仅限于自然数 1，2，3，4，5，要使 $x=6-x$，只有 $x=3$，即只有一个元素的 $S=\{3\}$，有两个元素的集合 S 应考虑集合中元素的互异性和无序性，即只有$\{1,5\}$和$\{2,4\}$。有三个元素的集合 S 是$\{1,3,5\}\{2,3,4\}$，有 4 个元素的集合 S 是$\{1,2,4,5\}$，有 5 个元素的 $S=\{1,2,3,4,5\}$，$\therefore$满足条件的集合S 总共有 7 个。

16. 已知集合 $A=R^-\cup\{0\}$，$B=\{0\}\cup R^+$，集合 A 中的元素按对应关系 $f:x\longrightarrow y=x^2$ 和 B 中的元素对应，那么映射 $f:A\longrightarrow B$ 的逆映射是___________。

答案：$f^{-1}:B\longrightarrow A, y\in B, y\longrightarrow x=-\sqrt{y}$

17. 已知集合 $A=R^+$，$B=\{x\mid x>1\}$，集合 A 中的元素按对应关系 $f:x\longrightarrow y=x^2+1$，和 B 中的元素对应，那么映射 $f:A\longrightarrow B$ 的逆映射是___________。

答案：$f^{-1}:B\longrightarrow A, y\in B, y\longrightarrow x=\sqrt{y-1}$

18. 从集合 $A=\{a,b\}$到 $B=\{1,2\}$的映射有____个，其中一一映射有____个。

答案：4；2

19. 若集合 $A=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 3\}$，$B=\{y\mid 0\leqslant y\leqslant 1\}$，则在"从 A 到 B 的映射"$f:x\longrightarrow y=\frac{1}{3}x$；$g:x\longrightarrow y=\frac{1}{4}x$，$h:x\longrightarrow y=\frac{1}{9}x^2$ 中，是从 A 到 B 上的一一映射的有____，它们的逆映射分别是_____________。

答案：$f,h,f^{-1}:y\longrightarrow x=3y, h^{-1}:y\longrightarrow x=3\sqrt{y}$

20. 设 $A=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 1\}$，$B=\{y\mid a\leqslant y\leqslant b\}$，则从集合 A 到集合 B 的一个一一映射是___________。

答案：$x\longrightarrow y=a+(b-a)x$

说明：本题答案不是唯一的。

21. 已知集合 $A=\{x\mid x\in R\}B=\{y\mid y\in R$，且 $y>0\}$，从 A 到 B 的对应法则有：$f_1:x\longrightarrow y=1+\frac{|x|}{2}$，$f_2:x\longrightarrow y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$，$f_3:x\longrightarrow y=\sqrt[3]{x}$；其中____是映射，____是一一映射。

答案：f_1、f_2；f_2

22. 若集合 $X=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 2\}$，$Y=\{y\mid 0\leqslant y\leqslant 1\}$，分别以两个对应法则 $f_1:x\longrightarrow y=(x-1)^2$，$f_2:x\longrightarrow y=\frac{1}{4}x^2$ 成 X 到 Y 的对应，其中____是一一映射，它的逆映射是__________。

答案：f_2；$f_2^{-1}(x)=2\sqrt{x}$，$x\in\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 1\}$

【选择题】

1. 从集合 A 到集合 B 的映射中，下述命题正确的有(　　)。
(1)B 中的任一元素在 A 中必有原象
(2)A 中的不同元素在 B 中的象必不相同
(3)A 中任一元素在 B 中必有唯一的象
(4)A 中的任一元素在 B 中可以有不同的象
(A)1 个　(B)2 个
(C)3 个　(D)4 个

答案：(A)

2. 已知 $f:x\longrightarrow f(x)=\frac{1}{x^2-1}$，$g:x\longrightarrow g(x)=x+1$，则 $f[g(x)]$的表达式是(　　)。
(A)$\frac{1}{x^2+2x}$　(B)$\frac{x^2}{x^2-1}$
(C)$\frac{x^2}{x^2+2x}$　(D)$\frac{1}{x^2-1}$

答案：(A)

3. 设 $f(x)=7x^2-3x+1$，则 $f(x+h)-f(x)$ 等于(　　)。
(A)$7h^2-3h$　(B)$14xh-6x+2$
(C)$2xh+h^2+h$　(D)$h(14x+7h-3)$

答案：(D)

