

中国科学技术大学精品教材

李永池　张永亮　高光发 / 编著

连续介质力学基础及其应用

Continuum Mechanics
Fundamentals and Applications

中国科学技术大学出版社

需要全本请访问 www.ertongbook.com



连续介质力学基础及其应用

Continuum Mechanics
Fundamentals and Applications

选题编辑　田　雪
责任编辑　田　雪　王慧莉
封面设计　广大迅风艺术

定价： 69.00 元

ISBN 978-7-312-04785-5

9 787312 047855 >

上架建议：力学类



中国科学技术大学精品教材

李永池　张永亮　高光发 / 编著

Continuum Mechanics
Fundamentals and Applications

连续介质力学基础及其应用

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书力求用简练、清晰的语言对连续介质力学基础及其应用方面的问题进行介绍，涉及的基础知识主要有笛卡儿张量的基本知识、连续介质应力原理、主应力及最大剪应力、连续介质运动及变形描述、变形热力学及连续介质力学守恒定律和连续介质本构关系的初等理论等。为了使读者掌握应用连续介质知识求解问题的基本方法，本书对流体力学、固体力学和爆炸与冲击工程力学中常见的典型问题进行了介绍，所涉及问题的物理概念清晰明了，求解分析逻辑严谨。

本书可作为力学、工程热物理、工程科学、材料科学、地球和空间科学以及应用数学等专业的本科生教材，也可作为力学相关领域内研究生和科技工作者的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

连续介质力学基础及其应用/李永池，张永亮，高光发编著. —合肥：中国科学技术大学出版社，2019.10

(中国科学技术大学精品教材)

安徽省“十三五”重点出版物出版规划项目

安徽省高等学校一流教材

ISBN 978-7-312-04785-5

Ⅰ.连… Ⅱ.①李… ②张… ③高… Ⅲ.连续介质力学—高等学校—教材 Ⅳ.O33

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 205470 号

出版 中国科学技术大学出版社

安徽省合肥市金寨路 96 号，230026

http://press.ustc.edu.cn

https://zgkxjsdxcbs.tmall.com

印刷 安徽省瑞隆印务有限公司

发行 中国科学技术大学出版社

经销 全国新华书店

开本 787 mm×1092 mm 1/16

印张 28.25

插页 2

字数 723 千

版次 2019 年 10 月第 1 版

印次 2019 年 10 月第 1 次印刷

定价 69.00 元



编审委员会

主　任　侯建国

副主任　窦贤康　陈初升
　　张淑林　朱长飞

委　员（按姓氏笔画排序）

方兆本　史济怀　古继宝　伍小平
刘　斌　刘万东　朱长飞　孙立广
汤书昆　向守平　李曙光　苏　淳
陆夕云　杨金龙　张淑林　陈发来
陈华平　陈初升　陈国良　陈晓非
周学海　胡化凯　胡友秋　俞书勤
侯建国　施蕴渝　郭光灿　郭庆祥
奚宏生　钱逸泰　徐善驾　盛六四
龚兴龙　程福臻　蒋　一　窦贤康
褚家如　滕脉坤　霍剑青

需要全本请访问 www.ertongbook.com

总　序

2008年，为庆祝中国科学技术大学建校五十周年，反映建校以来的办学理念和特色，集中展示教材建设的成果，学校决定组织编写出版代表中国科学技术大学教学水平的精品教材系列。在各方的共同努力下，共组织选题281种，经过多轮、严格的评审，最后确定50种入选精品教材系列。

五十周年校庆精品教材系列于2008年9月纪念建校五十周年之际陆续出版，共出书50种，在学生、教师、校友以及高校同行中引起了很好的反响，并整体进入国家新闻出版总署的“十一五”国家重点图书出版规划。为继续鼓励教师积极开展教学研究与教学建设，结合自己的教学与科研积累编写高水平的教材，学校决定，将精品教材出版作为常规工作，以《中国科学技术大学精品教材》系列的形式长期出版，并设立专项基金给予支持。国家新闻出版总署也将该精品教材系列继续列入“十二五”国家重点图书出版规划。

1958年学校成立之时，教员大部分来自中国科学院的各个研究所。作为各个研究所的科研人员，他们到学校后保持了教学的同时又作研究的传统。同时，根据“全院办校，所系结合”的原则，科学院各个研究所在科研第一线工作的杰出科学家也参与学校的教学，为本科生授课，将最新的科研成果融入到教学中。虽然现在外界环境和内在条件都发生了很大变化，但学校以教学为主、教学与科研相结合的方针没有变。正因为坚持了科学与技术相结合、理论与实践相结合、教学与科研相结合的方针，并形成了优良的传统，才培养出了一批又一批高质量的人才。

