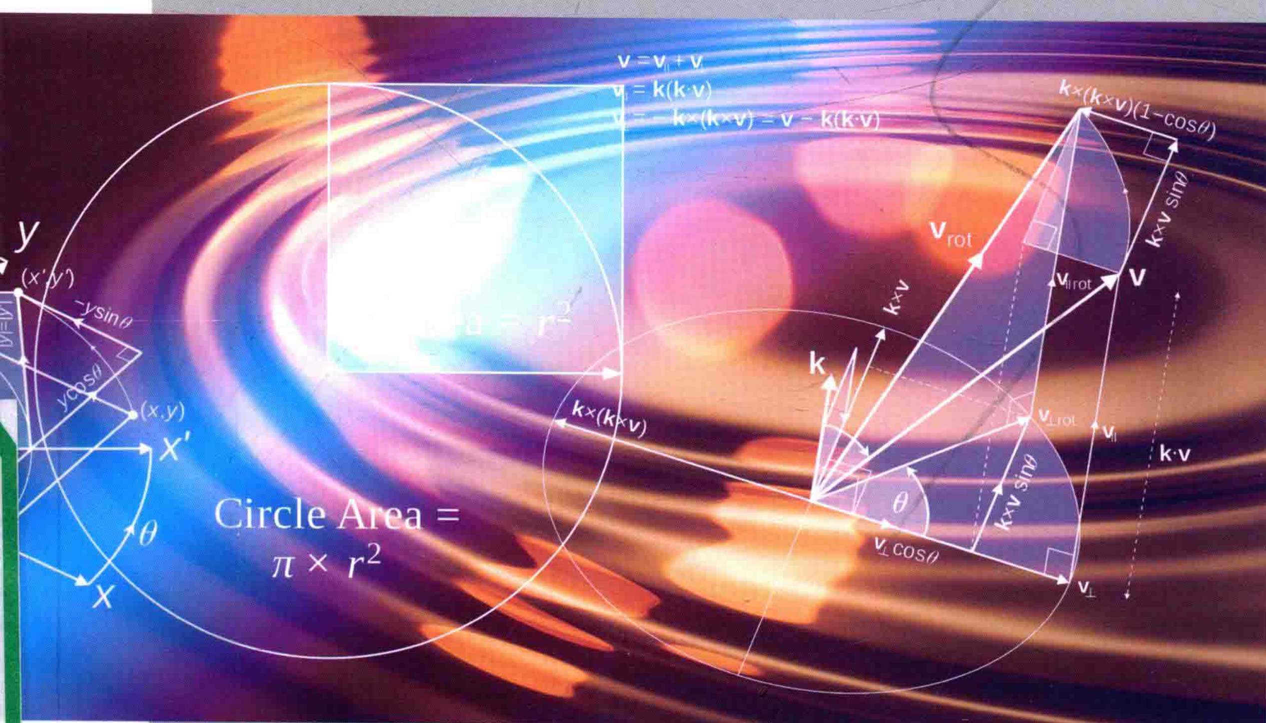
普通高等学校“十三五”规划教材

新经度

DAXUE WENKESHUXUE

大学文科数学

刘建州　柴华金 / 主编



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

新经度

普通高等学校“十三五”规划教材

大学文科数学

主　编　刘建州　柴华金
副主编　李成福　梁开福
　　　　骆先南　王红青

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

大学文科数学/刘建州，柴华金主编. —北京：北京大学出版社，2018.8
ISBN 978-7-301-29802-2

Ⅰ. ①大… Ⅱ. ①刘… ②柴… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 192426 号

书　　名	大学文科数学 DAXUE WENKESHUXUE
著作责任者	刘建州　柴华金　主编
责任编辑	王剑飞
标准书号	ISBN 978-7-301-29802-2
出版发行	北京大学出版社
地　　址	北京市海淀区成府路 205 号　100871
网　　址	http://www.pup.cn
电子信箱	zpup@pup.cn
新浪微博	@北京大学出版社
电　　话	邮购部 010-62752015　发行部 010-62750672　编辑部 010-62765014
印 刷 者	长沙超峰印刷有限公司
经 销 者	新华书店
	787 毫米×1092 毫米　16 开本　13 印张　322 千字
	2018 年 8 月第 1 版　2018 年 8 月第 1 次印刷
定　　价	39.00 元