4. 设集合 $A=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 6\}$，集合 $B=\{y\mid 0\leqslant y\leqslant 2\}$，从 A 到 B 各对应关系不是映射的是(　　)。
(A)$f:x\longrightarrow y=\frac{1}{2}x$　(B)$f:x\longrightarrow y=\frac{1}{3}x$
(C)$f:x\longrightarrow y=\frac{1}{4}x$　(D)$f:x\longrightarrow y=\frac{1}{5}x$

答案：(A)

5. 下列从 P 到 Q 的各对应关系 f 中，不是映射的是(　　)。
(A)$P=\{0\}\cup N$，$Q=N$，$f:x\longrightarrow|x-3|$
(B)$P=\{1,2,3,4,5,6\}$，$Q=\{-4,-3,0,5,12\}$

$f:x \longrightarrow x(x-1)$

(C)$P=N,Q=\{-1,1\},f:x\longrightarrow(-1)^x$

(D)$P=Z,Q=\{$有理数$\},f:x\longrightarrow 2^x$

答案:(A)

6. 已知 $X=\{1,2,3,4,5\},Y=\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6},\frac{1}{7}\}$,对应关系 f 是"取倒数",则 $f:x\longrightarrow y$(　　)。

(A)是从 X 到 Y 的映射,且是从 X 到 Y 上的函数

(B)是从 X 到 Y 的映射,但不是从 X 到 Y 上的函数

(C)不是从 X 到 Y 的映射,但是从 X 到 Y 上的函数

(D)不是从 X 到 Y 的映射也不是从 X 到 Y 上的函数

答案:(B)

7. 下列从集合 P 到 Q 的各对应关系 f 中,是映射的有(　　)。

(A)$P=\{1\},Q=\{1,2,3\},f:x\longrightarrow y,y>x$

(B)$P=\{x|0\leqslant x\leqslant 2\},Q=\{y|0\leqslant y\leqslant 1\}$,
$f:x\longrightarrow y=\frac{1}{3}x$

(C)$P=\{x|x\in R\},Q=\{y|0\leqslant y\leqslant 1\}$,
$f:x\longrightarrow y=\frac{1}{x}$

(D)$P=\{x|0\leqslant x\leqslant 2\},B=\{y|0\leqslant y\leqslant 1\}$,
$f:x\longrightarrow y=(x-2)^2$

答案:(B)

8. x,y 的对应关系如表

x	0	1	2	3	4
y	100	90	70	40	0

所示,那么 x,y 对应关系的表达式是(　　)。

(A)$y=100-10x$　　(B)$y=100-5x^2$

(C)$y=100-5x-5x^2$　　(D)$y=20-x-x^2$

答案:(C)

9. 按对应关系 $f:x\longrightarrow y=\log_a b$(其中 $a=2,b=x$)使集合 M 的元素 x 对应于集合 N 的元素 y,下列哪种是集合 M 到集合 N 的映射(　　)。

(A)$M=R^+,N=R^+$

(B)$M=R^+,N=\{$非负实数$\}$

(C)$M=\{$非负实数$\},N=R$

(D)$M=R^+,N=R$

答案:(D)

10. 若集合 $M=\{x|0\leqslant x\leqslant 2\},N=\{y|0\leqslant y\leqslant 1\}$,判断下列对应 $f:x\longrightarrow y=f(x)$是从 M 到 N 的一一映射(　　)。

(A)$f(x)=\frac{1}{3}x$　(B)$f(x)=(x-1)^2$

(C)$f(x)=\frac{1}{4}x^2$　(D)$f(x)=\sqrt{2}\,x^{\frac{1}{2}}$

答案:(C)

11. 下列映射中的一一映射是(　　)。

(A)$R\longrightarrow R^+,y=e^x$

(B)$[0,2\pi]\longrightarrow[-1,1],y=\cos x$

(C)$[0,\pi]\longrightarrow[-1,1],y=\sin x$

(D)$(1,2)\longrightarrow[1,4],y=x^2$

答案:(A)

12. 下列映射中,有逆映射的是(　　)。

(A)$M=R^+,N=\{y\neq 0\},f:M\longrightarrow N,y=\sqrt{x}$

(B)$M=Z,N=Z,f:M\longrightarrow N,y=3x$

(C)$M=\{x|x\neq 0\},N=\{y|y\neq 1\},f:M\longrightarrow N$,
$y=1-\frac{1}{x}$

(D)$M=R,N=R,f:M\longrightarrow N,|y|=|x|$

答案:(C)

