"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材 计算机系列教材

离散数学（第4版）

邓辉文 编著

清华大学出版社

"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材　计算机系列教材

邓辉文　编著

离散数学（第4版）

清华大学出版社

北京

内 容 简 介

本书根据 IEEE-CS/ACM Computing Curricula 2013 的要求，系统地阐述离散数学的经典内容. 全书共 9 章，内容包括：集合、映射与运算，关系，命题逻辑，谓词逻辑，初等数论，图论，几类特殊的图，组合计数，代数结构. 各章的每一节都提供了精选的习题，书后提供了部分习题的答案及提示.

本书以集合、映射、运算和关系为主线，内容联系紧密，逻辑性强，叙述详尽，通俗易懂，结构严谨，逻辑清晰，便于自学.

本书可作为高等学校计算机及相关专业离散数学课程的教材，也可供参加相关专业硕士研究生入学考试者及程序员参考.

图书在版编目（CIP）数据

离散数学/邓辉文编著. —4 版. —北京：清华大学出版社，2019（2020.2重印）
计算机系列教材
ISBN 978-7-302-53696-3

Ⅰ. ①离…　Ⅱ. ①邓…　Ⅲ. ①离散数学—高等学校—教材　Ⅳ. O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2019）第 189293 号

责任编辑：汪汉友　战晓雷
封面设计：常雪影
责任校对：白　蕾
责任印制：沈　露

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：清华大学印刷厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　　**印　　张**：19　　**字　　数**：460 千字
版　　次：2006 年 10 月第 1 版　　2019 年 12 月第 4 版　　**印　　次**：2020 年 2 月第 2 次印刷
定　　价：49.50 元

产品编号：082551-01

前　言

离散数学是研究离散量的结构及关系的学科，它的研究对象与计算机所处理的对象一致. 离散数学是教育部 2009 年发布的“高等学校计算机科学与技术专业核心课程教学实施方案”中的 8 门核心课程(程序设计语言、离散数学、数据结构与算法、计算机组成原理、操作系统、计算机网络、数据库和软件工程)之一，在计算机科学与技术专业教学体系中起着重要的基础理论支撑作用.

本书自出版以来被多所高校选用，已多次印刷，并于 2012 年入选普通高等教育“十二五”国家级规划教材. 根据教育部的要求，入选教材应持续修订完善，及时补充反映最新知识、技术和成果的内容，与时俱进. 为此，编者根据全国高等学校“培养计算机类专业学生解决复杂工程问题能力”研究组的研究成果《培养计算机类专业学生解决复杂工程问题能力》和教育部计算机类教学指导委员会制定的《计算机类专业教学质量国家标准》，对本书第 3 版做了如下修订：

(1) 在第 1 章给出了常见的证明方法：直接法、举反例法、数学归纳法和反证法等.

(2) 将初等数论知识从第 3 版的第 1 章和第 2 章中抽出来，并进行了系统化，单独作为第 5 章。这主要是为了突出数论的重要性，也是为了让第 1 章和第 2 章更集中于集合论知识的讲解.

(3) 考虑到大多数学校的学时和教学情况，精简了代数结构的内容，并将其调整到本书的最后，作为第 9 章.

本着离散数学为计算机科学与技术专业的其他专业课程(如数据结构、操作系统、计算机组成原理、数据库原理、算法设计与分析、编译原理、软件工程、计算机网络、人工智能、形式语言与自动机等)的学习提供必要数学基础的原则，全书共分 9 章，主要内容为：集合、映射与运算，关系，命题逻辑，谓词逻辑，初等数论，图论，几类特殊的图，组合计数，代数结构. 本书以集合、映射、运算和关系为主线，内容联系紧密，逻辑性强. 每一节都提供了精选的习题，书后提供了部分习题答案及提示.

本书各章之间的联系如图 1 所示.