内 容 简 介

这是专为经济管理、文史哲及外语等学科大学生编写的数学教材. 全书含微积分、线性代数、概率论与数理统计、数学规划 4 个部分. 微积分部分分别介绍了极限、函数的连续性与间断点、导数及其应用、不定积分、定积分、微分方程和无穷级数的基本知识;线性代数部分分别介绍了行列式、矩阵和线性方程组的基本内容;概率论与数理统计部分分别介绍了随机事件及概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定理与中心极限定理和数理统计的基本方法;数学规划部分分别介绍了运筹学的发展和运用、线性规划模型、运输问题、整数规划和指派问题. 各节后配有适量的习题,书末并有附录和习题参考答案.

本书内容丰富,条理清楚,重点突出,难点分散,注重数学思想的介绍,力求做到深入浅出,可作为高等院校管理、文史哲、外语类本科生教材,也可作为专业工作者的自学参考书.

总　序

数学是人一生中学得最多的一门功课.中小学里就已开设了很多数学课程,涉及算术、平面几何、三角、代数、立体几何、解析几何等众多科目,看起来洋洋大观、琳琅满目,但均属于初等数学的范畴,实际上只能用来解决一些相对简单的问题,面对现实世界中一些复杂的情况则往往无能为力.正因为如此,在大学学习阶段,专攻数学专业的学生不必说了,就是对于广大非数学专业的大学生,也都必须选学一些数学基础课程,花相当多的时间和精力学习高等数学,这就对非数学专业的大学数学基础教材提出了迫切的需求.

这些年来,各种大学数学基础教材已经林林总总地出版了许多,但平心而论,除少数精品以外,大多均偏于雷同,难以使人满意.而学习数学这门学科,关键又在理解与熟练,同一类型的教材只需精读一本好的就足够了.这样,精选并推出一些优秀的大学数学基础教材,就理所当然地成为编辑出版这一丛书的宗旨.

大学数学基础课程的名目并不多,所涵盖的内容又大体上相似,但教材的编写不仅仅是材料的堆积和梳理,更体现编写者的教学思想和理念.同一门课程,应该鼓励有不同风格的教材来诠释和体现;针对不同程度的教学对象,也应该有不同层次的教材来使用和适应.特别是,大学非数学专业是一个相当广泛的概念,对分属工程类、财经管理类、医药类、农林类、社科类甚至文史类的众多大学生,不分青红皂白、一刀切地采用统一的数学教材进行教学,很难密切联系有关专业的实际,很难充分针对有关专业的迫切需要和特殊要求,是不值得提倡的.相反,通过教材编写者和相应专业工作者的密切结合和协作,针对该专业的特点编写出来的教材,才能特色鲜明、有血有肉,才能深受欢迎,并产生重要而深远的影响.这是专业类大学数学基础教材应有的定位和标准,也是大家的迫切期望,但却是当前明显的短板,因而使我们对这套丛书可以大有作为有了足够的信心和依据.

说得更远一些,我们一些教师往往把数学看成是定义、公式、定理及证明的堆积,千方百计地要把这些知识灌输到学生头脑中去,但却忘记了有关数学最根本的三件事.一是数学知识的来龙去脉——从哪儿来,又可以到哪儿去.割断数学与生动活泼的现实世界的血肉联系,学生就不会有学习数学持续的积极性.二是数学的精神实质和思想方法.只讲知识,不讲精神,只讲技巧,不讲思想,学生就不可能学到数学的精髓,不能对数学有