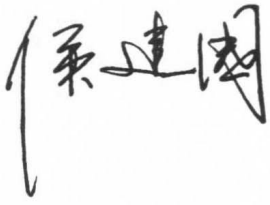
学校非常重视基础课和专业基础课教学的传统，也是她特别成功的原因之一。当今社会，科技发展突飞猛进、科技成果日新月异，没有扎实的基础知识，很难在科学技术研究中作出重大贡献。建校之初，华罗庚、吴有训、严济慈等老一辈科学家、教育家就身体力行，亲自为本科生讲授基础课。他们以渊博的学识、精湛的讲课艺术、高尚的师德，带出一批又一批杰出的年轻教员，培养了一届又一届优秀学生。入选精品教材系列的绝大部分是基础课或专业基础课的教材，

其作者大多直接或间接受到过这些老一辈科学家、教育家的教诲和影响，因此在教材中也贯穿着这些先辈的教育教学理念与科学探索精神。

改革开放之初，学校最先选派青年骨干教师赴西方国家交流、学习，他们在带回先进科学技术的同时，也把西方先进的教育理念、教学方法、教学内容等带回到中国科学技术大学，并以极大的热情进行教学实践，使“科学与技术相结合、理论与实践相结合、教学与科研相结合”的方针得到进一步深化，取得了非常好的效果，培养的学生得到全社会的认可。这些教学改革影响深远，直到今天仍然受到学生的欢迎，并辐射到其他高校。在入选的精品教材中，这种理念与尝试也都有充分的体现。

中国科学技术大学自建校以来就形成的又一传统是根据学生的特点，用创新的精神编写教材。进入我校学习的都是基础扎实、学业优秀、求知欲强、勇于探索和追求的学生，针对他们的具体情况编写教材，才能更加有利于培养他们的创新精神。教师们坚持教学与科研的结合，根据自己的科研体会，借鉴目前国外相关专业有关课程的经验，注意理论与实际应用的结合，基础知识与最新发展的结合，课堂教学与课外实践的结合，精心组织材料、认真编写教材，使学生在掌握扎实的理论基础的同时，了解最新的研究方法，掌握实际应用的技术。

入选的这些精品教材，既是教学一线教师长期教学积累的成果，也是学校教学传统的体现，反映了中国科学技术大学的教学理念、教学特色和教学改革成果。希望该精品教材系列的出版，能对我们继续探索科教紧密结合培养拔尖创新人才，进一步提高教育教学质量有所帮助，为高等教育事业作出我们的贡献。



中国科学院院士

第三世界科学院院士

序

李永池等人编著的《连续介质力学基础及其应用》，用准确清晰的语言对笛卡儿张量的基本知识、连续介质力学的应力原理、连续介质的运动和变形描述、变形热力学和连续介质力学的守恒定律、连续介质本构关系的初等理论，以及流体力学、固体力学和爆炸与冲击工程力学中的典型问题，进行了系统的介绍。全书概念清晰、逻辑严谨，对基本理论和基本知识的阐述准确到位，注重将严谨的数学推理和清晰的物理概念相结合，力图使读者既不停留在繁琐的数学公式推导之中，也不停留在粗浅的物理现象描述之上，而是能清晰认识数学公式所包含的深刻物理实质。

全书以流体力学和固体力学相统一、静态问题和动态问题相结合、力学和热学相结合、结构型力学和本构型力学相结合的思想进行阐述，使学生能够辩证地了解流体和固体的统一和转化、静态问题和动态问题的联系和区别、力学和热力学的耦合、结构型力学和本构型力学的相互关系与相互影响。这有利于提高学生的辩证思维能力，并启发学生的创新思维能力。

本书除了对流体力学和固体力学典型问题进行介绍以外，还特别加入了对爆炸和冲击工程力学典型问题的介绍，这将扩大学生的知识视野，提高学生处理实际问题的能力，使学生对在高应变率等极端条件下的问题特点和处理方法有恰当的认识。

书稿完成后，我通读了一遍，感到获益良多。期望本书的出版有助于提高我国力学学科的教学与科研水平。



清华大学教授
中国科学院院士
俄罗斯科学院外籍院士
2018 年 12 月

前　言

本书取名为《连续介质力学基础及其应用》，顾名思义，其内容包括两部分，第一部分是连续介质力学的基础知识，第二部分是关于对这些知识的应用。

关于连续介质力学的基础知识，主要涉及笛卡儿张量的基本知识、连续介质应力原理、主应力及最大切应力、连续介质运动及变形描述、变形热力学及连续介质力学守恒定律、连续介质本构关系的初等理论等。