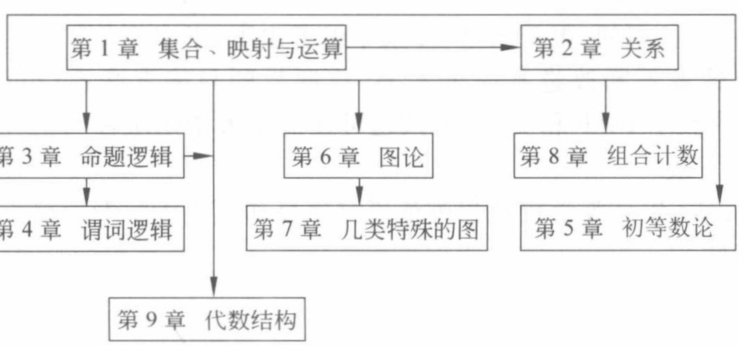

图 1　本书各章之间的联系

本书的目标是：培养学生的抽象思维能力(包括符号抽象和计算抽象)、严密的逻辑思维能力以及计算思维能力，使学生能够将计算机作为认知工具，按计算机的方式求解问题.

本书全部内容的讲授大约需要72学时(见表1). 使用本书的学校根据学时以及学生具体情况，可适当删减第4章和第9章的内容，也可以考虑适当删减以下章节：第1章1.5节和1.6节、第2章2.4节和2.6节，第3章3.4.4节、3.5.1节、3.6节和3.7.3节，第6章6.5.2节和6.6.3节，第7章7.7节，这样即可适合54学时的教学安排. 如果适当增加部分内容或加强习题训练，本书也可供90学时的教学使用. 若结合与本书配套的《离散数学习题解答》(第4版)进行学习，能起到举一反三、加深理解的作用.

表1　学时安排

章　号	章内每节的学时及章的总学时
第1章	2 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 = 9
第2章	2 + 1 + 2 + 1 + 1 + 1 + 2 = 10
第3章	1 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1= 10
第4章	1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6
第5章	3 + 2 +1 = 6
第6章	2 + 1 + 1 + 1 + 2 + 1 + 1 = 9
第7章	1 + 1 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 = 10
第8章	2 + 2 + 2 = 6
第9章	1 + 2 + 1 + 2 = 6

读者在学习过程中可查阅以下网络教学资源：

(1) Kenneth H. Rosen website. http://www.mhhe.com/rosen.

(2) ArsDigita University. Discrete Mathematics Course.

http://aduni.org/courses/discrete/index.php? view=cw.

(3) Harver Mudd College. Discrete Mathematics Course.

http://www.infocobuild.com/education/learn-through-videos/mathematics/discrete-mathematics.html.

(4) MIT. Discrete Mathematics Course.

http://ocw.mit.edu/OcwWeb/Electrical - Engineering - and - Computer - Science/6 - 042JFall - 2005/CourseHome/index.htm.

(5) 爱课程网. http://www.icourses.cn.

(6) 网易公开课. http://open.163.com.

教材建设是一个长期的、艰苦的过程. 限于编者水平，书中难免有不足之处，恳请读者提出宝贵意见，以便编者不断改进和完善本书. 欢迎教师与编者联系(huiwend@swu.edu.cn). 与本书配套的教学PPT和20套考试题可在清华大学出版社网站(http://www.tup.com.cn)本书页面下载.

感谢重庆市2013年高等学校教学改革研究项目和西南大学专业核心课程建设项目(第一批)对本书的资助.

编　者

2019年10月

目　　录

第 1 章　集合、映射与运算

集合是现代数学最基本的概念，映射是现代数学的基本概念，运算本质上就是映射，其基本内容在中学已出现．由于信息科学很多理论研究和应用研究都与集合、映射和运算有关，需要进一步较系统、深入地学习集合、映射和运算的有关内容．

集合、映射、运算和关系是贯穿于本书的一条主线，它们可使离散数学内容不“离散”．

1.1　集合的有关概念

1.1.1　集合

现代数学均建立在集合基础之上，集合已渗透到自然科学以及社会科学的各个研究领域．集合是表示(离散)对象的数学工具．在非数值信息的表示及处理中，可以借助于集合实现数据的表示、删除、插入、排序以及描述数据间的关系，这在程序设计、数据结构、数据库和软件工程等课程中会经常用到．