真正的领悟.三是数学的人文内涵.数学在人类认识世界和改造世界的过程中起着关键的、不可代替的作用,是人类文明的坚实基础和重要支柱.不自觉地接受数学文化的熏陶,是不可能真正走近数学、了解数学、领悟数学并热爱数学的.在数学教学中抓住了上面这三点,就抓住了数学的灵魂,学生对数学的学习就一定会更有成效.但客观地说,现有的大学数学基础教材,能够真正体现这三方面要求的,恐怕为数不多.这一现实为大学数学基础教材的编写提供了广阔的发展空间,很多探索有待进行,很多经验有待总结,可以说是任重而道远.从这个意义上说,由北京大学出版社推出的这套新经度大学数学丛书实际上已经为一批有特色、高品质的大学数学基础教材的面世搭建了一个很好的平台,特别值得称道,也相信一定会得到各方面广泛而有力的支持.

特为之序.

李大潜

2015 年 1 月 28 日

李大潜先生简介

前　言

随着科学技术的发展和社会的进步,数学这一重要的基础学科迅速地向自然科学、社会科学和人文科学在内的各个领域渗透.数学不仅是一门科学,而且已经成为人们终生受益的文化力量.

本书贯彻"导引"的思想,为读者充当近现代数学知识的"导游",力求让广大文科大学生接触到更为广泛、更具有实用价值的数学知识.考虑到文科大学生的特点,我们对每章都做了深入浅出的介绍,相信他们通过学习,对数学的本质也会有更深的理解.

本教材分微积分、线性代数、概率论与数理统计、数学规划,共4章.第一章为微积分,分别介绍了极限、函数的连续性与间断点、导数及其应用、不定积分、定积分、微分方程和无穷级数的基本知识;第二章为线性代数,分别介绍了行列式、矩阵和线性方程组的基本内容;第三章为概率论与数理统计,分别介绍了随机事件及概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定理与中心极限定理和数理统计的基本方法;最后一章为数学规划,分别介绍了运筹学的发展和运用、线性规划模型、运输问题、整数规划和指派问题.各节后配有适量的习题,书末有附录和习题参考答案.

本书适合高等学校经济管理、文史哲及外语类各专业学生和教师使用,也可供科技工作者参考.

本教材由刘建州、柴华金担任主编,李成福、梁开福、骆先南、王红青担任副主编.赵子平编辑了教学资源内容,胡锐、邓之豪组织并参与了动画制作及教学资源的信息化实现,苏文春、陈平提供了版式和装帧设计方案.在此表示衷心感谢.本教材在编写过程中得到了湘潭大学数学与计算科学学院的大力支持,在此一并表示衷心感谢.

虽然编写组的各位作者做了许多努力,但鉴于水平有限和成书时间仓促,书中定有许多不足之处,恳请同行和读者批评指正.

编　者

目　录

第一章 微 积 分

牛顿(Newton)和莱布尼兹(Leibniz)在17世纪后半叶建立了微积分.微积分及其有关的后续内容,是数学最重要的组成部分,可以说微积分的创立是现代数学最重要的成就,从来没有一个数学分支有如此广泛有效的应用.它已成为一粒种子,大多数现代数学理论都由它生长繁育而来.没有它,大多数现代科学的进步就不可能实现.由于微积分的基础性和重要性,我们把它作为本教材的第一章.相信文科学生能从这一章的学习中,进一步感受到数学的奇妙与价值.

本章简要介绍微积分的主体部分:微分和积分.

§1.1 微积分漫谈

高等数学(微积分)是大学里非数学专业学生的一门重要基础课,对于数学系的学生来说数学分析(微积分)更是一门重头课,该课程内容多,学习时间长(一至两年),应用广泛.微积分是任何一个学习数学的人必须闯过的第一个真正的大沙场,微积分——这部无限的交响乐是由全世界众多的数学工作者经历了2 500年之久,用自己的血、泪、汗、才智等谱写而成的生命之歌.正如当代数学分析权威R.柯朗(Courant)所指出的,“微积分是一种撼人心灵的智力奋斗的结晶”.因此熟悉这一学科的发展历史,了解人类的这一巨大精神财富的积累过程和历代数学家艰苦卓绝的奋斗精神,对于陶冶一个人的数学情操,提高自己的数学意识与思维能力,形成自己的数学世界观,对于自身的学习与工作都将具有重要的意义.

