自然资源综合研究文集

第二集

数学模型在自然资源研究中的应用

中国科学院自然资源综合考察委员会

前　言

自然资源的研究对象是大生态系统，而自然资源的合理利用问题，又是一个更为复杂的经济—生态系统。系统中为数更多的因子之间存在着直接或间接的相互依存、相互制约的关系。为揭示系统的本质——它们的内部运动规律，以合理地开发利用自然资源，既需要做生态系统各因子之间关系描述性的研究工作，又需要进行对生态开发利用后果予测的综合研究工作。实践已经证明，一般性的定性的描述方法已经不能满足对自然资源及其合理利用的研究要求了。近年来国内许多有关研究工作和发表的论文，都不同程度的采用了数量化方法，因而深化了人们对一些系统规律性的认识，并在改造自然的过程中起到了重要作用。特别是系统论观点和方法的发展和应用，越来越多的深入到资源研究领域，把这一研究工作逐步地提高到一个新的水平。当然，系统方法并不等于数量化方法，前者具有更为广泛和深刻的含意。但应用系统分析往往需要建立系统的数学模型，在某种意义上讲，数学模型往往是用系统方法解决实际问题的核心。由于大生态系统，特别是经济—生态系统的复杂性，它不仅考虑的因子数量大，而且为了研究系统的规律，更需要大量的基础数据，进行繁重的计算工作，因此借助于电子计算机才能使数量化的研究成为可能。

从1978年开始我会就开始将系统的方法应用于自然资源的研究工作，并建立了专门的研究组织，经过几年来的探索，已经取得了一些成果，尽管这些成果还不很成熟和完善，但已受到许多单位专业的科学工作者和从事自然资源及其开发利用的实际工作者的重视。为了更广泛的与从事自然资源研究工作的同行们进行交流，我们编了这个论文集，限于篇幅，我们仅选了部分论文。这些论文的内容包括生态系统基本规律的研究，也包括运用系统论解决自然资源合理利用的方法探讨。尽管题材涉及面很广，但是都含有数学模型作为其主要内容，因此我们将这本文集的名字取为《数学模型在自然资源研究中的应用》。

应当提出在我们这一方面的研究工作中，我会计算机组全体同志做了大量工作。

限于我们的水平，错误和不妥之处在所难免，希望读者提出批评、指正。

目　　录

前言
生态学家在系统分析中的任务……阳含熙（1）
系统分析在自然资源综合考察研究中的应用……齐文虎、李立贤（8）
计算机制图与自然资源考察研究……孙九林、杨志荣（16）
电子计算机符号图在生态学和自然资源研究中的应用……李文华、王德才（22）
植物群落的取样问题……阳含熙（34）
植物群落数量分类研究……阳含熙（47）
相似系数的探讨……阳含熙（79）
地理数学模型与计算机编图——计算机自动编制我国太阳能幅射资源分布图的研究
……陈宝雯（92）
土地资源遥感最佳波段选择数理统计法……戴昌达、陈宝雯、倪建华、刘勇卫(101)
应用突变模型研究沙漠化过程的演变——以东北地区为例……
……郭绍礼、齐文虎、李立贤(112)
应用线性规则选择地区农作物配置最优方案……齐文虎、李立贤、冷允法(121)
应用系统理论方法建立套作玉米系统的数学模型……齐文虎、李立贤、倪建华(131)
草地资源数据库方法—SOCRATE数据库系统的应用……苏大学、廖国藩(142)
回归分析在家畜生态学研究中的应用……王素芳(152)
709机符号组合自动成图系统的研究及应用……齐文虎、李立贤、王素芳、倪建华(159)

生态学家在系统分析中的任务

阳 含 熙

（中国科学院自然资源综合考察委员会）

系统分析科学研究，从历史上讲是一种新的研究方式，把系统看作一个整体，它的结构，功能以及功能结构间的关系。首先要把整体定义下来，是怎样一个单位，即境界问题。

整体研究的重点是主要部分的相互关系之间的研究。这是一种综合的多学科的研究。作为生态系统研究来讲牵涉到的主要部分是生物，与其周围环境之间的相互关系的研究。对于整体的各个部分的相互关系采取多学科，多兵种的途径，建立一个数学的模型。到底怎样建立数学模型，下面来谈谈这个问题。生态学家作为主要组织者必须在专业知识之外还要具备一定的数学知识，才能参与建立数学模型，并了解这个数学模型能否达到研究目的。而这点国内外都认为是一项困难的工作。

生态学家从广义上讲生物学家，对数学知识的应用时间是很长的。数理统计研究最先是从生物科学开始的。统计学科发展的历史可分为几个阶段：

1890年—1940年大约五十年时间是统计学科的形成阶段。这个时期统计学研究主要在英国与生物学科有关的研究机构进行的。最著名的两个人，一个是这五十年中的前二十五年，大约1890年到1915年以前的阶段，卡尔·皮尔生（KARL·PEARSON）提出了最有名的“相关系数”的公式，现在人人都知道了。从性质上决定两个实体或性质相互间的关系，而且通过这个公式可以找出两种实体或性质上的关系。并且通过“相关系数”的研究从一种实体（性质）来估量另一种实体（性质），这就是所谓“回归”（REGRESSION）的研究。它最大的功用是可以从一个容易观测的实体（性质）来估量另外一个难以观测或研究的实体（性质）。这个发现对当时来讲是一个很大的促进。