众所周知，集合论创始人、德国数学家 G. Cantor(1845—1918)在讨论函数项级数的收敛点问题时定义了集合．根据 G. Cantor 的朴素集合论观点，**集合**(set)是具有某种特定性质的对象汇集成的一个整体，其中的每一个对象都称为该集合的**元素**(element)，如班上的所有男生就组成一个集合．我们把一些特定对象看作一个整体，就是一个集合，尽管这种理解存在不足之处．

数学上常用一对大括号(即{ })表示一个整体．

在讨论集合时，应该先指定讨论的范围，这是避免在集合论中出现某些悖论的最好方法．指定的范围本身就是一个集合，称为**全集**(universal set)，有时称为论域，用 U 表示．在一定范围内，特定对象汇集成的整体就是集合．在画文氏(John Venn，1834—1923)图时，用一个矩形框表示，如图 1-1 所示．

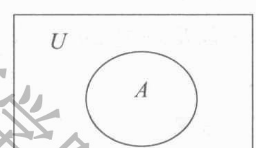

图 1-1

因此，集合是指定范围内具有某种特定性质的对象汇集成的整体．集合通常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示．

给定一个集合，比如 A，对于全集中的任意元素 x，有且只有下述两种情形出现：

(1) 若 x 是 A 中的元素，则称 x **属于** A，记为 $x\in A$．

(2) 若 x 不是 A 中的元素，则称 x **不属于** A，记为 $x\notin A$．

显然，集合 A 有明确的边界．

思考　将班上的所有高个子同学看作一个整体时是一个**模糊集合**(fuzzy set)[1]，你能想出描述它的方法吗？

常见的数的集合(用黑正体字母表示)有以下几个：$\mathbf{N}$ 是自然数集合，包括数 0；$\mathbf{Z}$ 是整数集合(正整数集合也可以记为 $\mathbf{Z}^+$)；$\mathbf{Q}$ 是有理数集合；$\mathbf{R}$ 是实数集合；$\mathbf{C}$ 是复数集合；$\mathbf{Z}_m$ 是

模 m 剩余类集合，$\mathbf{Z}_m=\{0,1,2,\cdots,m-1\}$.

表示集合的常用方法有下面几种.

(1) **列举法**. 将集合中的元素按一定规律列举出来，元素之间用逗号隔开，如小于 10 的偶自然数组成的集合为 $\{0,2,4,6,8\}$，自然数集合 $\mathbf{N}=\{0,1,2,3,\cdots\}$，$\mathbf{Z}=\{\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\cdots\}$. 这种表示方法适用于元素个数有限或元素出现的规律性很强(元素可列)的集合.

注意 所有素数组成的集合 $\mathbf{P}$ 在理论上可用列举法表示(见 1.6.4 节)，但由于素数有无限多个且尚未找到其出现规律，用列举法表示在实际操作时存在一定的困难.

(2) **描述法**. 这种方法用得最多，它只需要把集合中元素满足的条件描述出来即可，一般形式是 $\{x|x$ 满足的条件$\}$. 例如，小于 10 的偶自然数组成的集合可表示为 $\{x|x$ 是自然数且 x 是偶数且 x 小于 $10\}$.

(3) **迭代法**. 首先给出这个集合的初始元素；然后给出由集合中已知元素构造其他元素的方法；最后，有限次使用前面的步骤得到的元素是集合中仅有的元素.

【例 1-1】 自然数集合 $\mathbf{N}$ 可以递归定义如下：

(1) $0\in\mathbf{N}$.

(2) 若 $n\in\mathbf{N}$，则 n 的后继 $n+1\in\mathbf{N}$.

(3) 有限次使用前面的步骤得到的元素是集合 $\mathbf{N}$ 中仅有的元素.

在集合的迭代定义中，最后的步骤很重要，它强调除有限次使用前面的步骤得到的元素是集合中元素外，不含有别的元素.

在计算机科学中，还可以用别的方法定义集合，例如定义一种程序设计语言的语法时常采用的 BNF 法等(参见编译原理课程).

若集合 A 是有限集合，则用 $|A|$ 表示集合 A 中的元素个数，它与函数项级数收敛点的多少密切相关. 集合 A 中的元素个数在中学使用的记号是 $\mathrm{card}(A)$.

