21世纪
高等院校数学规划教材

高等数学

（上册）

褚宝增 陈兆斗 主编

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

21 世纪高等院校数学规划教材

高等数学

（上册）

褚宝增　陈兆斗　主编

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 上册/褚宝增，陈兆斗主编. —北京：北京大学出版社，2018.5
（21世纪高等院校数学规划教材）
ISBN 978-7-301-29560-1

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①褚… ②陈… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2018）第091364号

书　　名	高等数学(上册) GAODENG SHUXUE（SHANGCE）
著作责任者	褚宝增　陈兆斗　主编
责任编辑	曾琬婷
标准书号	ISBN 978-7-301-29560-1
出版发行	北京大学出版社
地　　址	北京市海淀区成府路205号　100871
网　　址	http://www.pup.cn　新浪微博：@北京大学出版社
电子信箱	zpup@pup.cn
电　　话	邮购部62752015　发行部62750672　编辑部62754819
印刷者	北京市科星印刷有限责任公司
经销者	新华书店
	787毫米×960毫米　16开本　17印张　369千字 2018年5月第1版　2018年5月第1次印刷
印　　数	0001—3000册
定　　价	39.00元

内容简介

本书是根据教育部“理工科高等数学课程教学基本要求”编写的本科高等数学教材，编者全部是具有丰富教学经验的一线教师.全书共十二章，分上、下两册出版.上册内容包括：极限、导数与微分、微分中值定理与导数应用、不定积分、定积分及其应用、常微分方程等；下册内容包括：空间解析几何与向量代数、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、傅里叶级数等.本书按节配置习题，每章有总练习题，书末附有答案与提示，便于读者参考.

本书根据理工科学生的实际要求及相关课程的设置次序，对传统的教学内容在结构和内容上做了合理调整，使之更适合新世纪高等数学教学理念和教学内容的改革趋势.其主要特点是：选材取舍精当，行文简约严密，讲解重点突出，服务后续课程，衔接考研思路，注重基础训练和学生综合能力的培养.

本书可作为高等院校理工科各专业本科生高等数学课程的教材，也可作为相关专业的大学生、自学考试学生的教材或教学参考书.

前　言

当前，我国高等教育蓬勃发展，教学改革不断深入，高等院校理工科数学基础课的教学理念、教学内容及教材建设也孕育在这种变革之中. 为适应高等教育21世纪教学内容和课程体系改革的总目标，培养具有创新能力的高素质人才，我们应北京大学出版社的邀请，经集体讨论，分工编写了这套"21世纪高等院校数学规划教材"，其中《高等数学》分上、下两册出版.

本教材参照教育部"理工科高等数学课程教学基本要求"，按照"加强基础、培养能力、重视应用"的指导方针，精心选材，力求实现基础性、应用性、前瞻性的和谐与统一，集中体现了编者长期讲授理工科高等数学课程所积累的丰富教学经验，反映了当前理工科数学教学理念和教学内容的改革趋势. 具体体现在以下几个方面：

1. 精心构建教材内容. 本教材在内容选择方面，根据理工科学生的实际要求及相关专业课程的特点，汲取了国内外优秀教材的优点，对传统的教学内容在结构和内容上做了适当的调整，为后续课程打好坚实的基础.

2. 内容讲述符合认知规律. 以几何直观、物理背景或典型例题作为引入数学基本概念的切入点；对重要概念、重要定理、难点内容从多侧面进行剖析，做到难点分散，便于学生理解与掌握.

3. 强调基础训练和基本能力的培养. 紧密结合概念、定理和运算法则配置丰富的例题，并剖析一些综合性例题. 按节配有适量习题，每章配有总练习题，书末附有习题答案与提示，便于读者参考.

4. 注重学以致用. 紧密结合几何、物理中的应用，通过分析具有典型意义的应用例题和配置多样化习题，培养学生应用数学知识分析和解决实际问题的能力.

本书的第一章极限、第二章导数与微分由王翠香编写，第三章微分中值定理与导数应用、第六章常微分方程由褚宝增编写，第四章不定积分由吴飞编写，第五章定积分及其应用由陈瑞阁编写，第七章空间解析几何与向量代数由邓燕编写，第八章多元函数微分法及其应用由陈振国编写，第九章重积分、第十章曲线积分与曲面积分由赵琳琳编写，第十一章无穷级数、第十二章傅里叶级数由陈兆斗编写. 全书由褚宝增、陈兆斗两位教授统稿.