关于连续介质力学基础知识的应用，书中选择了作者认为有典型意义的流体力学、固体力学和爆炸与冲击工程力学问题的若干实例。关于流体力学典型问题，作者选择了流体力学运动方程的几个积分及其应用、量纲分析和相似理论基础、流体力学基本方程组和流体问题的相似准数、黏性不可压缩流体的一维定常流动、理想不可压缩流体的平面无旋流动的基础知识、理想气体一维定常绝热变截面管流、流体中的波和气体动力学基础知识、驻激波等内容。关于固体力学的典型问题，作者选择了弹性力学问题的位移解法和应力解法、弹性力学平面问题、弹性力学长柱体的自由扭转问题、弹塑性梁的弯曲问题、厚球壳及厚壁圆筒(圆盘)的弹塑性变形问题、各向同性线弹性介质中应力波的基础知识、波阵面上的守恒条件、弹性波在两种材料交界面上的透反射、一维应力波的特征线法及应用等内容。关于爆炸与冲击工程力学的典型问题，作者选择了平稳自持爆轰模型、爆轰产物的一维自模拟解和爆轰流场、炸药在刚壁上的平面一维接触爆炸、炸药对金属板的抛掷问题、柱形弹壳的动态断裂问题、梁在空中爆炸载荷作用下的弹性变形、薄球壳在空中载荷作用下的运动和变形、平板在水下爆炸波作用下的运动和变形、高速冲击载荷下的圆柱墩粗问题等内容。希望通过对这些问题的求解，使读者可以获得求解连续介质问题的基本方法。

除了对流体力学和固体力学典型问题进行介绍以外，本书还特别加入了对爆炸和冲击工程力学典型实例的介绍，这将扩大学生的知识视野，使学生对在高应变率等极端条件下的问题特点和处理方法有恰当的认识。

本书成书过程中，高光发、邓世春、段世伟、李煦阳、王光勇、孙晓旺、叶中豹等为本书的打印、作图和修改付出了辛勤的劳动，他们也对本书的内容提出了不少有益的建议。特别是张永亮同志，在后期几乎承担了本书全部书稿的编撰工作，没有他的劳动，本书是不可能出版的。在此对以上同志表示衷心的感谢。

由于作者水平有限，书中存在错误和不当之处在所难免，欢迎读者和专家指正。

李永池

2018 年 12 月

目　　录

总序 …… (ⅰ)

序 …… (ⅲ)

前言 …… (ⅴ)

第 1 章　笛卡儿张量基础知识 …… (1)

1.1　引言 …… (1)

1.2　指标记法与求和约定 …… (1)

1.3　坐标变换和笛卡儿张量的解析定义 …… (4)

1.4　张量代数运算 …… (9)

1.5　张量识别定理(商法则) …… (14)

1.6　张量的特征值和特征矢量 …… (18)

1.7　张量分析 …… (19)

1.8　正交曲线坐标和正交曲线坐标中的笛卡儿张量 …… (24)

1.9　常用的积分定理 …… (34)

1.10　张量方程及其意义 …… (40)

1.11　各向同性张量 …… (41)

习题 …… (48)

第 2 章　应力分析 …… (50)

2.1　一点的应力状态和应力张量 …… (50)

2.2　运动方程 …… (58)

2.3　应力连接条件和应力边界条件 …… (59)

2.4　正交曲线坐标中的笛卡儿张量和应力分量 …… (61)

习题 …… (64)

第 3 章　主应力和主方向 …… (66)

3.1　主应力和主方向的定义及求法 …… (66)

3.2　主应力和主方向的性质Ⅰ(存在性及特征) …… (68)

3.3　主应力和主方向的性质Ⅱ(物理性质) …… (73)

3.4　最大切应力及其作用平面 …… (75)

3.5　三维应力状态和三维应力莫尔圆 …… (79)

3.6 二维应力状态和二维莫尔圆 …… (83)
3.7 应力张量的球形压力与偏量分解 …… (88)
习题 …… (90)

第 4 章 连续介质的运动和变形 …… (92)
4.1 连续介质运动规律的 Lagrange(物质)和 Euler(空间)描述 …… (92)
4.2 连续介质的微小运动和变形、工程应变张量 …… (96)
4.3 连续介质微小运动的分解与微小旋转量 …… (103)
4.4 正交曲线坐标中工程应变分量与位移分量的关系 …… (106)
4.5 有限应变张量 …… (114)
4.6 工程应变的协调方程 …… (119)
4.7 速度场、伸缩率和旋转率张量及自然增量张量 …… (122)
4.8 相对体积膨胀率、连续方程 …… (125)
习题 …… (128)

