

考研数学真题试卷

数学三

薛威 编



化学工业出版社

考研数学真题试卷

数学三

薛威 编



化学工业出版社

·北京·

内容简介

《考研数学真题试卷·数学三》内容为2008~2018年共11年全国研究生入学统一考试(数学三)试题及其答案,目的旨在配合《考研数学历年真题名师解析·数学三》一书的题型讲解进行模拟训练。注意:本书试卷中每一题标注的页码为该题在《考研数学历年真题名师解析·数学三》中对应的页码。

康 颖 玲

RT10

机械工业出版社

目 录

2008 全国硕士研究生入学统一考试(数学三) 试题	1
2008 全国硕士研究生入学统一考试(数学三) 答案	9
2009 全国硕士研究生入学统一考试(数学三) 试题	10
2009 全国硕士研究生入学统一考试(数学三) 答案	18
2010 全国硕士研究生入学统一考试(数学三) 试题	19
2010 全国硕士研究生入学统一考试(数学三) 答案	27
2011 全国硕士研究生入学统一考试(数学三) 试题	28
2011 全国硕士研究生入学统一考试(数学三) 答案	36
2012 全国硕士研究生入学统一考试(数学三) 试题	37
2012 全国硕士研究生入学统一考试(数学三) 答案	45
2013 全国硕士研究生入学统一考试(数学三) 试题	46
2013 全国硕士研究生入学统一考试(数学三) 答案	54
2014 全国硕士研究生入学统一考试(数学三) 试题	55
2014 全国硕士研究生入学统一考试(数学三) 答案	63
2015 全国硕士研究生入学统一考试(数学三) 试题	64
2015 全国硕士研究生入学统一考试(数学三) 答案	72
2016 全国硕士研究生入学统一考试(数学三) 试题	73
2016 全国硕士研究生入学统一考试(数学三) 答案	81
2017 全国硕士研究生入学统一考试(数学三) 试题	82
2017 全国硕士研究生入学统一考试(数学三) 答案	90
2018 全国硕士研究生入学统一考试(数学三) 试题	91
2018 全国硕士研究生入学统一考试(数学三) 答案	99

2008 全国硕士研究生入学统一考试(数学三) 试题

一、选择题(1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分.)

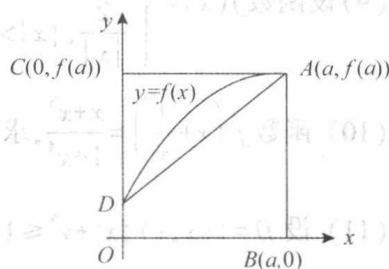
(1) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上连续, 则 $x=0$ 是函数 $g(x) = \frac{\int_0^x f(t) dt}{x}$ 的(). p25

- (A) 跳跃间断点 (B) 可去间断点 (C) 无穷间断点 (D) 振荡间断点

(2) 如图, 曲线段的方程为 $y=f(x)$, 函数在区间 $[0, a]$ 上

有连续导数, 则定积分 $\int_0^a xf'(x) dx$ 等于(). p61

- (A) 曲边梯形 $ABOD$ 面积 (B) 梯形 $ABOD$ 面积
(C) 曲边三角形 ACD 面积 (D) 三角形 ACD 面积



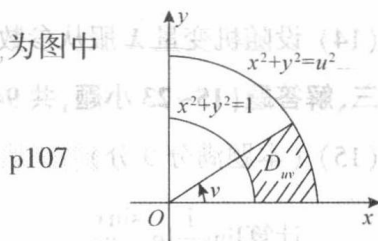
(3) 已知 $f(x, y) = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$, 则(). p85

- (A) $f'_x(0, 0), f'_y(0, 0)$ 都存在 (B) $f'_x(0, 0)$ 不存在, $f'_y(0, 0)$ 存在
(C) $f'_x(0, 0)$ 存在, $f'_y(0, 0)$ 不存在 (D) $f'_x(0, 0), f'_y(0, 0)$ 都不存在

(4) 设函数 f 连续, 若 $F(u, v) = \iint_{D_{uv}} \frac{f(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy$, 其中区域 D_{uv} 为图中

阴影部分, 则 $\frac{\partial F}{\partial u} = ()$.

