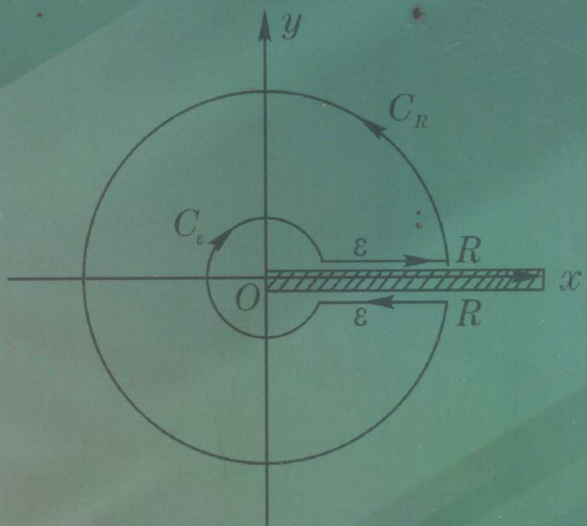
理论物理学导论 第一卷

数学物理方法

（第四版）

汪德新 编著



科学出版社

理论物理学导论　第一卷

数学物理方法

（第四版）

汪德新　编著

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书是国家精品课程配套教材，反映了数学物理方法近年来的发展. 本书结构新颖，逻辑清晰，语言流畅，论证严谨，体现了“深入浅出，学以致用”的宗旨.

本书内容包括复变函数导论、特殊函数与狄拉克 δ 函数、数学物理方程(用行波法、平均值法、分离变量法、积分变换法、格林函数法、保角变换法和变分法求解数理方程)，以及物理学中若干新的数学方法. 书中配有大量习题，书末附有习题答案和提示.

本书可作为普通高等院校物理系、电子工程系、应用数学系本科生的教材，也可供相关领域的读者参考.

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方法/汪德新编著. —4 版. —北京：科学出版社，2016. 1
理论物理学导论：第一卷
ISBN 978-7-03-046471-2

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①汪… Ⅲ. ①数学物理方法-高等学校-教材
Ⅳ. ①O411. 1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 282022 号

责任编辑：窦京涛 / 责任校对：张凤琴
责任印制：霍 兵 / 封面设计：迷底书装

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
保定市中画美凯印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
1997 年 8 月华中科学技术大学出版社第 一 版
2016 年 1 月第 四 版 开本：720×1000 1/16
2016 年 1 月第十二次印刷 印数：27 3/4
字数：559 000

定价：49. 00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

数学物理方法包括复变函数论、特殊函数论和数学物理方程等内容，它是讨论物理问题常用的数学方法，更是学习理论物理学和高新科学技术的重要基础.

普通物理学可以说是一门“归纳的学科”，它的数学工具是高等数学. 例如，在电磁学中，人们通过电磁现象和实验事实，总结出实验定律. 在这个过程中，使用高等数学就足够了. 理论物理学是一门“演绎的学科”. 例如，在电动力学中，将经典电动力学的三个基本定律（电荷守恒定律、麦克斯韦方程组、洛伦兹力公式）用于研究静电场与静磁场，研究电磁波的传播与电磁波的辐射，研究电磁场与物质的相互作用，等等. 在这个过程中，高等数学就无能为力了，必须运用数学物理方法.

本书的宗旨是希望能给初学者提供一本深入浅出、学以致用的入门书. 为此，我们作了如下几个方面的努力：

（一）本书内容与理论体系

第一篇：复变函数导论. 着重讨论解析函数的微分性质、积分性质、幂级数展开性质和留数理论. 此外，还介绍解析延拓和多值函数的一些基本概念.

第二篇：特殊函数　场论与狄拉克 δ 函数. 勒让德函数和贝塞尔函数是分离变量法的数学工具，场论与 δ 函数是学习数学物理方程特别是格林函数法的数学工具，将它们置于数学物理方程的前面是一个尝试. 实践证明，这样做的“得”大于“失”.