在古典意义下,微积分是微分学和积分学的合称;现代微积分有时作为“数学分析”的同义语,一般来说数学分析包括微积分、级数论、函数论、微分方程、变分法、泛函分析、非标准分析等,它们皆属于“分析类数学”,是整个数学三个基本门类(分析类数学、几何类数学、代数类数学)之一.

人们常说“微积分是牛顿和莱布尼兹创立的”,其实如此概括人类思维的这一伟大成果的产生太过简单.事实上,微积分的一些基本问题的提出和解决,其根源可以追溯到古希腊时期,正是由于16至17世纪初的微积分方面的先驱工作,才使牛顿、莱布尼兹于17世纪后半叶正式创立微积分.微积分在18世纪里获得了蓬勃发展,当19世纪的数学家们为这一学科奠定了牢靠的逻辑基础时,古典微积分才基本完成.

在古代中国,战国时代的《庄子·天下篇》中,“一尺之棰,日取其半,万世不竭”潜含无限思想.“至大无外,谓之大一;至小无内,谓之小一.”这是惠施的一句话,提出了无穷大与无穷小的思想.

此外，当时的重要著作《墨经》中不仅对有穷与无穷做了明确的区分，而且也有丰富的微分思想.

古希腊的原子论者德谟克利特(Democritus) 就具有朴素的微分和积分思想.

圆是最美也是最重要的曲边形，古埃及人把它看成是神赐予的神圣图形，如何求圆的面积是数学对人类智慧的一次考验，也是极限诞生的种子.

大约在公元前400年，古希腊人提出了三大几何难题，其中之一是“化圆为方”，指用圆规与无刻度的直尺求与已知圆等面积的正方形.

这一几何难题直到19世纪，才被人们证明它为尺规作图不能解决问题. 既然“化圆为方”这条路行不通，人们不得不另辟蹊径. 公元前5世纪的古希腊智者安提丰(Attic) 与布赖森(Bryson) 分别用圆的内接正多边形以及外切正多边形的边数不断加倍的办法来接近圆的面积，他们认为圆的面积可以取边数不断增加时它的内接和外切正多边形面积的平均值，这可能是西方应用极限计算圆面积的最早设想. 这一方法被后人称作“穷竭法”，欧多克斯(Eudoxus)、欧几里德(Euclid) 和阿基米德(Archimedes) 对穷竭法做出了重要贡献.

我国三国时期的数学家刘徽在《九章算术》的注文中，第一次把《庄子》中的极限思想用于计算“圆田”和“弧田”的面积，创立了一种求圆周率的方法，即“割圆术”. 刘徽相继求出圆内接正六边形、十二边形、二十四边形 …… 的面积. 他指出：“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆合体，而无所失矣.” 这等同于现代微积分中的极限思想. 他得出了$\pi = 3.14 = \frac{157}{50}$(徽率).

古印度的数学家，对圆却采用了类似切西瓜的办法，把圆切成许多小瓣，再把这些小瓣对接成一个长方形，用长方形的面积去代替圆面积.

到了17世纪，德国天文学家开普勒(Kepler) 在1615年出版了《葡萄酒桶的立体几何》一书中，介绍了其独创的求圆面积的新方法：把圆分割成许多小扇形，不同的是他一开始就把圆分成无穷多个小扇形，因为太小了，所以小扇形又可用小等腰三角形来代替. 即

$$\begin{aligned} S_{\text{圆}} &= \frac{1}{2}R \cdot \overline{AB} + \frac{1}{2}R \cdot \overline{BC} + \frac{1}{2}R \cdot \overline{CD} + \cdots \\ &= \frac{1}{2}R \cdot (\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \cdots) = \frac{1}{2}R \cdot 2\pi R = \pi R^2. \end{aligned}$$