13. 在给定的映射 $f:(x,y)\longrightarrow(x+y,xy)(x,y\in R)$条件下,(7,10)的原象是(　　)。

(A)(2,5)　　(B)(5,2)

(C)(2,5)或(5,2)　　(D)以上都不对

答案:(C)

14. 集合 $A=\{a,b,c\},B=\{-1,0,1\}$,映射 $f:A\longrightarrow B$ 满足 $f(a)-f(b)=f(c)$,那么映射 $f:A\longrightarrow B$ 的个数是(　　)。

(A)2　　(B)7

(C)4　　(D)5

答案:(B)

15. 集合 A 与集合 B 能建立一一映射的是(　　)。

(A)$A=\{1,2,3,4,5\},B=\{2,4,6,8\}$

(B)$A=\{$有理数$\},B=\{$数轴上的点$\}$

(C)$A=\{$三角形$\},B=\{$圆$\}$

(D)$A=\{$平面上的点$\},B=\{$有序实数对$(a,b)\}$

答案:(D)

16. 设有集合 X、集合 Y,对应法则 $f:x\longrightarrow y=x^2$,其中 $x\in X,y\in Y$,要使 f 是从 X 到 Y 的一一映射,那么 X、Y 可以是(　　)。

(A)$X=R,Y=R$

(B)$X=R,Y=\{$非负实数$\}$

(C)$X=\{$非负实数$\},Y=R$

(D)X、Y 都是$\{$非负实数$\}$

答案:(D)

17. 下列各个对应关系中,构成一一映射的是(　　)。

(A)$A=\{1,3,5,7,\cdots\}$, $B=\{2,4,6,8,\cdots\}$对应关系 $f:a\longrightarrow b=a+1$,且 $a\in A,b\in B$

(B)$f:x\longrightarrow y=\sin x,x\in(0,\pi),y\in R^+$

(C)$f:x\longrightarrow y=x^2,x\in R,y\in R^+$

(D)$f:a\longrightarrow b=|a-100|,a\in Z^+,b\in Z$

答案:(A)

18. 直线 l//平面 α,$A=\{$平面 α 内的点$\},B=\{$平面 α

内的直线}，从 A 到 B 的对应 f：过 α 内的点作直线平行于 l，那么 f(　　)。

(A)不一定是映射　　(B)是一一映射

(C)是映射而不是一一映射　　(D)不是映射

答案：(C)

19．下列对应中从 A 到 B 的一一映射是(　　)。

(A) $A=\{x|x\in R\}, B=\{y|y\in R\}, f: x\longrightarrow y=\frac{1}{x}$

(B) $A=\{x|x\in R\}, B=\{y|y\in R\}, f: x\longrightarrow y=x^2$

(C) $A=\{x|x\in R\}, B=\{y||y|\leqslant 1\}, f: x\longrightarrow y=\sin x$

(D) $A=\{x|x\in R\}, B=\{y|y\in R\}, f: x\longrightarrow y=x^{\frac{1}{3}}+1$

答案：(D)

20．已知 (x,y) 在映射 f 下的象是 $(\frac{x+y}{2},\frac{x-y}{2})$，那么 $(-5,2)$ 在 f 下的原象是(　　)。

(A) $(-10,4)$　　(B) $(-6,-4)$

(C) $(-3,-7)$　　(D) $(-\frac{3}{2},-\frac{7}{2})$

答案：(C)

21．设集合 $A=(-1,1)$，$B=R$，$y=f(x)(x\in A, y\in B)$，那么 $A\longrightarrow B$ 的一一映射是(　　)。

(A) $y=\frac{1}{x}$　　(B) $y=\frac{2}{\pi}\mathrm{arctg}x$

(C) $y=\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{2}x$　　(D) $y=\mathrm{ctg}\,\frac{\pi x}{2}$

答案：(C)

22．设 $f: A\longrightarrow B$ 是集合 A 到集合 B 的映射，则下列命题为真的是(　　)。

(A) A 中的每一元素在 B 中必有象

(B) B 中的每一元素在 A 中必有原象

(C) B 中的每一元素在 A 中的原象是唯一的

(D) A 中的不同元素的象必定不同

答案：(A)

23．下列对应中，f 是 A 到 B 的映射是(　　)。

(A) $A=\{1\}, B=\{1,2,3\}, f: x\longrightarrow y, y>x$

(B) $A=\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}, B=\{y|0\leqslant y\leqslant 1\}$，$f: x\longrightarrow y=\frac{1}{3}x$