第三篇：数学物理方程. 本篇将采用行波法、平均值法、分离变量法、积分变换法、格林函数法、保角变换法和变分法求解数学物理方程.

第四篇：数学物理方法的若干新兴分支. 本篇用非常浅显的语言介绍了近年来备受关注的“典型非线性方程的孤立波解”、“Z 变换”和“小波变换”这三个专题.

（二）学习理论与演练习题的关系

学好数学物理方法的基本概念、基本定理、基本方法，是应用这些方法解决物理问题的基础. 我们努力以清晰的思路为引导，以流畅的语言为载体，通过实例形象地介绍基本概念，努力突出定理证明的中心环节，时时疏理数学思想的来龙去脉，处处展现不同方法的横向对比，认真总结典型题目的解题步骤以求举一反三，努力编纂物理上富有价值的题目以利触类旁通.

当然，要把数学物理方法真正学到手，还必须动手计算大量的题目. 为此，配备了数百道例题和习题，书末附有习题答案或解答. 如能正确使用它，相信对学生独立工作能力的培养和严谨科学作风的形成，将会发挥积极的作用.

(三)本书没有代替读者作“章节小结”的训练

自己动手作小结对初学者是非常重要的一环. 著名数学家华罗庚先生曾说过：

> “应该怎样学会读书呢?”“在对书中每一个问题都经过细嚼慢咽，真正懂得之后，就需要进一步把全书各部分内容串连起来理解，加以融会贯通，从而弄清楚什么是书中的主要问题，以及各个问题之间的关联. 这样我们就能抓住统帅全书的基本线索，贯串全书的精神实质. 我常常把这种读书过程，叫作‘从厚到薄’的过程. ……愈是懂得透彻，就愈有薄的感觉. 这是每个科学家都要经历的过程.”
>
> ——华罗庚《学·思·锲而不舍》

(四)华中师范大学量子光学实验室李高翔教授、吴少平教授精心制作了本书的课件，已发布在华中师大精品课程网站上(http://202.114.36.12/lgx/). 同济大学物理系羊亚平教授，刘要稳教授，复旦大学林志方教授，华东师范大学熊大元副教授也制作了本书的课件. 这为初次使用本书的任课教师提供了方便，作者要对各位教授为此付出的辛劳表示深切的谢意!

(五)本书的习题详解约 18 万字，将提供给使用教材的任课教师，需要者请与科学出版社联系.

(六) 作者编写的“理论物理学导论”丛书包括：第一卷《数学物理方法》，第二卷《电动力学》，第三卷《量子力学》，第四卷《统计物理学》.

本书第一版出版后，作者连续在华中师范大学物理系基地班讲授了 6 届(1996～2001 级). 第三版在第二版的基础上，对大部分章节作了全面的修改和补充.

本书的顺利出版，得到科学出版社高教数理分社的大力支持，在此表示衷心的感谢. 本书还得到华中师范大学物理科学与技术学院、物理系领导的关心和支持，在此表示深切的谢意. 第四版在第 8 章增加了场论的内容，为学习数学物理方程作更好的铺垫.

在本书的使用过程中，得到华中师范大学和兄弟院校讲授“数学物理方法”课程的各位任课老师的热情支持，在此表示诚挚的感谢!

在本书即将出版之际，我要特别感谢兰州大学物理系汪志诚教授，南京大学天文系汪珍如教授和中国科学院院士、南京大学天文系曲钦岳教授多年来对我的关心和鼓励.

最后，还要感谢作者早年在中山大学求学时的同窗好友、香港企业家朱鹤龄先生对本书第一版的友情资助.

由于作者水平所限，加之时间仓促，谬误之处在所难免，恳请读者批评指正.

汪德新

2015 年 1 月 28 日于武昌桂子山

目　录

第三篇 数学物理方程

第四篇　数学物理方法的若干新兴分支

第一篇　复变函数导论

自变量为复数的函数称为复变函数.