继开普勒之后，意大利物理学家伽利略(Galilei) 的学生卡瓦利(Cavalli) 深入研究了上述求圆面积的方法，认为这每一小扇形的面积到底等于不等于零，就不好确定了. 他想：开普勒为什么不继续分下去了呢？要是再细分下去，那分到什么程度为止呢？陷入沉思之中的卡瓦利从衣服的布和一本书的构造上得到了启示，经过反复琢磨，提出了求面积和体积的新方法：“不可分元法”，并于1635年出版了《不可分量几何学》一书. 这可以说是积分学的先驱工作，其中“不可分元法” 被认为是当时最好的“求积” 方法之一. 联想定积分、重积分的定义以及元素法，我们不难发现它们有着千丝万缕的关联.

微分学的发展，主要源于以下两个问题：求曲线在任一点的切线和求变量的极值.

1650年左右，法国数学界的三巨头：罗伯瓦尔(Roberval)、费马(Fermat)、帕斯卡(Pascal)，对这两个问题做了深入研究. 罗伯瓦尔借助合成运动速度作切线，从运动的角度出发，将切线看作描画这曲线的运动在这点的方向；解析几何的创始人笛卡尔

(Descarets) 与费马则从几何的角度出发，认为切线是当两个交点重合时的割线；费马还借助微小增量作切线，同时对求极值问题，提出了较好的方法，一般称作费马引理(先求 $f'(x)$，再令 $f'(x)=0$，解之可求得极值点).

费马出生于商人家庭，大学时代学法律，毕业后以律师为职业，被称为“业余数学家之王”，虽然年近30岁后才开始注意数学，但对数论、解析几何、概率论以及微积分都有重要贡献，他生性恬静、谦虚，生前很少发表论文和著作，去世后，人们才在他的手稿和他读过的书页空白处的批注中发现他的卓越见解.

下面主要介绍帕斯卡、瓦里士(John Wallis) 和巴罗(Barrow) 的工作.

帕斯卡的父亲(Etienne Wallis) 也是数学家，对他的独子自幼精心培养，传说父亲希望小帕斯卡先打好古代语的基础，不许他过早接触数学，以免过度紧张的思考损害健康，所以将一切数学书籍收藏起来. 可是这项禁令反而激起了帕斯卡的好奇心. 帕斯卡 12 岁时，追问父亲几何学究竟是什么. 父亲简单回答说:“几何学是使作图正确无误的方法，也是找出各图形间比例关系的方法.”说完之后，马上禁止帕斯卡再谈此事. 然而帕斯卡激动的心情不能抑制，他思考上述定义，用木炭在地砖上作图，自立定义，自行证明，竟能独自推导三角形内角之和等于两直角的著名定理. 这使他父亲惊喜若狂，并给他一本欧几里德的《几何原本》，再也不阻止他钻研数学了. 帕斯卡 16 岁时发现了非常著名的“帕斯卡六边形定理”；1640 年出版了《圆锥曲线论》；19 岁时发明了世界上第一台机械加法计算机；23 岁时推测出大气压力的存在，还发现流体力学的“帕斯卡原理”. 帕斯卡终生为病魔所缠，失眠和牙疼经常使他难以安宁. 1658 年难以忍受的牙疼使他彻夜不能入眠，一气之下，他奋起工作，穷八昼夜之功，完成了名著《摆线论》. 此外，他还是概率论和射影几何的奠基人之一，提出了算术中的“帕斯卡”三角形；在积分学上他用“无穷小矩形”取代了卡瓦利的“不可分元”算出了以曲线 $y=x^2$ 为一边的曲边形的面积；在微分学上，他把无穷小概念引入数学，出版了《四分之一圆的正弦论》(1659). 事实上，他的工作对莱布尼兹的微积分理论产生了直接的影响.