在后二十五年有一个最重要的代表人物是阿·爱·费雪（R·A·FISHER），工作地点在英国最古老有名的ROTHEMSTED农业实验研究站，当初实验站成立已好几十年了，积累了大量的数据，无法处理和进一步解释，就找了这样一个数学家，建立了数理统计这个学科，包括现在大家都知道的几个部分，其中一个就是取样的原理和知识。有随机取样，机械取样等等，现在这些老的方法还在应用，原理是正确的。另一方面，他们建立了许多实验设计方法即：随机区组、拉丁方、裂区实验等等。五十年代开始出现的比上边的方法更进步的方法，即析因试验。这一系列的许许多多的实验方法。第三部分是他们提出了一系列分析数据的方法，其中最完整的是“方差分析”（老的翻译名称叫“变量分析”）。以上这些部分组合起来之后，对当时的农业科学研究，包括栽培试

验，肥料试验，育种试验起了很大推动作用，也取得了许多成果。许多新兴的推广品种都是在以上一整套试验设计数据分析方法中取得的，包括中国的小麦2905，水稻的中农28，以及解放后西北的碧码小麦，这一系列都是他们创造的方法取得的成果。

数理统计的发展这两个阶段，在今天看起来有局限性，在那些方面呢？我们试图来分析一下：

1.统计科学规定的从取样到分析的总过程中的许多方法，有一些基本的理论假设是很不容易满足的。比如用得最多最普遍的“方差分析”假定了必须具备以下五个条件：〈1〉数据要随机取得；这在小规模的实验室，小面积农作物按规定设计易作到，在大面积的资源调查中经常碰到一些问题，不易在野外随机取得数据。〈2〉必须假定数据是独立的不相互干扰的；如肥料实验，用四种肥料看对作物的效应，用四种肥料就有四种处理，如果把一种处理都排在一块地块上，把另外一种处理放在另外一块地块上，这显然就犯了错误。因为，地块与地块之间有差异性，这个差异就要干扰到你所研究的处理。因为你想找出不同肥料的效应，而地块本身的差异性就影响了结果。因而这个数据得出来是不可靠的。有一个英国的生态学家举过一个例子，他是在1936年写这篇文章的。他说象现在这样调查一个植物对土壤PH的反应的方法是不可靠的。如果你找到一个植物，在植物下边挖它的土壤，测这土壤的PH值，就说这个植物最适于在哪种PH值中生长。如果这样做，就变成电杆也能找出它的最宜PH值。错误在那里呢？首先，没有先找到地块之中PH值的频率分布，如果知道了地块的原来PH值的频率分布，而后找出植物生活生长的土壤PH值频率分布，这两个分布互相比较之后才能找出植物最适于生活在哪种PH值。我很同意杰弗斯的意见，同志们反映意见时讲，不要再讲取样了，不要再讲实验设计了，杰弗斯讲：“那不行！包括美国在内，在这方面犯的错误很多，很多，我一定要讲。”这是他的一种看法，同志们可有保留意见。不过，我是同意杰弗斯的意见的。因为，好的数学方法对坏的数据起不到任何作用，唯一作用是给了它一个漂亮形式而已，而这种结果实际上是“欺骗”。任何高级数学方法不可能增加数据本身任何性质，而对数据本身的设计取样有错误的话，得出来的结论肯定是错误的。不能因为数学方法得出任何改进。〈2〉所有的数据必须是独立的，用数学语言来讲，同一类数据它的方差应该是零的，如果不是同一类数据它们的协方差应该是零。这一条做起来是不容易的。这是第二个条件。〈3〉方差分析数据要求方差是齐性的（HOMOGENIESTY of V-ARIENCE）这一点是不容易的。有许多数据，方差是不一样的，方差的齐性，数据处理专门有一些方法，叫转换（TRANSFORMATION），方差差异比较大，经过数据处理改进它的缺点，如果不能达到这个目的，就不能用这个方法。有许多检验的方法，最简单的方法是检验它的变异系数，这是粗略的检验方法。〈4〉数据要求正态分布，数据表现出一个钟形曲线，如果数据不是这种情况，要用转换方式法。〈5〉数据必须是可加性的。什么叫可加性，数据是同一个测量单位测定的，就叫可公度性（COMMEA SU-RBILITY）。数据是可公度的，而且又是独立的，这些数据就叫具有可加性，必须满足这么几个条件，否则方差分析得出结果有偏差。而这些条件有时是不能都满足的。

2.早期的数理统计方法的计算工具是台式计算机。这样的台式计算机与电子计算机无法比拟，计算量是有限的，金陵大学一百台以上台式计算机天天计算数据，每年用做全国农作物情报报告。今天，只用一台电子计算机就行了。任何科学的发展必须先改进