本篇讨论复变函数论的基本概念、基本定理和基本方法,以及若干实际运用.解析函数是本篇研究的重点.

第 1 章介绍复变函数的微分理论.着重讨论解析函数的微分性质及其应用.

第 2 章介绍复变函数的积分理论.着重讨论解析函数的积分性质及其应用.

第 3 章介绍复变函数的级数理论.着重讨论解析函数与泰勒(Taylor)级数、洛朗(Laurent)级数的关系及其应用.

第 4 章介绍留数理论,它是复变函数积分理论与级数理论相结合的产物.本章利用留数定理进行实变积分计算,整数与半整数级数和的计算.

第 5 章介绍解析延拓与多值函数的一些基本概念.着重讨论扩大解析函数的定义域,以及将多值函数转化为黎曼(Riemann)面上的单值解析函数的问题.

复变函数导论是本书其后三篇的基础.

第 1 章　复变函数与解析函数

本章首先介绍复数与复变函数的基本概念. 在此基础上，着重讨论解析函数的定义、充要条件，解析函数的共轭性、调和性和保角性，以及常用的解析函数的性质.

解析函数是本篇各章研究的主要对象.

1.1 复　数

本节讨论复数的基本概念，复数的几何表示法，复数的代数运算和复数序列的极限.

1.1.1 复数的基本概念

代数方程 $z^2+1=0$ 的根为 $z=\pm\sqrt{-1}$. 1777 年瑞士著名数学家和物理学家欧拉(Euler)首次采用记号

$$\mathrm{i}=\sqrt{-1} \tag{1.1.1}$$

并将 i 称为虚数单位.

形如 $z=x+\mathrm{i}y$ 的数称为复数. 实数 x 与 y 分别称为复数 z 的实部与虚部，记作

$$x=\mathrm{Re}z,\qquad y=\mathrm{Im}z \tag{1.1.2}$$

若两复数的实部与虚部分别相等：$x_1=x_2$，$y_1=y_2$，则称这两复数相等

$$z_1=z_2 \tag{1.1.3}$$

若两复数的实部相等，虚部差一负号时，则称两复数互为共轭复数. $z=x+\mathrm{i}y$ 的共轭复数为

$$z^*=(x+\mathrm{i}y)^*=x-\mathrm{i}y \tag{1.1.4}$$

1.1.2 复数的几何表示法

复数可以用平面上的点或球面上的点来表示，分别称为复数的平面表示法和球面表示法.

1. 用复平面表示复数

如果在平面中引入笛卡儿直角坐标或平面极坐标，可以得到复数的代数表示、

三角表示和指数表示.

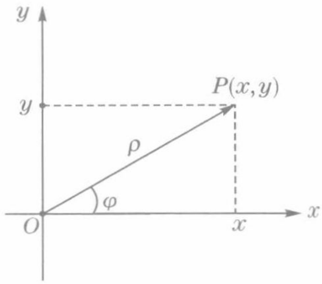


图 1.1

(1) 代数表示. 在平面中引入直角坐标系，则复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 可以用平面上的点 (x,y) 表示. 该平面上每一个点与一个复数对应，反之亦然. 这样，所有复数与平面上所有的点建立了一一对应关系，平面 xOy 称为复数平面(简称复平面)，如图 1.1 所示.

每一个复数还可以用一个矢量来表示. 矢量由坐标原点 $O(0,0)$ 指向点 $P(x,y)$，$\overrightarrow{OP}$ 称为复矢量.