瓦里士是英国最富独创性的数学家之一，早年在剑桥学神学，从 1649 年起担任牛津大学的“沙维教授”. 在微积分的先驱者中，瓦里士的算术化工作很有意义，可以说，没有算术化就没有牛顿的微积分. 他的著作《圆锥曲线论》与《无穷小算术》都是很有名的. 他第一次用符号 ∞ 表示无穷大，用 $\frac{1}{\infty}$ 表示无穷小或零量，并把它们与有限数同样看待，一起参加运算，他还引入了“变量极限 —— 这是变量能无限逼近的一个常数，使得它们之间的差能小于任何给定的量”. 给出了著名的瓦里士公式：

$$\frac{4}{\pi}=\frac{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdots(2n-1)\cdot(2n-1)\cdots}{2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdots 2n\cdot 2n\cdots}.$$

对牛顿影响最大的是他的老师巴罗，他也是微积分发展史上的重要人物之一. 他还是神学家，曾任剑桥大学教授、副校长，他的主要著作为《光学和几何讲义》(1669)，他偏爱几何，对即将临产的微积分也有深刻的理解. 他曾设想曲线是由所谓的“线元”构成的，他最有意义的贡献是把“求切线”和“求积”作为互逆问题联系起来了.

经过黑夜、薄暮、黎明，这一神秘的时代以费马和巴罗为标志而结束，这时微积分的诞生已进入水到渠成的阶段，就像窗户纸一样一捅就破. 这一重任就落到了牛顿和莱布尼兹身上.

17 世纪后半叶，英国的牛顿和德国的莱布尼兹，以其卓越的才能首先明确地认识到求积问题和作切线问题之间的互逆关系，建立了微积分基本定理，并且系统地总结出一套强有力的无穷小算法，也正是因为这些，使得他们俩成为微积分的创立人.

17 世纪是英国的天文学、力学、物理学以及数学大发展的年代，也是英国人才辈出的年代，瓦里士、巴罗、哈雷(Halley)、虎克(Hooke) 等都是牛顿同时代的人物，而牛顿则是这些人的杰出代表.

牛顿于 1642 年 12 月 25 日出生于英国林肯州的一个小村庄. 1661 年牛顿考入剑桥大学的三一学院，作为减费生，21 岁获学士学位，接着攻读硕士学位. 1665—1667 年，伦敦爆发鼠疫，剑桥大学因此关闭，牛顿在农村住了 18 个月. 在这期间，他发现了二项式定理，酝酿了微积分原理，提出了万有引力定律. 牛顿一生的最大成就都发轫于这期间，这时他才 23 岁. 1667 年，瘟疫过去，牛顿又回到剑桥大学，由于他在数学上的出色成就，他的老师巴罗认为他的学识已超过自己，于 1669 年 10 月把“路卡斯教授”的职位让给了牛顿. 1727 年 3 月 20 日，牛顿病逝，英国政府为他举行了国葬.

牛顿一生关于微积分的主要著作有三部：《运用无穷多项方程的分析学》《流数法和无穷参数》《自然哲学的数学原理》，他主要是从运动学来研究和建立微积分的. 牛顿自己曾说：“如果我所见的比笛卡尔的远一些，那是因为，我站在巨人的肩上的缘故.”