第 5 章 连续介质守恒定律的场方程组 …… (130)
5.0 引言——两种坐标中随体导数的不同表达 …… (130)
5.1 闭口体系体积分的随体导数(物质导数) …… (131)
5.2 闭口与开口体系的连续性方程 …… (136)
5.3 闭口与开口体系的运动方程 …… (140)
5.4 正交曲线坐标中的运动方程 …… (145)
5.5 闭口与开口体系的能量方程 …… (150)
5.6 热力学第二定律和熵不等式 …… (156)
习题 …… (161)

第 6 章 材料本构关系的初等理论 …… (163)
6.1 热弹性流体 …… (163)
6.2 热弹性固体 …… (167)
6.3 弹塑性材料 …… (181)
6.4 牛顿黏性流体 …… (202)
6.5 黏弹性材料 …… (204)
6.6 黏塑性材料 …… (215)
习题 …… (233)

第 7 章 流体力学中的典型问题 …… (235)
7.1 流体的质点迹线和速度场的流线、热力学简介 …… (235)
7.2 运动方程的几个积分及其应用 …… (241)
7.3 量纲分析和相似理论基础知识 …… (248)
7.4 流体力学基本方程组和流体力学问题的相似准数 …… (257)
7.5 黏性不可压缩流体中的一维定常流动 …… (260)
7.6 理想不可压缩流体平面无旋流动的基本知识 …… (263)

需要全本请访问 www.ertongbook.com

7.7　理想气体一维定常绝热变截面管流 …… (278)
7.8　流体中的波和气体动力学基础知识 …… (287)
7.9　驻激波 …… (310)
习题 …… (316)

第 8 章　弹塑性力学中的典型问题 …… (319)
8.1　弹性力学基本方程组和其基本解法 …… (319)
8.2　弹性力学平面问题 …… (323)
8.3　弹性力学长柱体的自由扭转问题 …… (336)
8.4　弹塑性梁 …… (345)
8.5　厚球壳的弹塑性变形问题 …… (351)
8.6　厚壁圆筒(圆盘)的弹塑性变形问题 …… (356)
8.7　各向同性线弹性介质中应力波的基本知识 …… (362)
8.8　波阵面上的守恒条件 …… (369)
8.9　弹性波在两种材料交界面上的透反射 …… (372)
8.10　一维应力波的特征线法和应用 …… (380)
习题 …… (388)

第 9 章　爆炸和冲击工程力学中的典型问题 …… (392)
9.1　爆轰过程和平稳自持爆轰模型 …… (392)
9.2　爆轰产物的一维自模拟解和爆轰流场 …… (400)
9.3　炸药在刚壁上的平面一维接触爆炸 …… (409)
9.4　炸药对金属板的抛掷问题 …… (415)
9.5　柱形弹壳的动态断裂问题 …… (418)
9.6　梁在空中爆炸载荷作用下的弹性变形 …… (422)
9.7　薄球壳在空中爆炸载荷作用下的运动和变形 …… (426)
9.8　平板在水下爆炸波作用下的运动和变形 …… (428)
9.9　高速冲击载荷下的圆柱墩粗问题 …… (432)
习题 …… (435)

参考文献 …… (437)

后记 …… (439)

第 1 章　笛卡儿张量基础知识

1.1　引　　言

量纲分析和张量分析是自然科学研究的两大基石，具有十分重要的意义。这是因为，我们不能把两个具有不同量纲的量相加，如不能将长度和时间或质量相加；同样，我们也不能将不同阶的张量相加，如不能将纯数量的标量和矢量相加，也不能将矢量和 2 阶张量或更高阶的张量相加。因此，只有各项保持量纲一致和张量阶数一致的物理方程才是合理的和科学的，否则这个物理方程就是错误的和不科学的。从张量分析重要性的角度来说，自然界中各种物理量都可以纳入张量的框架来统一描述，或者说只有当把它们作为张量来描述时才能清楚地揭示这些物理量的与具体坐标系无关的不变性本质，并揭示联系各种物理量间相互关系的物理定律的不变性本质，这就是张量概念和张量方程概念的基本价值。