需要注意的是，集合中的元素可以是任意对象，如元素本身又可以是集合等. 例如 $A=\{a,\{a,b\},b,c\}$，这时 $|A|=4$，即 A 中有 4 个元素，分别是 $a,\{a,b\},b,c$.

思考 所有不以自身为元素的集合能构成集合吗?

这是一个著名的罗素(B. A. M. Russell)悖论. 该悖论的出现引发了数学的第三次危机. 所谓悖论，就是逻辑上不一致. 假设存在集合 $A=\{X|X\notin X\}$，则无论 $A\in A$ 或 $A\notin A$ 都是矛盾的. 避免这种悖论的方法是指定全集[4]，这就体现了全集的重要性. 而信息科学中出现的集合不会有悖论，因此本书不讨论公理化集合论.

在没有特别说明的情况下，集合之间的元素是没有次序的，前面的集合 A 也可以记为 $A=\{a,b,c,\{a,b\}\}$等. 注意，程序是有序集合. 同时，若没有特别说明，本书所讨论的集合不是多重集，即集合中的元素原则上不重复，所以集合 $\{a,\{a,b\},b,b,c\}$ 就是集合 A.

若集合 A 中有两个 a 元素、5 个 b 元素和无限多个 c 元素，则 A 是可重集，这时 A 可以表示为 $A=\{2\cdot a,5\cdot b,\infty\cdot c\}$. 可重集在讨论组合计数时经常用到.

不含有任何元素的集合称为**空集**(empty set)，记为 $\varnothing$ 或 $\{\ \}$.

1.1.2 子集

一般来说，集合的子集比其本身要“小”一些.

【定义 1-1】 给定两个集合 A 和 B，若 A 中的任意元素都属于 B，则称 A 是 B 的**子集**(subset)，或称 A 包含在 B 中，或称 B 包含 A，记为 $A \subseteq B$，如图 1-2 所示.

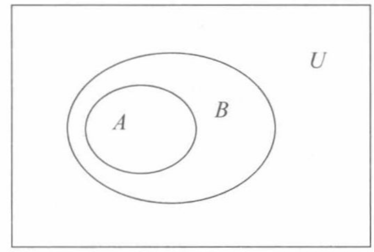

图 1-2

若 A 不是 B 的子集，这时集合 A 中至少有一个元素不属于 B.

显然有下面的定理.

【定理 1-1】 对于任意的集合 A，有 $\varnothing \subseteq A$.

若两个集合 A,B 有完全相同的元素，则称这两个集合**相等**，记为 $A=B$.

我们有下述结论.

【定理 1-2】 设 A,B,C 是任意集合，下列结论成立.

(1) $A \subseteq A$.

(2) 若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$，则 $A=B$.

(3) 若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq C$，则 $A \subseteq C$.

我们知道，上述定理中结论(2)的逆也成立，这就是定理 1-3.

【定理 1-3】 $A=B$ 的充要条件是 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$.

该定理是证明两个集合相等的基本方法.

【定义 1-2】 若 $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$，则称 A 是 B 的**真子集**(proper subset)，记为 $A \subset B$.

需要注意 $\in$ 与 $\subseteq$ 的区别，前者讨论的是元素与集合的关系，后者讨论的是集合与集合的关系，参见下面的例子.

【例 1-2】 设 A,B,C 是任意集合，若 $A \subseteq B, B \in C$，是否必有 $A \subseteq C$?

解 不成立. 例如，$A=\{a,b\}, B=\{a,b,c\}, C=\{a,\{a,b,c\}\}$，这时有 $A \subseteq B, B \in C$，而因为 $b \notin C$，所以结论不成立.

注意 在很多情况下，可以直接根据已知条件得出结论；但对于有些问题的讨论，举反例是一种最具说服力的方法.

1.1.3 幂集

【定义 1-3】 给定集合 X，由 X 的所有子集组成的集合称为 X 的**幂集**(power set)，记为 $P(X)$，即

$$P(X) = \{A \mid A \subseteq X\}$$

$P(X)$ 也可以记为 2^X，这种记法与下面的定理 1-4 有一定的关系.