- (A) $vf(u^2)$ (B) $\frac{v}{u}f(u^2)$ (C) $vf(u)$ (D) $\frac{v}{u}f(u)$



(5) 设 A 为 n 阶非零矩阵, E 为 n 阶单位矩阵, 若 $A^3 = O$, 则(). p156

- (A) $E-A$ 不可逆, $E+A$ 不可逆 (B) $E-A$ 不可逆, $E+A$ 可逆
(C) $E-A$ 可逆, $E+A$ 可逆 (D) $E-A$ 可逆, $E+A$ 不可逆

(6) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, 则在实数域上与 A 合同的矩阵为(). p215

- (A) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

(7) 设随机变量 X, Y 独立同分布, 且 X 的分布函数为 $F(x)$, 则 $Z = \max\{X, Y\}$ 的分布函数为 (). p241

- (A) $F^2(x)$ (B) $F(x)F(y)$
 (C) $1 - [1 - F(x)]^2$ (D) $[1 - F(x)][1 - F(y)]$

(8) 设随机变量 $X \sim N(0, 1), Y \sim N(1, 4)$, 且相关系数 $\rho_{XY} = 1$, 则 (). p254

- (A) $P\{Y = -2X - 1\} = 1$ (B) $P\{Y = 2X - 1\} = 1$
 (C) $P\{Y = -2X + 1\} = 1$ (D) $P\{Y = 2X + 1\} = 1$

二、填空题(9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分.)

(9) 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & |x| \leq c \\ \frac{2}{|x|}, & |x| > c \end{cases}$, 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 则 $c =$ _____. p26

(10) 函数 $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = \frac{x+x^3}{1+x^4}$, 求积分 $\int_2^{3\sqrt{2}} f(x) dx =$ _____. p65

(11) 设 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, 则 $\iint_D (x^2 - y) dx dy =$ _____. p111

(12) 微分方程 $xy' + y = 0$ 满足条件 $y(1) = 1$ 的解是 $y =$ _____. p134

(13) 设 3 阶矩阵 A 的特征值是 $1, 2, 2$, E 为 3 阶单位矩阵, 则 $|4A^{-1} - E| =$ _____. p151

(14) 设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布, 则 $P\{X = EX^2\} =$ _____. p228

三、解答题(15~23 小题, 共 94 分.)

(15) (本题满分 9 分) p111

计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \frac{\sin x}{x}$.

(16) (本题满分 10 分)

p87

设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^2+y^2-z=\varphi(x+y+z)$ 所确定的函数, 其中 φ 具有 2 阶导数且 $\varphi' \neq -1$.

(I) 求 dz ; (II) 记 $u(x,y)=\frac{1}{x-y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}\right)$, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}$.

(17) (本题满分 11 分)

p113

计算 $\iint_D \max\{xy, 1\} dx dy$, 其中 $D=\{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$.

(18) (本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 是周期为 2 的连续函数,

(I) 证明对任意实数 t , 有 $\int_t^{t+2} f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx$;

(II) 证明 $G(x) = \int_0^x \left[2f(t) - \int_t^{t+2} f(s) ds \right] dt$ 是周期为 2 的周期函数.

(19) (本题满分 10 分)

设银行存款的年利率为 $r=0.05$, 并依年复利计算, 某基金会希望通过存款 A 万元实现第一年提取 19 万元, 第二年提取 28 万元, \dots , 第 n 年提取 $(10+9n)$ 万元, 并能按此规律一直提取下去, 问 A 至少应为多少万元?