考虑到在实践中应用最多的是笛卡儿张量，本书第 1 章将从连续介质力学和物理学的应用和需要的角度出发，主要在笛卡儿坐标系中介绍张量的知识，即介绍笛卡儿张量的知识。为此，我们将从现实的三维欧几里得(Euclid)空间出发，主要以均匀地分布于空间的直角笛卡儿坐标系为工具，介绍张量的概念和张量的代数及其微分和积分运算，并以局部正交基间基变换的概念为基础，介绍在正交曲线坐标系中的笛卡儿张量。我们假设读者已经掌握了高等数学中矢量代数和矢量分析的有关知识，所以不再赘述有关矢量空间的系统理论，而直接以矢量代数和矢量分析的知识为基础，逐步深入地介绍张量分析的基础理论和方法。

1.2　指标记法与求和约定

自然界中各种物理量都是客观实在量，它们是不依赖于坐标系而存在的。但是，为了对这些量进行刻画和表征，以便进行运算，我们又常常需要选择一定的坐标系，而把各种物理量在坐标系中的分量作为它们在此坐标系中的“表象”(representation)。在欧几里得(Euclid)空间中，人们最常用的坐标系是直角笛卡儿坐标系(x,y,z)(rectangular Cartesian coordinates system)。为书写方便，在张量分析中人们广泛采用“指标记法”(index notation)，即用带指标的 $x_i(i=1、2、3)$来代替(x,y,z)。类似地，用 $i_i(i=1、2、3)$来表示坐标轴 x_i 方向上的单位基矢量，在直角笛卡儿坐标系中，它们形成长度为 1 且两两正交

的幺正基(unitary basis)或法化基(normalized basis)。在笛卡儿张量理论中人们常用下标(subscripts),而在一般张量的理论中人们则常常需要同时采用上标(superscripts)和下标的形式。于是,对欧几里得空间中任一点 A 相对于坐标原点 O 的矢径 $\boldsymbol{x}=\overrightarrow{OA}$ 及空间的任何一个矢量 $\boldsymbol{a}$,我们可以按平行六面体法则(这里是长方体法则)进行线性分解而写出

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{i}_1+x_2\boldsymbol{i}_2+x_3\boldsymbol{i}_3=x_i\boldsymbol{i}_i\\ \boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}_1+a_2\boldsymbol{i}_2+a_3\boldsymbol{i}_3=a_i\boldsymbol{i}_i\end{cases}\tag{1.2.1}$$

其中,x_i 和 a_i 分别是矢量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 在幺正基矢量 $\boldsymbol{i}_i$ 上的分解系数,这是大家在解析几何中所熟知的。在笛卡儿张量理论中,人们还广泛采用所谓的"求和约定"(summation convention),式(1.2.1)中的最后两个等号即应用了"求和约定",求和约定的含义是:若某个指标在某一单项式中重复出现,则该项代表一个和式,也就意味着将此指标从 1 至 3 历遍取值并对所得的 3 项求和。如果是在 n 维欧几里得空间中,则是对其从 1 至 n 历遍取值并对所得的 n 项求和。我们把重复出现而对其约定求和的指标称为"哑标"(dummy index 或 dumb index),如式(1.2.1)中的指标 i 即是哑标。显然,哑标只有形式上的意义,而并不表示 1、2、3 中某一个确定的值,因此可将式(1.2.1)中的哑标 i 改为任意其他指标而并不改变该式的最后结果。例如,$\boldsymbol{a}=a_i\boldsymbol{i}_i=a_j\boldsymbol{i}_j=a_k\boldsymbol{i}_k$ 等都是可以的。

对于幺正基 $\boldsymbol{i}_i$,其幺正条件可以表达为

$$\boldsymbol{i}_i\cdot\boldsymbol{i}_j=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases}\quad(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}=1、2、3)\tag{1.2.2}$$

其中,δ_{ij} 称为克罗尼克尔记号(Kronecker symbol 或 Kronecker delta),它在张量运算中具有重要的作用,如果将 δ_{ij} 的 9 个分量排成一个矩阵,它恰恰与单位矩阵相对应。与式(1.2.1)的下标 i 不同,式(1.2.2)中的指标 i 和 j 都没有重复出现,它可代表 1、2、3 中某一个确定的值,我们称这样的指标为"自由指标"(free index)。因此,式(1.2.1)只代表 1 个式子,它含有 3 项之和,而式(1.2.2)则代表 9 个式子。在张量运算中,正确区分"哑标"和"自由指标"并明确其不同的作用是十分重要的,张量运算中的许多错误也常常与指标选取不当或对指标作用认识上的错误有关,读者对这点必须特别注意。

根据 δ_{ij} 的定义与求和约定的含义,很容易理解如下各个恒等式:

$$\begin{cases}\delta_{ii}=3\\ \delta_{ik}\delta_{kj}=\delta_{ij}\\ \delta_{ij}\delta_{ij}=\delta_{jj}=3\\ a_i\delta_{ij}=a_j\\ A_{ik}\delta_{kj}=A_{ij}\\ \delta_{ij}=\delta_{ji}\end{cases}\tag{1.2.3}$$