工具，在方法上，工具上都要有所突破之后，随后才是理论上的突破。

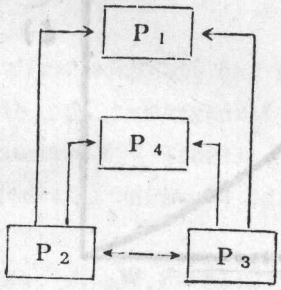
3.早期的试验设计面积小，每一小区一个平方米到几个平方米，面积都很狭小，这样小的面积取得的结果，要在大面积上来应用是有限制的。

4.时间过长。一个试验，从做实验到生产中推广应用，中间经过这样几个阶段：田间实验，区域实验，常常十几年以上时间。

5.试验因子有限，如超过四个因子，拉丁方实验就要有许多排列，有很多困难。尽管早期数理统计方面取得了许许多多成果，但不是令人十分满意的。解放后，有许多人把数理统计抛弃掉，因数理统计有局限性。这些不但反应在数理统计上，也反映在许多其它数学方法上。如早期的聚类分析的八种方法，有许多现在不再用了。又如主分量方法，在1930年代这方法提出来应用在心理学上和人类学上，计算非常费时。现在，用电子计算机通常就只需半小时左右，许许多多计算方法，没有先进工具就没办法推广。尽管数理统计学首先是从生物学发展起来的，而且应用在生物科学中，有一个时期生物统计学BIOMETRY与统计学STATISTICS几乎是同义语，现在分开了。但从四十年代之后，数理统计大量的应用在物理学和化学上。特别是物理学在这方面应用的越来越多，因为它不象生命现象那样复杂，六五年后出现了一个时代，有人把统计学的这一阶段定为1965—1990年。电子计算机最早于1945年发明，用在生物学上是1960年，大量应用是1965年以后，现在是稳定性发展。许多国家，为了适应这种情况，把六十年代之前毕业的大学生重新回炉进行数学训练，学习电子计算机。英国朋友讲生物学家对数学感到非常困难，在一些国际会议上，数学家坐在一起，生态学家或生物学家坐在一起，双方找不出一个共同语言。但是，这种情况逐步有改进，生态学家要应用数学这个工具，自己也要走一段路程，走三分之一或一半以上的路程，了解一些数学方法的特点，它的理论根据和应用范围。

在生物学上常用到的曲线方程就有下面几种，我们还可以举出一些线性代数应用的例子，也并不十分复杂。

〈1〉生态系统



这里：

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

〈2〉曲线方程的拟合

（0，1），（1，3），（2，4），（3，4）；$M=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}$

$M'M=\begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\14\end{bmatrix}$

$$(M^tM)^{-1}=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}7&-3\\-3&2\end{bmatrix}$$

$$V=(M^tM)^{-1}M^tY=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}7&-3\\-3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\\4\\4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1.5\\1\end{bmatrix}$$

$$Y=1.5+X$$

〈3〉森林演替的马尔柯夫过程：

转移矩阵　　杨树　桦树

$$P=\begin{bmatrix}.8&.3\\.2&.7\end{bmatrix}$$

活80%
死20%

初始向量

$$X^0=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\qquad X^1=PX^0=\begin{bmatrix}.8&.3\\.2&.7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}.3\\.7\end{bmatrix}$$

$$X^2=PX^1=\begin{bmatrix}.8&.3\\.2&.7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}.3\\.7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}.45\\.55\end{bmatrix}$$

$$X^3=PX^2=\begin{bmatrix}.8&.3\\.2&.7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}.45\\.55\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}.525\\.475\end{bmatrix}$$

$$X^4=\begin{bmatrix}.563\\.438\end{bmatrix}$$

$$X^5=\begin{bmatrix}.581\\.419\end{bmatrix}$$

$$X^6=\begin{bmatrix}.591\\.409\end{bmatrix}$$

$$X^7=\begin{bmatrix}.595\\.405\end{bmatrix}$$

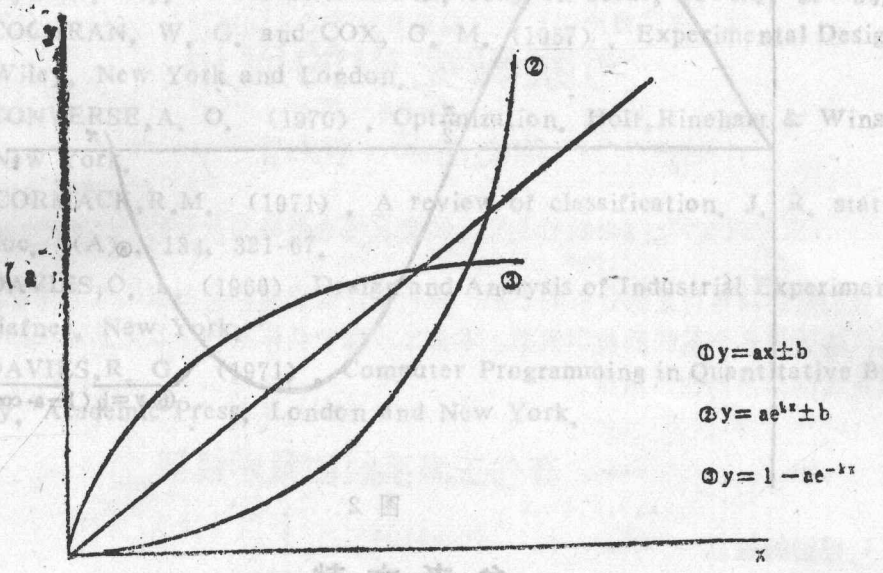
$$X^8=\begin{bmatrix}.598\\.402\end{bmatrix}$$