再来谈谈另一位在帕斯卡的好朋友 —— 数学家惠更斯(Huygens) 的影响下成长起来的数学巨人莱布尼兹，他出生于德国东部莱比锡，父亲是莱比锡大学道德哲学教授. 父亲对莱布尼兹的智力做了开发，母亲给他奠定了拉丁文和希腊文的坚实基础，在 14 岁时，他几乎浏览了父亲的所有藏书，立志当一名哲学家. 1661 年秋天，15 岁的他考入莱比锡大学，攻读法律专业. 由于对欧式几何的求知欲，于 1663 年转入耶鲁大学跟数学家厄哈德维格尔学习数学. 19 岁那年，莱布尼兹以优异的成绩从莱比锡大学毕业，获哲学学士学位，而后进入阿尔特道夫大学继续进修，一年后写了《论组合的艺术》，经答辩之后，立即被授予博士学位，鉴于他的才智，教授们一致推荐他担当本校教授. 1669 年，莱布尼兹辞去了大学的教职，到美因兹帝候的政府中任职，决心为整个社会服务. 他在公务之余悉心钻研数学和力学，1670—1671 年他写了第一篇力学论文，经过一年的努力，在 1671 年制成了第一台乘法计算机. 1671 年冬天，作为大使被派遣到巴黎，这时(26 岁) 的他才开始认真研究数学，他在巴黎生活的 4 年，是他在数学方面“发明创造的黄金时代”. 在这期间，他与荷兰数学家、物理学家、天文学家惠更斯的会晤，激起了他对数学的兴趣. 此外他已构想出他所建立的微积分的主要特征，他创立微积分主要是从几何学的角度出发，他的微积分思想最初体现在 1675 年的手稿之中. 1684 年，他在《艺术》杂志上发表的论文《一种求极大、极小和切线的新方法》是历史上最早公开发表的关于微分学的文章；1686 年，他在该杂志上又发表了历史上第一篇关于积分学的文章. 他还是历史上最杰出的符号创造家之一，他所发明的微积分的符号，远远优于牛顿的符号，现今通用的符号 $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \int$ 等以及名称“微分学”和“积分学”都是莱布尼兹创立的. 他也是一位多才多艺的学者，他在哲学、历史学、语言学、生物学、地质学、机械工程、数学、物理学、神学、法学和外交等众多领域均有建树.

牛顿与莱布尼兹的微积分都存在着不足，从 17 世纪末开始以及整个 18 世纪，在西欧各国的科学界、思想界展开了一场规模宏大的激烈争论. 在英国，牛顿及其拥护者们同英

国天主教的大主教贝克莱(Berkeley)为微积分的真理性展开了一场争论;在欧洲大陆,以莱布尼兹为中心的大陆派与法国科学院院士洛尔(M. Rolle)以及荷兰的物理学家、数学家尼文太(Nieuwentijdt)关于微积分展开了一场大辩论,后者抓住微积分赖以建立的基础——无穷小大肆攻击,声称应立刻把微积分从数学中"剪裁掉".还有一场大争论是在英国派与大陆派之间进行的,是关于建立微积分的优先权问题.牛顿的支持者是著名数学家泰勒(Taylor)与麦克劳林(Maclaurin);莱布尼兹的拥护者是著名数学家伯努利(Bernoulli)两兄弟.争论把欧洲科学家分成势不两立的两派,其结果是英国和欧洲大陆的科学家停止了思想交流.在这里,我们不讨论他们之间这场不幸的争论,其实他们都彼此独立地发现了微积分.当然牛顿发现在先,而莱布尼兹发表得早.莱布尼兹没有像牛顿那样对数学研究得深,但他的知识则较广.作为一个分析学家和数学物理学家,他虽都次于牛顿,但他对数学形式有比较敏锐的想象力和卓越的本能.由于牛顿在微积分方面的主要工作和《自然哲学的数学原理》中使用了几何方法,所以在他死后差不多100年中,英国人继续以几何为主要工具;欧洲大陆在接受了莱布尼兹优越的符号之后,加以发扬光大,很快取得了丰硕的成果.

17,18世纪的数学史,几乎全是数学分析的历史.一方面它以前的发展和微积分的许多技巧的发明结合到一起,另一方面这种更精致的数学被应用于力学和其他科学,当然从应用中又衍生出更多的数学问题.

这一时期的绝大部分数学家都对数学分析感兴趣.在英国,那一时期的代表人物有贝克莱、瓦里士、巴罗,他们之后有巴罗的学生牛顿、科林斯(Collins)、格里高利(Gregory),牛顿的追随者有泰勒、麦克劳林、辛普生(Simpson).