由式(1.2.3)可见,δ_{ij} 作为一个因子与任何一个量相乘时,起到改换指标(changing index)的作用,具体表述为:将与之相乘的因子中同 δ_{ij} 中某一重复的哑标改换为 δ_{ij} 中的另一指标。

将任意矢量 $\boldsymbol{a}$ 在直角笛卡儿坐标系中的分解式(1.2.1)两端与基矢量 $\boldsymbol{i}_j$ 进行点积,即可求出分解系数 a_j:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{i}_j=a_i\boldsymbol{i}_i\cdot\boldsymbol{i}_j=a_i\delta_{ij}=a_j\quad(j=1、2、3)\tag{1.2.4}$$

这里我们利用了 δ_{ij} 的定义式(1.2.2)及其换标作用式(1.2.3)。将式(1.2.4)中的自由指标 j 改为 i,并将之与式(1.2.1)结合起来,可有

$$\begin{cases} \boldsymbol{a} = a_i \boldsymbol{i}_i \\ a_i = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{i}_i \end{cases} \tag{1.2.5}$$

式(1.2.5)中的第一式称为矢量 $\boldsymbol{a}$ 在幺正基 $\boldsymbol{i}_i$ 上的线性分解式，而第二式则表明其分解系数 a_i 等于矢量 $\boldsymbol{a}$ 在幺正基 $\boldsymbol{i}_i$ 上的正交投影。

在张量运算中还常用到另一个量 e_{ijk}，称为“置换记号”(permutation symbol)，有的书上称之为列维-悉维塔(Levy-Civita)记号，它是一个有三个指标的3阶系统，其定义为

$$e_{ijk} = \begin{cases} 1 & (\text{当 } ijk \text{ 为 } 123 \text{ 的正序时}) \\ -1 & (\text{当 } ijk \text{ 为 } 123 \text{ 的逆序时}) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases} \tag{1.2.6}$$

上式中的指标 i、j、k 均为自由指标，故它包括 $3^3 = 27$ 个式子，其中有3个为“1”，3个为“-1”，余下的21个分量全为“0”。

如果我们选取的幺正基 $\boldsymbol{i}_i$ 组成右手系(本书一般情况下总是这样规定)，则根据解析几何中矢量混合乘积的定义，显然我们有

$$e_{ijk} = \boldsymbol{i}_i \cdot (\boldsymbol{i}_j \times \boldsymbol{i}_k) \tag{1.2.7}$$

此外，不难证明如下的一些恒等式成立：

$$\begin{cases} e_{ijk} = e_{jki} = e_{kij}, \quad e_{ijk} = -e_{jik}, \quad e_{ijk} = -e_{ikj}, \quad e_{ijk} = -e_{kji} \\ e_{ijk}e_{ijk} = 6 \\ \boldsymbol{a}_i \cdot (\boldsymbol{a}_j \times \boldsymbol{a}_k) = e_{ijk}\boldsymbol{a}_1 \cdot (\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{a}_3) & (\text{对任意的3个矢量 } \boldsymbol{a}_1、\boldsymbol{a}_2、\boldsymbol{a}_3) \\ \boldsymbol{i}_i \cdot (\boldsymbol{i}_j \times \boldsymbol{i}_k) = e_{ijk}\boldsymbol{i}_1 \cdot (\boldsymbol{i}_2 \times \boldsymbol{i}_3) & (\text{上式取 } \boldsymbol{a}_i \text{ 为 } \boldsymbol{i}_i \text{ 时}) \\ e_{ijk}A_{jk} = 0 & (\text{当 } A_{jk} = A_{kj} \text{ 时}) \end{cases} \tag{1.2.8}$$

当幺正基 $\boldsymbol{i}_i$ 组成右手系时，利用解析几何中两个矢量叉乘的定义，我们曾有如下的9个恒等式成立：

$$\begin{cases} \boldsymbol{i}_1 \times \boldsymbol{i}_2 = \boldsymbol{i}_3, & \boldsymbol{i}_2 \times \boldsymbol{i}_3 = \boldsymbol{i}_1, & \boldsymbol{i}_3 \times \boldsymbol{i}_1 = \boldsymbol{i}_2 \\ \boldsymbol{i}_2 \times \boldsymbol{i}_1 = -\boldsymbol{i}_3, & \boldsymbol{i}_3 \times \boldsymbol{i}_2 = -\boldsymbol{i}_1, & \boldsymbol{i}_1 \times \boldsymbol{i}_3 = -\boldsymbol{i}_2 \\ \boldsymbol{i}_1 \times \boldsymbol{i}_1 = \boldsymbol{0}, & \boldsymbol{i}_2 \times \boldsymbol{i}_2 = \boldsymbol{0}, & \boldsymbol{i}_3 \times \boldsymbol{i}_3 = \boldsymbol{0} \end{cases}$$