(20) (本题满分12分)

p169

设 n 元线性方程组 $Ax=b$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(I) 证明行列式 $|A| = (n+1)a^n$;

(II) 当 a 为何值时, 该方程组有唯一解, 并求 x_1 ;

(III) 当 a 为何值时, 该方程组有无穷多解, 并求通解.

(21) (本题满分 10 分)

设 A 为 3 阶矩阵, α_1, α_2 为 A 的分别属于特征值 $-1, 1$ 的特征向量, 向量 α_3 满足

$$A\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_3,$$

(I) 证明 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关;

(II) 令 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 求 $P^{-1}AP$.

(22) (本题满分 11 分)

(p241)

设随机变量 X 与 Y 相互独立, X 的概率分布为 $P\{X=i\} = \frac{1}{3} (i=-1, 0, 1)$, Y 的概率密度

为 $f_Y(y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 记 $Z = X + Y$.

(I) 求 $P\left\{Z \leq \frac{1}{2} \mid X=0\right\}$;

(II) 求 Z 的概率密度 $f_Z(z)$.

(23) (本题满分 11 分)

设 X_1, X_2, \dots, X_n 是总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本. 记

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, \quad T = \bar{X}^2 - \frac{1}{n} S^2.$$

(I) 证明 T 是 μ^2 的无偏估计量;

(II) 当 $\mu=0, \sigma=1$ 时, 求 DT .

2008 全国硕士研究生入学统一考试(数学三)答案

一、选择题

(1)(B). (2)(C). (3)(B). (4)(A). (5)(C). (6)(D). (7)(A). (8)(D).

二、填空题

(9)1. (10) $\frac{1}{2}\ln 3$. (11) $\frac{\pi}{4}$. (12) $\frac{1}{x}$. (13)3. (14) $\frac{1}{2e}$.

三、解答题

(15) $-\frac{1}{6}$. (16)(I) $dz = \frac{1}{1+\varphi'} [(2x-\varphi')dx + (2y-\varphi')dy]$. (II) $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{2(2x+1)\varphi''}{(1+\varphi')^3}$.

(17) $\frac{19}{4} + \ln 2$. (18)略. (19)3 980 万元.

(20)(I)略. (II) $a \neq 0, x_1 = \frac{n}{(n+1)a}$.

(III) $a=0$, 通解为 $\mathbf{x} = (0, 1, 0, \dots, 0)^T + k(1, 0, \dots, 0)^T$ (k 为任意常数).

(21)(I)略. (II) $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(22)(I) $\frac{1}{2}$. (II) $f_z(z) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & -1 \leq z < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$.

(23)(I)证明略. (II) $DT = \frac{2}{n(n-1)}$.

2009 全国硕士研究生入学统一考试(数学三) 试题

一、选择题(1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分.)

(1) 函数 $f(x) = \frac{x-x^3}{\sin \pi x}$ 的可去间断点的个数为().

p26

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 无穷多个

(2) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = x - \sin ax$ 与 $g(x) = x^2 \ln(1-bx)$ 是等价无穷小, 则().

p21

- (A) $a=1, b=-\frac{1}{6}$ (B) $a=1, b=\frac{1}{6}$ (C) $a=-1, b=-\frac{1}{6}$ (D) $a=-1, b=\frac{1}{6}$

(3) 使不等式 $\int_1^x \frac{\sin t}{t} dt > \ln x$ 成立的 x 的范围是().

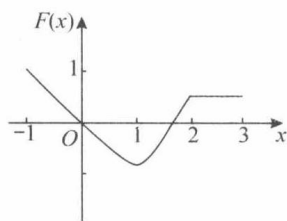
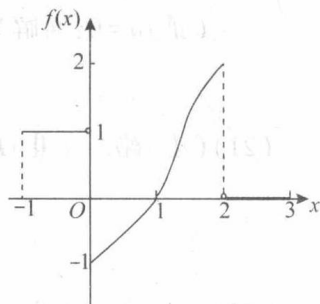
p61

- (A) $(0, 1)$ (B) $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ (C) $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ (D) $(\pi, +\infty)$

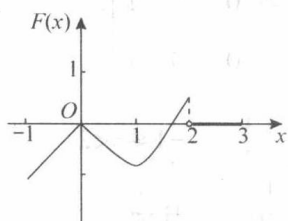
(4) 设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-1, 3]$ 上的图形如右图所示, 则函数

$F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 的图形是().