在欧洲大陆,那一时期的代表人物有罗伯瓦尔、费马、帕斯卡、莱布尼兹、洛尔、伯努利、欧拉(Euler)以及洛必达(L'Hospitol),以及在他们的影响下成长起来的达朗贝尔(D'Alembert)和被誉为"3L"的拉普拉斯(Laplace)、拉格朗日(Lagrange)、勒让德,他们的继承人有熟知的傅里叶(J. Fourier)、泊松(Poisson)等.

由于这些人的努力,产生了常微分方程、偏微分方程、级数论等.

微积分建立以后,分析数学飞速向前发展,18世纪达到了空前灿烂的程度.其内容的丰富,使人们来不及检查和巩固这一领域的理论基础,因而遭受到种种非难.19世纪初,许多迫切的问题已基本上得到解决,数学家便开始了基础的重建和严格化.

1. 函数概念的发展

首先由傅里叶、柯西(Cauchy)等冲破函数的解析式,之后狄里克雷(Dirichlet)、罗巴切夫斯基(Lobachevsky)用对应观点给函数下了定义,最后由黎曼(Riemann)给出了今天的形式.

2. 极限理论的完成

波尔查诺(Bolzano)的工作堪称是极限理论($\varepsilon-\delta$语言)的先驱,而柯西的工作才使它基本完成,之后经由狄里克雷、黎曼等的贡献,最终由魏尔斯特拉斯(Weierstrass)的工作才彻底完成,可以说极限概念的历史是从动态化过渡到静态化的历史.

3. 实数理论的建立

柯西用极限概念为微积分奠定了基础,在这个基础上魏尔斯特拉斯又进一步地算术化,但并不等于微积分的基础研究已到了终结,人们愈来愈觉得建立实数连续系统的必要性和迫切性.

戴德金(Dedekind)的实数理论是它的现代形式,康托尔(Cantor)的贡献使得微积分建立在集合论上,从而给了微积分一个更坚实的基础.他在1874年所著的《集合论》中关于无穷集的理论可以说是这部无穷交响乐的高潮.

§1.2 极 限

一、数列的极限

极限作为一种方法在我国古代就已经使用.例如,我国古代数学家刘徽,利用“割圆术”来计算圆面积.他首先作圆的内接正六边形,把它的面积记为 A_1;再作内接正十二边形,其面积记为 A_2;再作内接正二十四边形,其面积记为 A_3;循此下去,每次边数加倍,一般把内接正 $6\times 2^{n-1}$ 边形的面积记为 A_n,其中 n 为正整数.这样,我们就得到一系列内接正多边形的面积

$$A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n, \cdots,$$

它们构成一数列.当 n 越大,内接正多边形与圆的差别就越小,从而以 A_n 作为圆面积的近似值也越精确.但是无论 n 取值如何大,只要 n 取定了,A_n 终究只是多边形的面积,仍然还不是圆面积.因此,设想 n 无限增大(记为 $n\to\infty$,读作“n 趋于无穷大”),即内接正多边形的边数无限增加,在这个过程中,内接正多边形无限接近于圆,与此同时,A_n 也无限接近于一个确定的数值(这一数值在数学上称为数列 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 在 $n\to\infty$ 时的极限),这个确定的数值就理解为圆的面积.正如刘徽所言“割之弥细,所失弥少,割之又割,以至于不可割,则与圆合体,而无所失矣”,这里已经有极限的思想.

文科学生在中学已学过数列,下面是一些数列的例子:

(1) $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \cdots, \frac{n+1}{n}, \cdots$;

(2) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots$;

(3) $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \cdots, \frac{n-1}{n}, \cdots$;

(4) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, (-1)^{n-1}\frac{1}{n}, \cdots$;

(5) $1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$;

(6) $1, -1, 1, \cdots, (-1)^{n+1}, \cdots$.

一般地,无穷多个按正整数顺序排列的数

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$$

称为数列,记为$\{x_n\}$,其中每一个数称为数列的项,第 n 项 x_n 称为数列的一般项或通项.

若数列$\{x_n\}$满足

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant \cdots,$$

则称该数列为单调递增数列;反之,若有