本书的主要特点是：选材取舍精当，行文简约严密，讲解重点突出，服务后续课程，衔接考研思路等.

特别感谢王祖朝教授、高世臣教授、耿凤杰教授、廉海荣教授对本书的认真审稿及所提出的修改意见.

囿于编者水平及编写时间较为仓促,教材中难免存在疏漏与不妥之处,恳请广大读者不吝指正.

编　者

2018 年 3 月

目　录

第一章 极限

极限是高等数学中最重要、最基本的概念. 这是因为高等数学中其他的基本概念都可用极限概念来表达,且解析运算也可用极限运算来描述. 极限用于描述数列和函数在随变量无限变化过程中的变化趋势,极限的方法是微积分中的基本方法,是人们由有限认识无限、由近似认识精确、由量变认识质变的一种数学方法. 本章将对极限的概念、运算及基本性质进行系统讲述.

§1.1 数列的极限

一、数列极限的概念

所谓数列,简单地说就是编了号的无限多个数的排列,可写成

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots.$$

数列还可以看作一种特殊的函数:

$$x = x(t),$$

其定义域为全体正整数集 $\mathbf{N}_+$,称之为**整标函数**. 从而,数列可理解为一串(无限多个)数:

$$x(1),\ x(2),\ x(3),\ \cdots,\ x(n),\ \cdots.$$

通常将它们记为 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots$,写成数列$\{x_n\}$,其中 x_n 称为该数列的**一般项**. 例如,

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \cdots,\ \frac{1}{2^n},\ \cdots,$$

$$2,\ \frac{1}{2},\ \frac{4}{3},\ \cdots,\ 1+\frac{(-1)^{n-1}}{n},\ \cdots,$$

$$1,\ 8,\ 27,\ \cdots,\ n^3,\ \cdots,$$

$$-1,\ 1,\ -1,\ \cdots,\ (-1)^n,\ \cdots$$

都是数列的例子,它们的一般项 x_n 分别是 $\frac{1}{2^n},1+\frac{(-1)^{n-1}}{n},n^3,(-1)^n$.

数列$\{x_n\}$可以根据 n 的变化看作一列变量. 下面研究数列这种变量

的变化规律——数列的极限. 在数学史上,很早就有朴素的数列极限概念. 战国时代哲学家庄周所著的《庄子·天下篇》中有句名言:“一尺之棰,日取其半,万世不竭.”如果把每天截后剩下部分的长度(单位:尺)记录下来,所得到的数列就是$\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$. 不难看出,当 n 不断增大时,该数列无限地接近 0,但是,不论 n 多么大,$\frac{1}{2^n}$总不等于 0. 再考查数列$\left\{1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right\}$. 随着 n 的无限增大,一般项 $1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 无限地接近 1. 这两个数列反映了一类数列的某种公共特性,即对于数列$\{x_n\}$,存在某个常数 a,随着 n 的不断增大,x_n 无限地接近常数 a. 也就是说,只要 n 变得充分大以后,x_n 与 a 的距离$|x_n-a|$就可以任意小. 这时,称 a 为数列$\{x_n\}$的极限.

为了精确刻画出 x_n 与 a 可以无限接近,即距离$|x_n-a|$可以变得任意小,引入符号 ε,要求对预先任意给定的正数 ε,无论它多么小,都可以使距离$|x_n-a|$小于 ε. 但这不是要求所有的 x_n 均满足不等式$|x_n-a|<\varepsilon$,而是让 n 相当大以后的所有项 x_n 满足$|x_n-a|<\varepsilon$ 即可. 用正整数 N 表示这个“相当大”的数,使得 $n>N$ 以后,即对 $x_{N+1},x_{N+2},\cdots$,都有$|x_n-a|<\varepsilon$ 成立. 例如,对于数列$\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$,取 $a=0$,由于$|x_n-a|=\left|\frac{1}{2^n}-0\right|=\frac{1}{2^n}$,因此

对 $\varepsilon=\frac{1}{100}$,要使 $\frac{1}{2^n}<\frac{1}{100}$,只要 $n>6$,从而当 $n>6$ 以后,就有$|x_n-0|<\frac{1}{100}$;

对 $\varepsilon=\frac{1}{1000}$,要使 $\frac{1}{2^n}<\frac{1}{1000}$,只要 $n>9$,从而当 $n>9$ 以后,就有$|x_n-0|<\frac{1}{1000}$;

对 $\varepsilon=\frac{1}{10000}$,要使 $\frac{1}{2^n}<\frac{1}{10000}$,只要 $n>13$,从而当 $n>13$ 以后,就有$|x_n-0|<\frac{1}{10000}$.