$$X^9=\begin{bmatrix}.599\\.401\end{bmatrix}$$

$$X^{10}=\begin{bmatrix}0.599\\0.401\end{bmatrix}$$

$$X^{11}=\begin{bmatrix}0.600\\0.400\end{bmatrix}$$

〈4〉生态学常用的曲线（曲线⑤略）



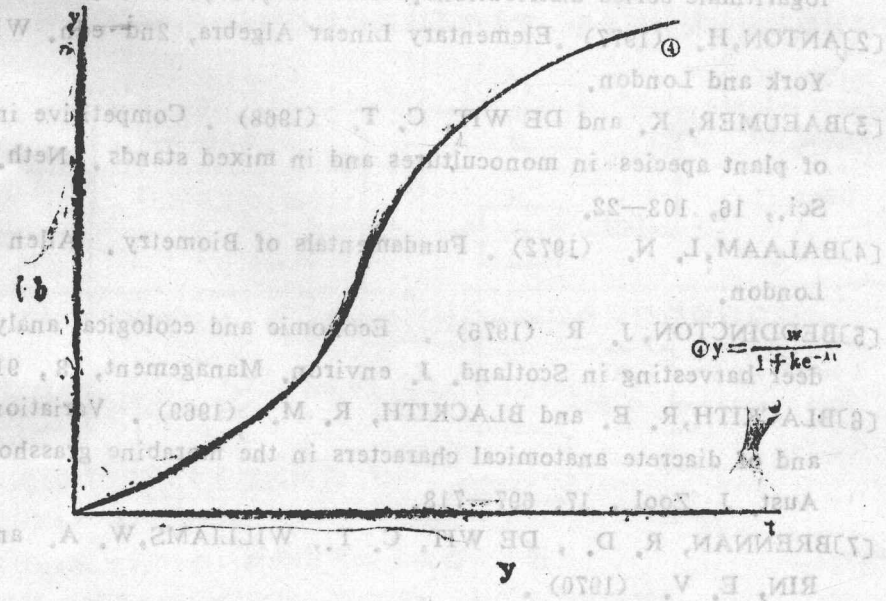


图 1

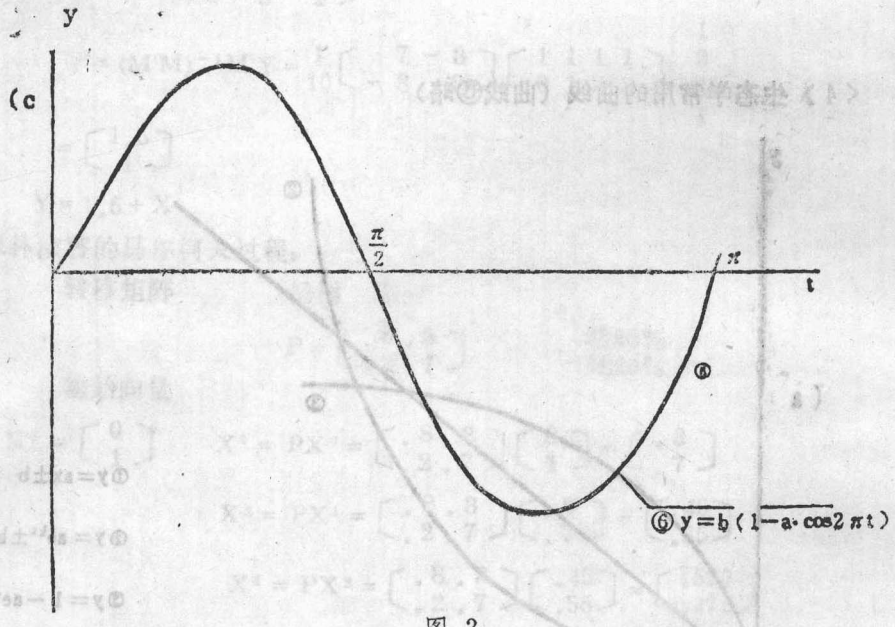


图 2

参 考 文 献

[1]ANSCONBE, F.J. (1950). Sampling theory of the negative bionmial and logarithmic series distributions. Biometrika, 37, 358—82.

[2]ANTON, H. (1977). Elementary Linear Algebra, 2nd edn. Wiley, New York and London.

[3]BAEUMER, K. and DE WIT, C. T. (1968). Competitive interference of plant apecies in monocultures and in mixed stands. Neth. J. agric Sci., 16, 103—22.