(2) 三角表示. 在复数平面中引入平面极坐标系，则复平面上的点 (x,y) 可用极坐标表示为

$$x=\rho\cos\varphi,\qquad y=\rho\sin\varphi \tag{1.1.5}$$

利用直角坐标与极坐标的变换，可将复数的代数表示变换为三角表示

$$z=x+\mathrm{i}y=\rho(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi) \tag{1.1.6}$$

ρ 和 φ 分别称为复数的模与辐角，记作

$$\rho=|z|=\sqrt{x^2+y^2},\qquad \varphi=\mathrm{Arg}z \tag{1.1.7}$$

可以用反正切函数表示复数的辐角(参看习题 1.1.1). 由于三角函数的周期性，使得复数的辐角不是唯一的，即

$$\mathrm{Arg}z=\varphi_0\pm 2k\pi=\arg z\pm 2k\pi,\qquad k=0,1,2,\cdots \tag{1.1.8}$$

式中 $\varphi_0=\arg z$ 称为辐角的主值. 上述性质称为辐角的多值性. 辐角主值取值的范围是

$$0\leqslant \arg z<2\pi \tag{1.1.9}$$

当复数 $z=0$ 时，$\arg z$ 没有确定值，说"$z=0$ 的辐角等于多少"是没有意义的.

(3)指数表示. 复数的指数表示为

$$z=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \tag{1.1.10}$$

利用欧拉公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}=\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi$ 可以将复数的三角表示变换为指数表示①

$$z=\rho(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \tag{1.1.11}$$

2. 用复数球面表示复数　无穷远点

首先，过复平面的原点 O 作一个球面与复平面相切，如图 1.2 所示. 过原点 O

---

① 复变函数的泰勒级数在 3.3 节讨论，届时可导出欧拉公式. 当然，如果将实变函数的泰勒级数推广到复数，也可以得到欧拉公式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}=1+\frac{\mathrm{i}\varphi}{1!}+\frac{(\mathrm{i}\varphi)^2}{2!}+\frac{(\mathrm{i}\varphi)^3}{3!}+\cdots=\left(1-\frac{\varphi^2}{2!}+\frac{\varphi^4}{4!}-\cdots\right)+\mathrm{i}\left(\frac{\varphi}{1!}-\frac{\varphi^3}{3!}+\frac{\varphi^5}{5!}-\cdots\right)$$
$$=\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi$$

的直径的另一端称为北极 N. 然后,作射线 NP 交球面于 P'点. 这样,球面上所有的点(除北极点 N 以外)均与复平面上所有的点一一对应,也与全体复数一一对应. 因此,可以用球面上的点来表示复数. 并把这球面称为复数球面(简称复球面).

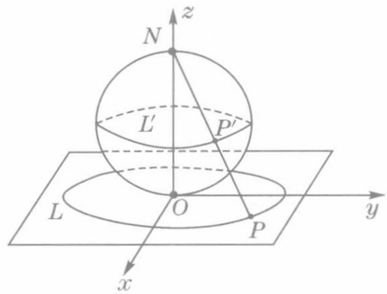


图 1.2

由图 1.2 可见,复平面上圆 L 上的点与复球面纬线 L'上的点对应,圆 L 内部和外部的点分别与纬线 L'下方和上方的点对应. 当复平面上圆 L 的半径 $\rho\to\infty$时,复球面上的纬线 L'趋向球顶并缩成一点 N. 这样,复平面的无穷远处与复数球的北极点 N 对应. 在这个意义上,把复平面的无限远处看成一个"点",称为无穷远点.

1.1.3 复数的代数运算

(1) 加法. 复数 z_1 与 z_2 的和定义为

$$z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + \mathrm{i}(y_1 + y_2) \tag{1.1.12}$$

几何意义:两复矢量之和遵守平行四边形法则,如图 1.3 所示.