利用置换记号 e_{ijk}，可将这9个恒等式统一地写为

$$\begin{cases} \boldsymbol{i}_i \times \boldsymbol{i}_j = e_{ijk}\boldsymbol{i}_k & (i = 1、2、3; j = 1、2、3) \\ \boldsymbol{i}_i = \dfrac{1}{2}e_{ijk}\boldsymbol{i}_j \times \boldsymbol{i}_k & (i = 1、2、3) \end{cases} \tag{1.2.9}$$

利用前面的公式，我们还可以求出任意两个矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的点积、叉积以及任意三个矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 的混合乘积的表达式。对点积，我们有

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_i\boldsymbol{i}_i \cdot b_j\boldsymbol{i}_j = a_ib_j\delta_{ij} = a_ib_i$$

即

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_ib_i \tag{1.2.10}$$

对叉积，我们有

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_i\boldsymbol{i}_i) \times (b_j\boldsymbol{i}_j) = a_ib_je_{ijk}\boldsymbol{i}_k$$

即

$$\begin{cases} \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = a_ib_je_{ijk}\boldsymbol{i}_k \\ (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})_k = a_ib_je_{ijk} = e_{kij}a_ib_j \end{cases} \tag{1.2.11}$$

对混合积，我们有

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=a_i\boldsymbol{i}_i\cdot(b_j\boldsymbol{i}_j\times c_k\boldsymbol{i}_k)=a_ib_jc_ke_{ijk}$$

即

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=a_ib_jc_ke_{ijk} \tag{1.2.12}$$

利用置换记号 e_{ijk} 还可以将任意一个 3×3 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式之值 $|\boldsymbol{A}|$ 写为

$$|\boldsymbol{A}|=e_{ijk}A_{i1}A_{j2}A_{k3} \tag{1.2.13}$$

根据行标和列标对等的性质，显然将式(1.2.13)中的 $e_{ijk}A_{i1}A_{j2}A_{k3}$ 改为 $e_{ijk}A_{1i}A_{2j}A_{3k}$ 时公式也是成立的，而且将指标 123 改为 231 或 312 时公式也是成立的，所以可认为式(1.2.13)代表了 6 个公式。此外，我们也很容易证明如下的恒等式是成立的：

$$e_{lmn}|\boldsymbol{A}|=e_{ijk}A_{il}A_{jm}A_{kn} \tag{1.2.14}$$

事实上，当 lmn 为 123 的正序时，根据式(1.2.13)、式(1.2.14)的左右两端都等于 $|\boldsymbol{A}|$；当 lmn 为 123 的逆序时，式(1.2.14)的左右两端都等于 $-|\boldsymbol{A}|$，因为右端恰为将 $|\boldsymbol{A}|$ 的两列交换次序；其他情况下，其左端为 0，而右端为 2 列相同或 3 列相同的行列式，故其值也为 0。故式(1.2.14)总是成立的。

在 e_{ijk} 和 δ_{ij} 之间存在着如下的所谓 $e\sim\delta$ 恒等式：

$$e_{ijk}e_{lmk}=\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl} \tag{1.2.15}$$

对 $e\sim\delta$ 恒等式所包含的 $3^4=81$ 个恒等式(i、j、l、m 都是自由指标)，可以采用直接验证的方法证明，也可分类对其证明。事实上，当 $i=j$ 或 $l=m$ 时，易见其左右两端都等于 0；当 $i\neq j$ 且 $l\neq m$ 时，不妨设 $i=1,j=2$，此时对 $l=1,m=2$，其左右两端都等于 1；对 $l=2,m=1$，其两端都等于 -1；对 $(l,m)=(1,3),(3,1),(2,3),(3,2)$ 时，其两端都等于 0，故式(1.2.15)总成立。

利用式(1.2.10)、式(1.2.11)、式(1.2.12)和 $e\sim\delta$ 恒等式，我们可以很方便地证明矢量代数中的很多公式，例如以下的一些公式：