[4]BALAAM, L. N. (1972). Fundamentals of Biometry. Allen & Unwin, London.

[5]BEDDINCTON, J. R (1975). Economic and ecological analysis of red deer harvesting in Scotland. J. environ. Management, 3, 91—103.

[6]BLACKITH, R. E. and BLACKITH, R. M. (1969). Variation of shape and of diacrete anatomical characters in the morabine grasshoppers. Aust. J. Zool., 17, 697—718.

[7]BRENNAN, R. D., DE WIT, C. T., WILLIAMS, W. A. and QUATTRIN, E. V. (1970).
The utility of a digital simulation language for ecological modelling. Oecologia, 4, 113—32.

[8]BROSS, I. D. J. (1971). Comment. J. Am. statist. Ass., 66, 562.

[9]BUZAN, A. (1974). Use your Head. BBC, London.

[10]CHASTON, I. (1971). Mathematics for Ecologists, Butterworths, Lo-

ndon.

〔11〕CHRISTIE,J, M. (1972). The characterization of the relationships between basic crop parameters in yield table construction. proc. 3rd Conf. Adv. Crp. Forest Ststisticians, Jouy-en-Josas, IUFRQ, 37—54.

〔12〕COCHRAN, W. G. and COX, G. M. (1957). Experimental Designs. Wiley, New York and London.

〔13〕CONVERSE,A. O. (1970). Optimization. Holt,Rinehart & Winston, New York.

〔14〕CORMACK,R.M. (1971). A review of classification. J. R. statist. Soc. (A), 134, 321-67.

〔15〕DAVIES,O. L. (1960). Design and Analysis of Industrial Experiments. Hafner, New York.

〔16〕DAVIES,R. G. (1971). Computer Programming in Quantitative Biology. Academic Press, London and New York.

系统分析在自然资源综合考察研究中的应用*

齐文虎　　李立贤

（中国科学院自然资源综合考察委员会）

我们从1978年将系统分析的方法，应用于自然资源综合考察研究工作，经过两年的探索，建立了几个系统的数学模型。本文仅就各个具体系统，叙述其系统的建立，数学解法及实际应用的初步结果。

一、套作玉米系统的数学模型

1.模型的建立

我们的目的是研究两茬玉米的光能利用及其相互影响。首先，将玉米的生长过程看成是一个在一定长时间过程中的物质转换过程，而自然光能、叶面积系数、玉米的干物重，以及二（三）茬玉米使三(二）茬玉米接受光能的减少量都是随时间变化的量。根据研究的对象和农作物生长条件，我们把系统简化为单输入、单输出的系统，如图1。

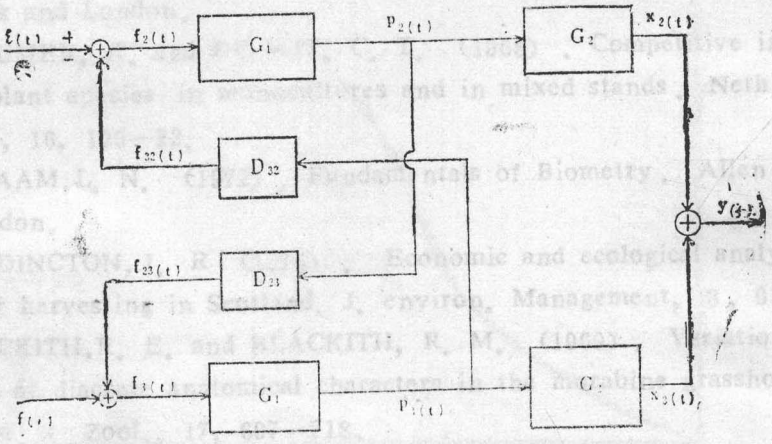


图1　套作玉米系统框图

其中，$f(t)$——自然光日总辐射值，$p_2(t)$——二茬玉米叶面积系数，$p_3(t)$——三茬玉米叶面积系数，$x_2(t)$——二茬玉米干物重，$x_3(t)$——三茬玉米干物重，$f_{32}(t)$——二茬玉米由于三茬玉米的叶子的影响，使二茬玉米接受光辐射的减少量，$f_{23}(t)$——三茬玉

*这些研究工作是在阳含熙先生指导下进行的。第一部分用到的计算程序，是由倪建华同志写的，并且进行计算。

米由于二茬玉米叶子的影响，使三茬玉米接受光辐射的减少量。实际上，$f_{32}(t)$及$f_{23}(t)$包括了株高影响的因素。$f_2(t)$—— 二茬玉米的实际的光辐射输入量，$f_3(t)$——三茬玉米的实际的光辐射输入量。整个系统的输入为$f(t)$，输出为$y(t)$ —— 单位面积的干物总重量。$x_2(t)$和$x_3(t)$为系统的状态函数。

假定系统是线性、非时变的，我们就是要建立如下的函数关系，即

$$x_2(t) = x_2\ (f(t), t)$$
$$x_3(t) = x_3\ (f(t), t)$$
$$y(t) = y\ (x_2(t), x_3(t), t)$$