【例 1-3】 设 $X=\{a,\{a,b\}\}$，计算 $P(X)$.

解 X 的子集有：空集 $\varnothing$；由一个元素构成的子集 $\{a\}$，$\{\{a, b\}\}$；由两个元素构成的子集 $\{a,\{a, b\}\}$. 于是 $P(X)=\{\varnothing,\{a\},\{\{a, b\}\},\{a,\{a, b\}\}\}$.

【定理 1-4】 若 $|X|=n$，则 $|P(X)|=2^n$.

证 $\varnothing$ 是 X 的一个子集；由 X 中一个元素构成的子集有 C_n^1 个；由 X 中两个元素构成的子集有 C_n^2 个……由 X 中 $n-1$ 个元素构成的子集有 C_n^{n-1} 个；由 X 中 n 个元素构成的子集有 C_n^n 个. 因此，由加法原理和二项式定理知 X 的子集合的个数为

$$1 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^{n-1} + C_n^n = (1+1)^n = 2^n$$

上述定理也可以用乘法原理很方便地证得，见习题 1.1.

1.1.4 n 元组

下面用最简洁的方式介绍 n 元组.

【定义 1-4】 将从论域 U 中选取的 n 个元素 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 按照一定顺序排列，就得到一个n 元有序组，简称 **n 元组**(ordered n-tuple)，记为$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$或$\langle x_1, x_2, \cdots, x_n \rangle$.

在不强调排列的元素个数时，n 元组可以简称**元组**.

线性代数中的 n 维向量是 n 元组，有 n 个元素的字符串是 n 元组. 在 n 元组$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$中，x_i称为第 i 分量或第 i 位置元素$(1 \leqslant i \leqslant n)$，它本身又可以是集合.

平面直角坐标系中任意一个点用二元组表示；空间直角坐标系中任意一个点用三元组表示.

n 元组在数据结构中是一个线性表、栈或队列；在数据库中是一条记录，如(张三，男，19，重庆).

显然，两个 n 元组$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$和$(y_1, y_2, \cdots, y_n)$相同的充要条件是其对应的分量或坐标相同，即 $x_i = y_i, 1 \leqslant i \leqslant n$.

一般来说，$(x, y) \neq (y, x)$. 例如二元组(2, 3)和(3, 2)是不相同的，这一点可以在平面直角坐标系下直观地看出. 同时，$((a, b), c)$是二元组，它与二元组$(a, (b, c))$是不同的.

通常把二元组称为**有序对**或**序偶**(ordered pair).

1.1.5 笛卡儿积

给定一些集合，可以按下列方式构造出"新"的集合.

【定义 1-5】 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是集合，称集合$\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i \in A_i, i = 1, 2, \cdots, n\}$为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的**笛卡儿积**(Cartesian product)、**直积**(product set)或**叉积**(cross product)，记为 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$.

解析几何之父笛卡儿(R. Descartes，1596—1650)是法国数学家，"我思故我在"和"越学习越发现自己无知"是他的名言.

由定义可知，笛卡儿积是一个集合，该集合中的元素是 n 元组. 为了方便，将 $\overbrace{A \times A \times \cdots \times A}^{n个}$ 记为 A^n.

【例 1-4】 设 $A = \{a, b\}, B = \{1, 2\}, C = \{\varnothing\}$，试分别计算 $A \times B, B \times A, B \times C$ 和 $A \times B \times C$.

解 $A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2)\}$

$B \times A = \{(1, a), (2, a), (1, b), (2, b)\}$

$B \times C = \{(1, \varnothing), (2, \varnothing)\}$

$A \times B \times C = \{(a, 1, \varnothing), (a, 2, \varnothing), (b, 1, \varnothing), (b, 2, \varnothing)\}$

根据定义有 $A \times \varnothing = \varnothing \times A = \varnothing$，一般来说 $A \times B \neq B \times A$.

利用乘法原理，容易证明定理 1-5.

【定理 1-5】 若$|A| = m, |B| = n$，则$|A \times B| = mn$.