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) \tag{1.2.16}$$

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}) \tag{1.2.17}$$

以式(1.2.16)的证明为例，我们有

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})]_i&=e_{ijk}a_j(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})_k=e_{ijk}a_je_{kmn}b_mc_n=e_{ijk}e_{kmn}a_jb_mc_n\\&=(\delta_{im}\delta_{jn}-\delta_{jm}\delta_{in})a_jb_mc_n=a_jb_ic_j-a_jb_jc_i\\&=(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})b_i-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})c_i=[(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}]_i\end{aligned}$$

在证明过程中，我们先后用到了矢量叉积的计算式(1.2.11)、$e\sim\delta$ 恒等式(1.2.15)以及矢量点积的计算式(1.2.10)。

1.3 坐标变换和笛卡儿张量的解析定义

1.3.1 基变换和坐标变换

自然界中的各种物理量通常都是客观的，且与坐标系的选取无关。但是为了更清楚地

认识它们，从量的角度描述它们，了解各类物理量的异同点和相互联系，并进行运算，人们又常常借助于一定的坐标系。这不仅不违背物理量的客观实在性，相反地还使我们对它们的客观实在性有了更深刻、更具体的认识。由于坐标系可以有不同的选择方法，所以客观的物理量在不同的坐标系中将会有不同的“表象”，而且这种同一物理量在不同坐标系中不同表象间的关系，应该和表示不同坐标系间坐标变换的关系之间存在某种必然的、确定的联系，只有揭示出同一物理量在不同坐标系中表象间的关系对坐标变换关系的依赖性，才能真正说明这个物理量的客观性。因此我们有两个任务：第一是给出代表不同选择的坐标系间的所谓坐标变换的表示方法；第二是给出各种客观物理量在一定的坐标变换之下，其表象间的确定关系，后者也就是给出了张量的解析定义。

众所周知，笛卡儿坐标系间的坐标变换包括坐标原点的平移和坐标轴的旋转或反射，而平移是不改变各类量的表象的（这在矢量情形时是读者所熟知的），故我们只研究坐标系的旋转和反射。设 $O\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ 和 $Ox_1x_2x_3$ 分别代表新、旧直角笛卡儿坐标系，其相应的幺正基为 $\bar{\boldsymbol{i}}_i$ 和 $\boldsymbol{i}_i$，如图 1.1 所示。新基矢 $\bar{\boldsymbol{i}}_i$ 以旧基矢 $\boldsymbol{i}_j$ 的线性组合表达，其线性分解系数以 β_{ij} 表示，如表 1.1 所示，则可写出幺正基矢间的变换关系：

$$\bar{\boldsymbol{i}}_i = \beta_{ij}\boldsymbol{i}_j \quad (i = 1、2、3) \tag{1.3.1}$$

表 1.1　幺正基变换

	$\boldsymbol{i}_1$	$\boldsymbol{i}_2$	$\boldsymbol{i}_3$
$\bar{\boldsymbol{i}}_1$	β_{11}	β_{12}	β_{13}
$\bar{\boldsymbol{i}}_2$	β_{21}	β_{22}	β_{23}
$\bar{\boldsymbol{i}}_3$	β_{31}	β_{32}	β_{33}

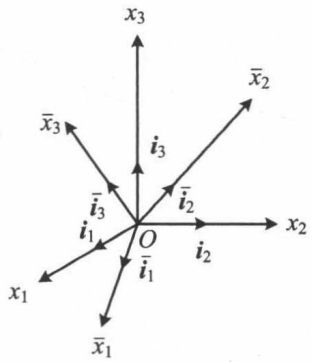


图 1.1　新旧坐标系

将式(1.3.1)两端与 $\boldsymbol{i}_k$ 进行点积，并利用 $\boldsymbol{i}_j \cdot \boldsymbol{i}_k = \delta_{jk}$，可得

$$\bar{\boldsymbol{i}}_i \cdot \boldsymbol{i}_k = \beta_{ij}\boldsymbol{i}_j \cdot \boldsymbol{i}_k = \beta_{ij}\delta_{jk} = \beta_{ik}$$

即

$$\beta_{ij} = \bar{\boldsymbol{i}}_i \cdot \boldsymbol{i}_j \quad (i = 1、2、3; j = 1、2、3) \tag{1.3.2}$$

其中，β_{ij} 恰是新、旧基矢 $\bar{\boldsymbol{i}}_i$ 和 $\boldsymbol{i}_j$ 间夹角的方向余弦。故又有

$$\boldsymbol{i}_i = (\boldsymbol{i}_i \cdot \bar{\boldsymbol{i}}_j)\bar{\boldsymbol{i}}_j = \beta_{ji}\bar{\boldsymbol{i}}_j$$

需要全本请访问 www.ertongbook.com