2.模型的数学解法

我们测定了$f(t)$、$p(t)$和$x(t)$。首先，将f(t)展富成立叶级数（只取五项）

令$f(t) = \alpha_0 + \sum_{n-1}^{4} (\alpha_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$

其中 $\omega = \frac{2\pi}{T}$，$\alpha_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$，

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega t dt \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega t dt \end{aligned}\right\} n = 1,2,3,4$$

根据1978年房山县的观测资料，得到如表 1 的结果

表 1

a_0	384.5431		
a_1	25.0445	b_1	49.4407
a_2	54.7793	b_2	70.1572
a_3	-6.6146	b_3	11.7456
a_4	-0.4673	b_4	-2.4087

对$f(t)$进行拉普拉斯变换。由于系统是线性的，利用叠加原理可以求得。

$$L[f(t)] = L[\alpha_0 + \sum_{n=1}^{4}(\alpha_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)] = \frac{\alpha_0}{s} + \sum_{n=1}^{4}\frac{\alpha_n s + b_n(n\omega)}{(n\omega)^2 + s^2}$$

其次，将$p(t)$和$x(t)$表示为多项式函数

令 $P(t) = P_0 + P_1 t + P_2 t^2$

$x(t) = v_0 + v_1 t + v_2 t^2 + v_3 t^3$

根据观测资料，利用多元回归方法，可求得p_0，p_1，p_2及v_0，v_1，v_2和v_3。

对P(t)和$x(t)$进行拉普拉斯变换，得到

$$P(s) = \frac{p_0}{s} + \frac{p_1}{s^2} + \frac{2p_2}{s^3}$$
$$X(s) = \frac{v_0}{s} + \frac{v_1}{s^2} + \frac{2v_2}{s^3} + \frac{6v_3}{s^4}$$

因此可以求出系统的传递函数：

$$G_1(s)=\frac{P(s)}{F(s)}=\frac{\frac{p_0}{s}+\frac{p_1}{s^2}+\frac{2p_2}{s^3}}{\frac{a_0}{s}+\sum_{n=1}^{4}\frac{a_n s+b_n(n\omega)}{(n\omega)^2+s^2}}$$

$$G_2(s)=\frac{X(s)}{P(s)}=\frac{v_0 s^3+v_1 s^2+2v_2 s+6v_3}{s(p_0 s^2+p_1 s+2p_2)}$$

因为$G_1(s)$与$G_2(s)$组成串联系统，所以

$$G(s)=\frac{X(s)}{F(s)}=\frac{X(s)}{P(s)}\cdot\frac{P(s)}{F(s)}=G_2(s)\cdot G_1(s)$$

3.两茬作物接受光能的相互影响

我们可以用下述方法直接求出反映两茬作物的争光关系的$D_{32}(s)$及$D_{23}(s)$

因为　$f_{32}(t)=f(t)-f_2(t)$

所以　$F_{32}(s)=F(s)-F_2(s)$

$$D_{32}(s)=\frac{F_{32}(s)}{P_3(s)}=\frac{F(s)-F_2(s)}{P_3(s)}=\frac{F(s)-\frac{P_2(s)}{G_1(s)}}{P_3(s)}=\frac{F(s)G_1(s)-P_2(s)}{P_3(s)\cdot G_1(s)}$$

同理，　$D_{23}(s)=\frac{F(s)G_1(s)-P_3(s)}{P_2(s)\cdot G_1(s)}$

只要测定$p_2(t)$和$p_3(t)$就可以用上式来分析两茬作物之间的争光关系。在实际工作中，往往要求知道套作玉米系统中二茬（或三茬）玉米对三茬（或二茬）玉米接受光能的影响，也就是要知道$f_{32}(t)$和$f_{23}(t)$，再由$f_2(t)=f(t)-f_{32}(t)$及$f_3(t)=f(t)-f_{23}(t)$，就可以知道二茬及三茬玉米实际接受辐射量，而这些是很难直接测定的。

由上述求出的传递函数可以有两种办法求出$f_2(t)$及$f_3(t)$。

第一种办法，利用

$$\hat{F}_{32}(s)=\hat{P}_3(s)D_{32}(s)^*$$
$$\hat{F}_{23}(s)=\hat{P}_2(s)D_{32}(s)^*$$

算出$\hat{F}_{32}(t)$和$\hat{F}_{23}(s)$对其进行拉普拉斯反变换就可以求出$\hat{f}_{32}(t)$和$\hat{f}_{23}(t)$，从而求出$\hat{f}_2(t)$及$\hat{f}_3(t)$。

第二种办法是利用

$$\frac{\hat{P}_2(s)}{\hat{F}_2(s)}=G_1(s),$$
$$\frac{\hat{P}_2(s)}{G_1(s)}=\hat{F}_2(s),$$

求出$\hat{F}_2(s)$，再进行拉普拉斯反变换得到$\hat{f}_2(t)=L^{-1}[\hat{F}_2(s)]$。

4.套作玉米系统整体的传递函数。

套作玉米系统整体的传递函数，反映了套作玉米系统整体的特性，是研究套作工作的一个重点，可由下述办法求出。我们用$y(t)$表示单位面积上二茬及三茬作物的总干物重，则