(C) $A=\{x|x\in R\}, B=\{y|0\leqslant y\leqslant 1\}$，$f: x\longrightarrow y=\frac{1}{x}$

(D) $A=\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}, B=\{y|0\leqslant y\leqslant 1\}$，$f: x\longrightarrow y, y=(x-2)^2$

答案：(B)

24．集合 A 有 n 个元素，集合 B 有 m 个元素，则由 A 到 B 的映射：$A\longrightarrow B$ 的个数是(　　)。

(A) P_n^m　　(B) n^m

(C) P_m^n　　(D) m^n

答案：(D)

【解答题】

1．已知集合 A 到集合 B 的映射是 $f: x\longrightarrow \frac{1}{|x|-1}$，且 $B=\{0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\}$，那么集合 A 中的元素最多是几个？并写出元素个数最多时的集合 A。

解：$\because \frac{1}{|x|-1}\neq 0$，

$\therefore 0$ 在 A 中不存在原象

设 $y=\frac{1}{|x|-1}$，且 $y\in B$，则有 $x=\pm(\frac{1}{y}+1)$；

当 y 分别等于 $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}$ 时，相应地得到 x 分别等于 $\pm 2,\pm 3,\pm 4$

即　A 中元素最多 6 个，$A=\{-4,-3,-2,2,3,4\}$

2．设 $A=\{t|0<t<2\pi, t\in R\}$，A 到坐标平面上点集的映射 f 为 $t\longrightarrow(\sin t,\sin 2t)$，设 $B=\{f(t)|t\in A\}$，$C(r)=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant r^2, r>0\}$，求满足 $B\subseteq C(r)$ 的 r 的最小值。

解：设 $(x,y)\in B$，则 $x=\sin t, y=\sin 2t(0<t<2\pi)$，

$x^2+y^2=\sin^2 t+\sin^2 2t$

$=-4(8\sin^2 t-\frac{5}{8})^2+\frac{25}{16}$

即 $(x,y)\in B, x^2+y^2\leqslant\frac{25}{16}$，

若 $B\subseteq C(r)$，则有 $\frac{25}{16}\leqslant r^2$，$r$ 的最小值为 $\frac{5}{4}$

3．设 $A=\{x|-2\leqslant x\leqslant a\}$，$B=\{y|y=2x+3, x\in A\}$，$C=\{z|z=x^2, x\in A\}$，且 $C\subseteq B$，求实数 a 的取值集合。

解：据题意，集合 C 应为数集 $[0,a^2]$ 或 $[0,4]$，再由 $C\subseteq B$ 可得

$$\begin{cases}a^2\leqslant 2a+3\\4\leqslant 2a+3\end{cases}\quad 即\begin{cases}-1\leqslant a\leqslant 3\\a\geqslant\frac{1}{2}\end{cases}$$

$\therefore \frac{1}{2}\leqslant a\leqslant 3$，故实数 a 的取值集合为 $\left[\frac{1}{2},3\right]$。

4．按照对应关系，$x\longrightarrow y=x^2$，使集合 $A=\{x|x\geqslant 0\}$ 的元素对应于集合 $B=\{y|y\geqslant 0\}$ 的元素，这个对应是不是映射？是不是一一映射？

解：根据映射的定义，对于集合 A 中的任何一个元素按照对应法则，在集合 B 中都有唯一的元素和它对应。反之，对于集合 B 中的任何一个元素，按照对应法则 $y\longrightarrow x=\sqrt{y}$，在集合 A 中也有唯一的元素和它对应，因此这个对应既是映射，又是一一映射。

5．设 $A=\{a,b,c\}$，$B=\{d,e,f\}$ 则从 A 到 B 的映射有几个？一一映射有几个？

解：从 A 到 B 的映射可以看成是重复排列问题，因此有 $3^3=27$ 种；

从 A 到 B 的一一映射可以看成是全排列问题，因

此有 3！=6 种。

6. 若 $X=\{1,2,3\}$，f、g 均表示集合 $X\longrightarrow X$ 的映射，且 $f(1)=2$，$f(2)=3$，$f(3)=1$，$g(1)=2$，$g(2)=1$，$g(3)=3$，则 $f(g(1))$，$g(f(2))$，$f(g(f(3)))$ 的值是多少？