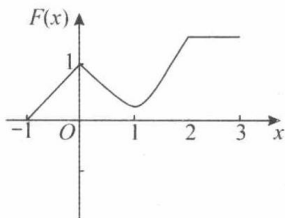
p69



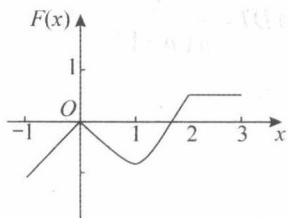
(A)



(B)



(C)



(D)

(5) 设 A, B 均为 2 阶矩阵, A^*, B^* 分别为 A, B 的伴随矩阵. 若 $|A|=2, |B|=3$, 则分块矩阵

$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为().

p157

(A) $\begin{pmatrix} \mathbf{O} & 3\mathbf{B}^* \\ 2\mathbf{A}^* & \mathbf{O} \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} \mathbf{O} & 2\mathbf{B}^* \\ 3\mathbf{A}^* & \mathbf{O} \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} \mathbf{O} & 3\mathbf{A}^* \\ 2\mathbf{B}^* & \mathbf{O} \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} \mathbf{O} & 2\mathbf{A}^* \\ 3\mathbf{B}^* & \mathbf{O} \end{pmatrix}$

(6) 设 A, P 均为 3 阶矩阵, P^T 为 P 的转置矩阵, 且 $P^TAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. 若 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$,

$Q = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3)$, 则 $Q^T A Q$ 为(). p154

(A) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(7) 设事件 A 与事件 B 互不相容, 则(). p220

(A) $P(\overline{A}B) = 0$ (B) $P(AB) = P(A)P(B)$
(C) $P(A) = 1 - P(B)$ (D) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1$

(8) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 X 服从标准正态分布 $N(0, 1)$, Y 的概率分布为 $P\{Y=0\} = P\{Y=1\} = \frac{1}{2}$. 记 $F_Z(z)$ 为随机变量 $Z = XY$ 的分布函数, 则函数 $F_Z(z)$ 的间断点个数为

(). p242

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

二、填空题(9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分.)

(9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2} - 1} =$. p12

(10) 设 $z = (x + e^y)^x$, 则 $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1,0)} =$. p88

(11) 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n - (-1)^n}{n^2} x^n$ 的收敛半径为 . p125

(12) 设某产品的需求函数为 $Q = Q(p)$, 其对价格 p 的弹性 $\varepsilon_p = 0.2$, 则当需求量为 10000 件时, 价格增加 1 元会使产品收益增加 _____ 元. p56

(13) 设 $\alpha = (1, 1, 1)^T$, $\beta = (1, 0, k)^T$. 若矩阵 $\alpha\beta^T$ 相似于 $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $k =$.

p205

(14) 设 X_1, X_2, \dots, X_m 为来自二项分布总体 $B(n, p)$ 的简单随机样本, \bar{X} 和 S^2 分别为样本均值和样本方差. 记统计量 $T = \bar{X} - S^2$, 则 $ET =$ _____ . p263

三、解答题(15~23 小题, 满分 94 分)

(15) (本题满分 9 分) p97

求二元函数 $f(x, y) = x^2(2+y^2) + y \ln y$ 的极值.

(16) (本题满分10分)

p63

计算不定积分 $\int \ln\left(1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}}\right) dx (x > 0)$.

(17) (本题满分10分)

p113

计算二重积分 $\iint_D (x-y) dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) \mid (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2, y \geq x\}$.