一般地,不论给定的正数 ε 多么小,总可以找到正整数 N,使得对 $n>N$ 的一切 x_n,均满足不等式$\left|\frac{1}{2^n}-0\right|<\varepsilon$. 这就是 $\frac{1}{2^n}$ 无限接近 0 的实质.

综合上述,给出下面数列极限的定义:

定义 设$\{x_n\}$是一个数列,a 是一个常数. 若对任意给定的正数 ε,总存在正整数 N,使得当 $n>N$ 时,有

$$|x_n-a|<\varepsilon, \quad ①$$

则称 a 为**数列$\{x_n\}$的极限**,或者说**数列$\{x_n\}$收敛于** a,记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a \quad 或 \quad x_n\to a \quad (n\to\infty).$$

如果数列$\{x_n\}$没有极限,则称它是**发散**的或**发散数列**.

关于数列极限的定义需要说明两点:首先,正数 ε 是预先任意给定的,一旦给出,它就是固定的,根据这个固定的 ε 再去寻找对应的满足①式的正整数 N;其次,关于 N,我们关心的是它的存在性,而不是它的具体数值. 显然,如果对某个 $\varepsilon>0$,正整数 N 满足①式,则把任何

一个比 N 大的正整数作为 N，①式仍然成立.

如果将常数 a 及数列 $\{x_n\}$ 的各项在数轴上用对应的点表示出来，则对于任意给定的正数 ε，不管它多么小，总存在一个正整数 N，使数列 $\{x_n\}$ 中从第 $N+1$ 项起的一切项所表示的点，全部落在以 a 为中心，以 ε 为半径的开区间 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 内，而在此开区间外，至多有数列 $\{x_n\}$ 的有限个点，见图 1.

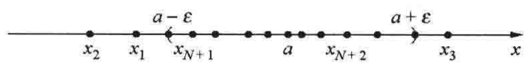

图 1

例 1 用极限的定义证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}=0$.

证 对任意给定的 $\varepsilon>0$，因为 $|x_n-0|=\left|\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}-0\right|=\dfrac{1}{n}$，要使 $|x_n-0|<\varepsilon$，即 $\dfrac{1}{n}<\varepsilon$，只要 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$，所以取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$，即 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$ 时，就有

$$\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}-0\right|<\varepsilon.$$

由数列极限定义有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}=0$.

注 $[x]$表示取整函数，其值是不超过 x 的最大整数，例如

$$[5]=5,\quad [-3.5]=-4,\quad [6.5]=6.$$

例 2 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$，其中 $0<|q|<1$.

证 对任意给定的 $\varepsilon>0$，要使 $|x_n-0|=|q^n|<\varepsilon$，直接解不等式，得到

$$n\ln|q|<\ln\varepsilon.$$

由于 $0<|q|<1$，因此 $\ln|q|<0$，故有 $n>\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$. 取 $N=\left[\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}\right]$，则当 $n>N$ 时，就有

$$|q^n-0|<\varepsilon.$$

由数列极限的定义有 $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$.

从上述两个例子可以看出，用定义来证明数列 $\{x_n\}$ 的极限是 a，关键是解不等式

$$|x_n-a|<\varepsilon \quad 或 \quad a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon,$$

由此找到一个正整数 N，使得当 $n>N$ 时上述不等式成立即可.

例 3 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$.

证 对任意给定的 $\varepsilon>0$，由于

$$\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|=\frac{\sqrt{n^2+a^2}-n}{n}=\frac{a^2}{n(\sqrt{n^2+a^2}+n)}<\frac{a^2}{n},$$

要使

$$\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|<\varepsilon,$$

只要 $\frac{a^2}{n}<\varepsilon$，即 $n>\frac{a^2}{\varepsilon}$. 取 $N=\left[\frac{a^2}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，就有

$$\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|<\varepsilon.$$

由数列极限的定义有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$.

例 3 用到了所谓“适当放大”的方法，即将 $|x_n-a|$ 放大成 $\frac{c}{n^\alpha}$(α,c 为正的实常数)，再由不等式 $\frac{c}{n^\alpha}<\varepsilon$ 求出正整数 N. 这是一种常用的简化方法.