---

* $\hat{P}_2(s)$表示具体观测值或计算的结果，区别于建立系统所用的$P_2(s)$，余类同。

$$y(t) = K_2 x_2(t) + K_3 x_3(t)$$

其中 $K_2 + K_3 = 1$

进行拉普拉斯变换，得

$$Y(s) = K_2 X_2(s) + K_3 X_3(s)$$

所以，套作玉米系统整体的传递函数即可求出。

5.小结

将实测数据，拟合为相应的函数，代入上述公式，可以明显地看出，反映玉米系统从光辐射到干物重转换的本质是传递函数。对于不同套作方式，系统的传递函数是不同的，而不同套作方式的区别决定于$D_{23}(s)$和$D_{32}(s)$，以及K_2和K_3。

因此，若已知系统的输入函数$f(t)$，展开成富里叶级数，然后进行拉普拉斯变换就得到$F(s)$，再利用公式便得到$Y(s) = F(s) \cdot G(s)$；再对其进行拉普拉斯反变换，便可得到$y(t) = L^{-1}[Y(s)]$。这样根据不同的光辐射输入，可以计算不同地区的套作玉米的产量。

更重要的是，就我们建立的这个数学模型本身来说，由于不同系统总收获量$y(t)$的差别取决于$D_{23}(s)$和$D_{32}(s)$。因此，可以通过对$D_{23}(s)$和$D_{32}(s)$的分析，得到最佳套作方式的玉米系统。

二、农作物生长过程的数学模型

在任意时刻t，农作物干物质变化率可表示为$\frac{dN}{dt} = bN - \alpha N = N(b-\alpha) = Nr$。其中$b$代表农作物光合作用的效率，$N$代表某一时刻的干物重，$\alpha$代表农作物的呼吸作用的效率。

1.描述农作物干物质增长的状态方程

如果我们把r看作常数，则可以作下述推导：

$$\frac{dN}{dt} = Nr, \quad \text{则} N = N_0 e^{rt}$$

这样推导出来的农作物干物质增长过程是一条指数曲线，可看做是农作物干物质增长的简化方程，可用于描述某一短时间农作物干物质增长。但用上述公式描述农作物干物质增长过程，有两点不足：

（1）随着时间t的增大，干物质$N(t)$也可无限增大，与实际情况不符。

（2）干物质增长速率在生长后期仍保持很大，与实际情况不符。

因此，建议采用$r = r(t)$的动态描述，即

$$N = N_0 e^{\int_0^t r(t)\,dt}$$

令

$$r(t) = f(N(t)) = 1 - \alpha N(t)$$

即$f(N)$是N的线性函数。为简化，取常数项为1（只要适当地选取时间尺度比例系数就可以做到）。这时方程变为

$$\frac{dN}{N(1-\alpha N)} = dt$$

将方程两边积分

$$\int \left(\frac{1}{N}+\frac{\alpha}{1-\alpha N}\right) dN = \int dt$$

得到

$$N = \frac{ce^{t}}{1+c\alpha e^{t}}$$

令$c=1/b$，得到N的表达式

$$N = \frac{1}{\alpha + be^{-t}}$$

是一条S型曲线，与根据实际观测资料绘制的曲线一致。式中的常数可以按下述方法确定

当$t=0$时，$N=N(0)=\frac{1}{\alpha+b}$

当$t=\infty$时，$N(\infty)=\frac{1}{\alpha}$

只要根据测得的作物干物质的初始值和终值就可以计算出常数α和b，从而得出数学模型。

表2列出不同套作制度的玉米的干物质累积过程数学模式的常数α和b及比值b/α。

表2

常数 \ 方式	4.5 尺	7.5 尺	10 尺	15 尺
a	7.8×10^{-4}	1.08×10^{-3}	1.36×10^{-3}	2.0×10^{-3}
b	0.052	0.0759	0.0653	0.089
b/a	66.67	70.28	48.01	44.5

2.净增长率的动态描述

因为 $N=\frac{1}{\alpha+be^{-t}}$，而$r(t)=1-\alpha N(t)$

所以$r(t)=\frac{d}{b+\alpha e^{t}}$

这就是$r(t)$的函数表达式，表明净增长率$r(t)$随农作物生长期处于不同的生长发育阶段，而有不同的取值。

当$t=0$时，$r(0)=\frac{b}{\alpha+b}$反映在农作物干物质增长的初始时刻的净增长率。

当$t=\infty$时，$r(\infty)=0$反映在农作物生长的后期，净增长率逐渐降低而趋近于0。

3.小结

（1）延长生长期是一条公认的增产途径，但随着生长期的增加，干物质的积累并不成比例地增加，某一农作物系统的干物质最大总量最终总是趋于一个常数

$$N(t)\big|_{t=\infty}=\frac{1}{\alpha}$$

（2）从净增长率$r(t)$的表达式，也可以看出$r(t)$是一条迅速衰减的S型曲线。因此，

在农作物生长后期，净增长率已减至很低。我们定量地计算一下干物质从达到其终值的98%增加到终值的99.9%，所需要的生长时间。以二茬玉米，4.5尺畦情况为例

$$y=\frac{t_{99.9}-t_{98}}{t_{98}}=\frac{\ln\left(99.9\frac{b}{\alpha}\right)-\ln\left(49\frac{b}{\alpha}\right)}{\ln\left(49\frac{b}{\alpha}\right)}=0.37$$