解：$f(g(1))=f(2)=3$

$g(f(2))=g(3)=3$

$f(g(f(3)))=f(g(1))=f(2)=3$。

7. (x,y) 在映射下的象是 $(x+y,x-y)$，求 $(1,2)$ 在 f 下的原象。

解：∵元素 $(1,2)$ 作为题设中映射的象

$$\therefore\begin{cases}x+y=1\\x-y=2\end{cases}\quad 解得\begin{cases}x=\dfrac{3}{2}\\y=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

即 $(1,2)$ 在 f 下的原象是 $(\frac{3}{2},-\frac{1}{2})$。

8. 判断下列对应是否为 A 到 B 的映射，是否为函数，是否有反函数，若有反函数，则求出反函数。

①$A=[0,\pi]$，$B=[0,1]$，$f:x\longrightarrow\sin x$；

②$A=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，$B=[-1,1]$，$f:x\longrightarrow\sin x$；

③$A=\{$空间四边形$\}$，$B=\{$四面体$\}$，f：以空间四边形的顶点为顶点的四面体；

④$A=R$，$B=R$，$f:x\longrightarrow\ln(x+\sqrt{1+x^2})$。

解：①是映射，是函数，但因 $A\longrightarrow B$ 的对应不是一一映射（如 $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}=\sin\frac{5\pi}{6}$），所以没有反函数；

②是映射，是函数，有反函数 $y=\arcsin x$；

③不是映射，不是函数；

④是映射，是函数，有反函数，设 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 有 $e^y=x+\sqrt{1+x^2}$，解出 $x=\frac{1-e^{2y}}{-2e^y}$，

又 $\frac{1-e^{2y}}{-2e^y}=\frac{-\frac{1}{e^y}+e^y}{2}=\frac{e^y-e^{-y}}{2}$

∴$\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的反函数为 $\frac{e^y-e^{-y}}{2}$

9. 已知集合 $A=\{x|x\in R\}$，$B=\{y|y\in R\}$，集合 A 中的元素按对应关系 $f:x\longrightarrow y=\mathrm{tg}2x$ 与 B 中元素对应，

①求 A 中元素 arctg5 的象；

②求 B 中元素 6 的原象；

③这样的对应是否是映射。

解：①∵$\mathrm{tg}2\mathrm{arctg}5$

$$=\frac{2\mathrm{tgarctg}5}{1-\mathrm{tg}^2\mathrm{arctg}5}=\frac{2\times5}{1-5^2}=-\frac{5}{12}$$

∴A 中元素 arctg5 的象是 $-\frac{5}{12}$；

②∵$\mathrm{tg}2x=6$，

∴$x=\frac{1}{2}\mathrm{arctg}6+\frac{k\pi}{2}(k\in Z)$，

即 B 中元素 6 的原象为 $\frac{k\pi}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{arctg}6,k\in Z$；

③因为 A 中的元素，B 中都有唯一的象，所以这样的对应可以构成映射。

10. 若点 (x,y) 在映射 f 下的象是 $(x+2y,x-2y)$，求 $(4,2)$ 在 f 下的原象。

解：据题意，$(4,2)$ 是在映射 f 下的象，因此有

$$\begin{cases}x+2y=4\\x-2y=2\end{cases}\quad 解之，得$$

$$x=3,y=\frac{1}{2}$$

因为 $(x+2y,x-2y)$ 在 f 下的原象是 (x,y)，所以 $(4,2)$ 在 f 的原象是 $(3,\frac{1}{2})$。

11. 已知集合 $A=\{(x,y)|x+y=1\}$，映射 $f:A\longrightarrow B$，在 f 作用下点 (x,y) 的象是 $(2^x,2^y)$，求集合 B。

解：∵映射 $f:A\longrightarrow B$，使集合 A 中的元素 (x,y) 在 f 作用下得到象 $(2^x,2^y)$，

∴逆映射 $f^{-1}:B\longrightarrow A$，使集合 B 中的元素 (x,y) 在 f^{-1} 作用下得到映射 $f:A\longrightarrow B$ 的原象应该是 $(\log_2x,\log_2y)$，$x>0,y>0$

又∵A 中元素 (x,y) 有 $x+y=1$，

∴原象 $(\log_2x,\log_2y)$ 有 $\log_2x+\log_2y=1$，

$\log_2xy=1$，$xy=2$

∴集合 $B=\{(x,y)|xy=2,x>0,y>0\}$。