极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的定义还有如下等价论述：

若对任意给定的正数 ε，总存在正整数 N，使得当 $n>N$ 时，有

$$|x_n-a|<k\varepsilon \quad (\text{常数 } k>0),$$

则称 a 为数列 $\{x_n\}$ 的极限，记作 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

二、收敛数列的性质

定理 1(唯一性) 若数列 $\{x_n\}$ 收敛，则它的极限是唯一的.

证 用反证法. 假设当 $n\to\infty$ 时，有 $x_n\to a$ 及 $x_n\to b$，且 $a<b$. 取 $\varepsilon=\frac{b-a}{2}$，根据极限定义，分别存在正整数 N_1 及 N_2，使得当 $n>N_1$ 时，有

$$|x_n-a|<\frac{b-a}{2}; \tag{②}$$

而当 $n>N_2$ 时，有

$$|x_n-b|<\frac{b-a}{2}. \tag{③}$$

今取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，则当 $n>N$ 时，②，③两式同时成立.

但由②式有 $x_n<\frac{b+a}{2}$，而由③式又有 $x_n>\frac{b+a}{2}$，这就产生了矛盾，所以收敛数列不可能有两个不同的极限，即数列 $\{x_n\}$ 的极限是唯一的.

给定数列 $\{x_n\}$，如果存在正数 M，使对一切正整数 n，都有 $|x_n|\leqslant M$，则称数列 $\{x_n\}$ 是**有界的**. 这时数列 $\{x_n\}$ 的全部项所对应的点都落在区间 $[-M,M]$ 内.

定理 2(有界性) 若数列 $\{x_n\}$ 收敛，则它是有界数列.

证 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，根据极限的定义，当取 $\varepsilon=1$ 时，存在正整数 N，使对一切 $n>N$，有

$$|x_n-a|<1, \quad 即 \quad |x_n|=|x_n-a+a|\leqslant|x_n-a|+|a|<1+|a|.$$

令 $M=\max\{|x_1|,|x_2|,\cdots,|x_N|,1+|a|\}$，则对一切正整数 n，都有

$$|x_n|\leqslant M.$$

所以$\{x_n\}$是有界数列.

数列的有界性是数列收敛的必要条件，从而易知无界数列必然是发散的，例如数列$\{n^3\}$是发散数列.

在讨论数列的极限问题时，常常涉及数列的子数列的概念. 一个数列的**子数列**，就是在该数列的排列中，按由前到后的次序抽取其一部分项构成的一个(无限)数列. 一般说来，如果在$\{x_n\}$中首先取出 x_{n_1} 作为子数列的第 1 项，然后在 x_{n_1} 后面再取一项 x_{n_2} 作为第 2 项，……如此下去，就得$\{x_n\}$的一个子数列：

$$x_{n_1},\ x_{n_2},\ x_{n_3},\ \cdots,\ x_{n_k},\ \cdots.$$

子数列的第 k 项 x_{n_k} 恰好是原数列的第 n_k 项. 根据选取的次序，不难得出：

$$n_k\geqslant k; \quad 若 k_1<k_2，则 n_{k_1}<n_{k_2}.$$

定理 3(收敛数列与子数列的关系) 如果数列$\{x_n\}$收敛于 a，那么它的任一子数列收敛，且极限也是 a.

证 设数列$\{x_{n_k}\}$是数列$\{x_n\}$的任一子数列. 对任意给定的 $\varepsilon>0$，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，根据极限的定义，存在一个正整数 N，使得当 $n>N$ 时，有

$$|x_n-a|<\varepsilon.$$

此时，令 $K=N$，则当 $k>K$ 时，有 $n_k\geqslant k>K=N$，从而有

$$|x_{n_k}-a|<\varepsilon.$$

这就证明了$\{x_{n_k}\}$的极限是 a.

这个定理不仅保证了子数列的极限等于原数列的极限，而且提供了判断数列发散的一个方法：如果在一个数列中找到两个子数列，它们都有极限，但极限值却不同，这时原数列就不可能有极限. 例如，数列$\{(-1)^n\}$是发散的. 这是因为，当 n 为偶数时，其子数列$\{x_{2k}\}$的极限为 1；当 n 为奇数时，其子数列$\{x_{2k+1}\}$的极限为 -1.

如果数列$\{x_n\}$的任何子数列$\{x_{n_k}\}$都收敛到同一个值 a，则数列$\{x_n\}$也收敛到 a.

习 题 1.1

1. 设 $x_n=\dfrac{n+1}{n}\ (n=1,2,\cdots)$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$，并填下表：

ε	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001	…
N						