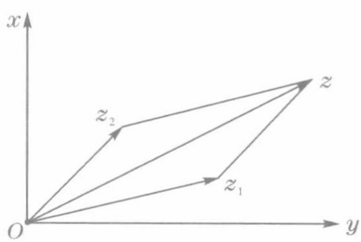


图 1.3

利用"三角形两边长度之和不小于第三边",以及"三角形一边之长度不小于另两边长度之差"可得两个重要不等式

$$|z_1| + |z_2| \geqslant |z_1 + z_2| \tag{1.1.13}$$

$$|z_1 - z_2| \geqslant \big||z_1| - |z_2|\big| \tag{1.1.14}$$

式(1.1.13)还可推广为:多个复矢量的模之和不小于多个复矢量之和的模. 这些不等式在导出复变函数积分的基本性质时要用到(见 2.1 节).

(2) 减法. 复数的减法定义为加法的逆运算. 如果 $z+z_2=z_1$,则

$$z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + \mathrm{i}(y_1 - y_2) \tag{1.1.15}$$

(3) 乘法. 复数 z_1 与 z_2 的乘积定义为

$$z = z_1 z_2 = (x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 + \mathrm{i}y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \mathrm{i}(x_1 y_2 + y_1 x_2) \tag{1.1.16}$$

复数乘法采用指数形式更方便,即

$$z = z_1 z_2 = \rho_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1} \rho_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2} = \rho_1 \rho_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1 + \varphi_2)} \tag{1.1.17}$$

特别是,两共轭复数的乘积等于它们的模的平方(简称模方)

$$zz^* = (x + \mathrm{i}y)(x - \mathrm{i}y) = x^2 + y^2 = |z|^2 \tag{1.1.18}$$

(4) 乘方. 复数的乘方可由乘法规则得到,复数 z 的整数次幂为

$$z^n = (\rho e^{i\varphi})^n = \rho^n e^{in\varphi} \tag{1.1.19}$$

(5) 除法. 复数的除法是乘法的逆运算. 如果 $zz_2=z_1$,则

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2} = \frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)} = \frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2} + i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2} \tag{1.1.20}$$

同样,复数的除法采用指数式较方便,即

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 e^{i\varphi_1}}{\rho_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} \tag{1.1.21}$$

(6) 开方. 复数的开方是乘方的逆运算,如果 $w^n=z$,则

$$w = \sqrt[n]{z} \tag{1.1.22}$$

令

$$w = \rho e^{i\varphi}, \qquad z = re^{i\theta} \tag{1.1.23}$$

代入 $w^n=z$,得 $\rho^n e^{in\varphi}=re^{i\theta}$,由此得

$$\rho^n = r, \quad n\varphi - \theta = 2k\pi, \qquad k=0,1,\cdots,n-1 \tag{1.1.24}$$

即

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}, \qquad k=0,1,\cdots,n-1 \tag{1.1.25}$$

易见,当 $k=0,1,\cdots,n-1$ 时,式(1.1.25)给出 n 个不同的根. 这表明,辐角的多值性是复数开方有多个根的根源.

多值函数将在第 5 章讨论,如无特别声明,第 2～4 章的复变函数均为单值函数.

【例 1.1.1】 试证明棣莫弗(De Moivre)公式

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi \tag{1.1.26}$$

并用 $\cos\varphi$ 及 $\sin\varphi$ 表示 $\cos n\varphi$ 及 $\sin n\varphi$.

证明　对于 $|z|=\rho=1$ 的复数 z,由 z^n 的三角表示与指数表示相等,便有

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = e^{in\varphi} \tag{1.1.27}$$

将欧拉公式 $e^{in\varphi}=\cos n\varphi+i\sin n\varphi$ 代入上式,即得棣莫弗公式.