从上式可以看出，一味地以延长生长期来寻求增加产量的方法是不足取的。

（3）净增长率的讨论

我们关心农作物“加速生长”的阶段，即$N(t)$的斜率不断增加的阶段。我们可以求出这个界限点的t值，记作t_m。

由$\frac{dN}{dt}=N(1-\alpha N)$

所以$\frac{d^2N}{dt^2}=N(1-\alpha N)(1-2\alpha N)$

令$\frac{d^2N}{dt^2}=0$，取$1-2\alpha N=0$

得$N=\frac{1}{2\alpha}$

因而求得 $t_m=\ln\frac{b}{\alpha}$

这就是$N(t)$曲线的“拐点”。显然，t_m的取值决定于b/α。表2给出了二茬玉米的不同耕作制的b/α值，以4.5尺畦和7.5尺畦比较接近，而且这种耕作方法的二茬玉米，加速生长时间最长，因而产量最高。详见

4.5尺畦，$t_m=10\ln\frac{b}{\alpha}=10\ln(66.67)=42$天

7.5尺畦，$t_m=10\ln(70.28)=42$天

10尺畦，$t_m=10\ln(48.01)=39$天

15尺畦，$t_m=10\ln(44.5)=38$天

因而可以定量地确定玉米生长的三个时期。$t=0$至t_m是加速增长时期，t_m至t_{98}为增长速度逐渐减慢的时期，t_{98}至$t_{99.9}$逐步停止增长的时期。例如，对于二茬、4.5尺畦玉米的情况是$t_m=42$天，$t_{98}=10\ln\left(49\frac{b}{\alpha}\right)=81$天。与实际情况相符。

（4）系统α、b的大小，主要是由农作物本身的特性决定的。我们所列举的二茬玉米，它们的α、b值都比较接近。它们的差别是由耕作方式不同引起的。耕作方式不同，使得光合作用效率产生了差别，这一点与前述的套作玉米系统分析的结论相同。系数α反映了农作物呼吸作用的效率，α越小则呼吸作用越小，使得最终的干物质量增加。因此，为了增加农作物的产量，应当选择α值小的品种。

三、几种农作物合理配置的数学模型

在某一地区多种作物的合理配置，需要我们建立一个最优化的模型。这里用的是线性规划方法。线性规划实际上就是求一个或多个变量的线性函数(称为目标函数)在一些

线性约束条件下的极大值或极小值的问题。这个函数必须是能够反映某个系统的决策特性的数量化的目标。而那些约束条件，也就是变量之间的关系所受的一些限制也必须是数量化的。我们通过对三江平原一个典型管理局的剖析，为某一地区农作物合理配置的研究，提供一种可行的规划方法。

1.目标函数的确定

三江平原作为我国的重要粮豆产区，要求粮豆高产、稳产。所谓合理配置，就是根据当地自然条件的规律、农业技术水平等条件的限制，找出各种作物种植面积之间的最佳比例，使粮豆总产高而且稳定。

用X，Y，Z分别代表小麦、玉米和大豆种植面积占耕地面积的百分数，则目标函数为

$$f(X,Y,Z) = 176X + 294Y + 146Z \qquad (1)$$

式中X、Y和Z的系数分别为小麦、玉米和大豆的单位面积历年平均产量。

2.约束条件

从当地大部分地区的种植制度，得出第一个约束条件为

$$X + Y + Z \leqslant 100 \qquad (2)$$

从当地大豆在轮作制中的地位，可以得出第二个约束条件为

$$X + Y \leqslant 65 \qquad (3)$$

第三个约束条件，是稳产的要求，通过合理搭配，使农作物平均产量的年变化不超过其平均单产的1/3

$$60X + 110Y + 50Z \leqslant 7000 \qquad (4)$$

各种农作物的种植比例，只能为正值，所以有

$$X \geqslant 0, Y \geqslant 0, Z \geqslant 0 \qquad (5)$$

这就是合理配置的数学模型，也就是在满足约束（2）、（3）、（4）、（5）的条件下，求$f(X,Y,Z)$的极大值。

3.解法

采用Simplex算法，根据具体资料列出初始表

1	1	1	1	0	0	100
60	110	50	0	1	0	7000
1	1	0	0	0	1	65
-176	-294	-146	0	0	0	0

将第一行各项减去第三行对应各项，第二行各项减去第三行各项的60倍，第四行各项加上第三行各项的176倍，得

0	0	1	1	0	-1	35
0	50	50	0	1	-60	3100
1	1	0	0	0	1	65
0	-118	-146	0	0	176	11440