利用牛顿(Newton)二项式定理展开棣莫弗公式左边,便有

$$\cos n\varphi + i\sin n\varphi = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k i^k \sin^k\varphi \cos^{n-k}\varphi$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{i^k n!}{k!(n-k)!} \sin^k\varphi \cos^{n-k}\varphi \tag{1.1.28}$$

由于求和式中 $k=2l$ 的项为实数,$k=2l+1$ 的项为虚数,根据上式两边的实部与虚部分别相等,即得

$$\cos n\varphi = \sum_{l=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^l n!}{(2l)!(n-2l)!} \sin^{2l}\varphi \cos^{n-2l}\varphi \tag{1.1.29}$$

$$\sin n\varphi=\sum_{l=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^l n!}{(2l+1)!(n-2l-1)!}\sin^{2l+1}\varphi\cos^{n-2l-1}\varphi \tag{1.1.30}$$

式中记号

$$\left[\frac{n}{2}\right]=\begin{cases}\dfrac{n}{2}, & \text{当 } n \text{ 为偶数}\\[2mm] \dfrac{n-1}{2}, & \text{当 } n \text{ 为奇数}\end{cases} \tag{1.1.31}$$

这个记号常用来简化公式的表达,6.1 节将利用它来表示勒让德多项式.

【**例 1.1.2**】 求 $w=\sqrt[3]{\mathrm{i}}$的值.

解 将 $\mathrm{i}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}$代入,得

$$w=\sqrt[3]{\mathrm{i}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)},\qquad k=0,1,2 \tag{1.1.32}$$

这表明,$\sqrt[3]{\mathrm{i}}$有三个不同的根

$$w_0=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}},\qquad w_1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5}{6}\pi},\qquad w_2=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3}{2}\pi} \tag{1.1.33}$$

1.1.4 复数序列的极限

1. 复数序列

按一定顺序排列的复数 $z_n=x_n+\mathrm{i}y_n$, $n=1,2,\cdots$,称为复数序列,记作$\{z_n\}$. 一个复数序列等价于两个实数序列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$的有序组合.

2. 聚点与极限

(1) 聚点. 任给 $\varepsilon>0$,存在无穷多个 z_n 满足

$$|z_n-z|<\varepsilon \tag{1.1.34}$$

则称 z 为复数序列$\{z_n\}$的一个聚点.

(2) 极限. 任给 $\varepsilon>0$,存在 $N(\varepsilon)>0$,使当 $n>N(\varepsilon)$时,有

$$|z_n-z|<\varepsilon \tag{1.1.35}$$

则称 z 为复数序列$\{z_n\}$的极限,或称复数序列收敛于 z. 记作

$$\lim_{n\to\infty}z_n=z \tag{1.1.36}$$

(3) 有的序列可以有多个聚点,当序列的极限存在时,序列的极限是序列的唯一聚点.

例如,实数序列$\{x_n\}$

$$\frac{1}{3},-\frac{2}{4},\frac{3}{5},-\frac{4}{6},\frac{5}{7},-\frac{6}{8},\cdots \tag{1.1.37}$$

就有两个聚点.

在实数序列$\{x_n\}$中，数值最大的聚点称为$\{x_n\}$的上极限，记作$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n$；数值最小的聚点称为$\{x_n\}$的下极限，记作$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n$，对于序列(1.1.37)，有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n = 1, \qquad \underline{\lim_{n\to\infty}}x_n = -1 \tag{1.1.38}$$

上极限与下极限的概念在计算级数收敛半径时要用到(见 3.2 节).

3. 复数序列极限存在的充要条件——柯西判别法

任给 $\varepsilon>0$，存在自然数 $N(\varepsilon)$，当 $n>N(\varepsilon)$时，对任意正整数 p，有

$$|z_{n+p}-z_n|<\varepsilon \tag{1.1.39}$$

则$\{z_n\}$的极限存在，定理的证明见习题 1.1.7.

4. 极限趋于无穷

任给 $M>0$，存在自然数 $N(\varepsilon)$，使当 $n>N(\varepsilon)$时，有

$$|z_n|>M \tag{1.1.40}$$

则$\{z_n\}$趋于无穷，记作

$$\lim_{n\to\infty}z_n=\infty \tag{1.1.41}$$

习　题　1.1

1.1.1　已知反正切的主值范围为

$$-\frac{\pi}{2}<\arctan\frac{y}{x}<\frac{\pi}{2}$$

试用 $\arctan\dfrac{y}{x}$ 表示辐角的主值 $\arg z$.

1.1.2　试写出下列复数的三角表示及指数表示.

(1) e^{1+i}；　(2) $1-i\sqrt{3}$；　(3) $1-\cos\alpha+i\sin\alpha, 0\leqslant\alpha\leqslant\pi$；

(4) $(\sqrt{3}+i)^{-3}$；　(5) $\dfrac{2i}{-1+i}$.

1.1.3　设$|b|<1$，$|a|=1$，试证明$\left|\dfrac{a-b}{1-a^*b}\right|=1$.

1.1.4　设复数 z_1,z_2,z_3 满足$\dfrac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=\dfrac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$，试证

$$|z_2-z_1|=|z_3-z_1|=|z_2-z_3|$$

1.1.5　试证明式(1.1.13)和式(1.1.14).

1.1.6　试证明

$$\sum_{k=1}^{n}\cos k\varphi=\frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\varphi-\sin\dfrac{\varphi}{2}}{2\sin\dfrac{\varphi}{2}}; \qquad \sum_{k=1}^{n}\sin k\varphi=\frac{-\cos\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\varphi+\cos\dfrac{\varphi}{2}}{2\sin\dfrac{\varphi}{2}}$$

1.1.7 试利用实数序列极限存在的柯西判别法，证明复数序列极限存在的柯西判别法.

1.1.8 试用 ε-N 的语言证明序列 $\left\{\left(\frac{1+i}{2}\right)^n\right\}$ 的极限为零.

1.1.9 求下列序列的聚点和极限.

(1) $z_n=\left(\frac{3+4i}{6}\right)^n$； (2) $z_n=(-1)^n\frac{n}{2n+1}$；

(3) $z_n=\frac{i^{n-1}}{n}$； (4) $z_n=(-1)^n\frac{1}{2n+1}$；

(5) $z_n=i^{n-1}$； (6) $z_n=n+(-1)^n(2n+1)i$；

(7) $z_n=\left(1+\frac{i}{n}\right)\sin\frac{n\pi}{6}$； (8) $z_n=\left(1+\frac{1}{2n}\right)\cos\frac{n\pi}{3}$.

1.2 复变函数 复变函数的极限与连续

本节介绍区域的概念，复变函数的定义及其几何意义，复变函数的极限与连续.

1.2.1 区域

如果将函数的概念由实数域推广到复数域，那么自变量取值的范围就是复平面上的区域(称为定义域)，如图 1.4 所示，开区域 D 是指边界线 L 所包围的区域(不含边界线 L).

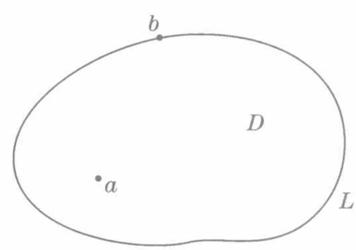


图 1.4

如果要给区域作出严格的定义，则要介绍有关点集(点的集合)的一些基本概念.

(1) 点 z_0 的 ε 邻域. 它是指以点 z_0 为圆心，任意小的正实数 ε 为半径的一个开圆，即满足

$$|z-z_0|<\varepsilon \tag{1.2.1}$$

的点的集合.

今后还经常会用到“点 z_0 的无心邻域”的概念(见第 3 章). 它是指满足

$$0<|z-z_0|<\varepsilon \tag{1.2.2}$$

的点的集合，与前者的区别就是不包含点 z_0.

(2) 点集 D 的内点. 若某点的 ε 邻域中所有的点都属于点集 D，则此点称为点集 D 的内点，如图 1.4 中的 a 点.

(3) 区域. 满足如下两个条件的点集 D 称为区域(开区域)：

① 每一点都是内点(开集性)；

② 点集 D 中的任意两点都可以用一条由该点集 D 的点构成的曲线连接起来(连通性).