



“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材 计算机系列教材

离散数学 (第4版)

邓辉文 编著

清华大学出版社





“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材 计算机系列教材

邓辉文 编著

离散数学 (第4版)

贵州师范学院内部使用

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书根据 IEEE-CS/ACM Computing Curricula 2013 的要求,系统地阐述离散数学的经典内容. 全书共 9 章,内容包括:集合、映射与运算,关系,命题逻辑,谓词逻辑,初等数论,图论,几类特殊的图,组合计数,代数结构. 各章的每一节都提供了精选的习题,书后提供了部分习题的答案及提示.

本书以集合、映射、运算和关系为主线,内容联系紧密,逻辑性强,叙述详尽,通俗易懂,结构严谨,逻辑清晰,便于自学.

本书可作为高等学校计算机及相关专业离散数学课程的教材,也可供参加相关专业硕士研究生入学考试者及程序员参考.

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

离散数学/邓辉文编著. —4 版. —北京:清华大学出版社,2019(2020.2重印)

计算机系列教材

ISBN 978-7-302-53696-3

I. ①离… II. ①邓… III. ①离散数学—高等学校—教材 IV. O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 189293 号

责任编辑:汪汉友 战晓雷

封面设计:常雪影

责任校对:白 蕾

责任印制:沈 露

出版发行:清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编:100084

社 总 机:010-62770175 邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质 量 反 馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者:清华大学印刷厂

经 销:全国新华书店

开 本:185mm×260mm

印 张:19

字 数:460千字

版 次:2006年10月第1版

2019年12月第4版

印 次:2020年2月第2次印刷

定 价:49.50元

产品编号:082551-01

前 言

离散数学是研究离散量的结构及关系的学科,它的研究对象与计算机所处理的对象一致.离散数学是教育部2009年发布的“高等学校计算机科学与技术专业核心课程教学实施方案”中的8门核心课程(程序设计语言、离散数学、数据结构与算法、计算机组成原理、操作系统、计算机网络、数据库和软件工程)之一,在计算机科学与技术专业教学体系中起着重要的基础理论支撑作用.

本书自出版以来被多所高校选用,已多次印刷,并于2012年入选普通高等教育“十二五”国家级规划教材.根据教育部的要求,入选教材应持续修订完善,及时补充反映最新知识、技术和成果的内容,与时俱进.为此,编者根据全国高等学校“培养计算机类专业学生解决复杂工程问题能力”研究组的研究成果《培养计算机类专业学生解决复杂工程问题能力》和教育部计算机类教学指导委员会制定的《计算机类专业教学质量国家标准》,对本书第3版做了如下修订:

(1) 在第1章给出了常见的证明方法:直接法、举反例法、数学归纳法和反证法等.

(2) 将初等数论知识从第3版的第1章和第2章中抽出来,并进行了系统化,单独作为第5章.这主要是为了突出数论的重要性,也是为了让第1章和第2章更集中于集合论知识的讲解.

(3) 考虑到大多数学校的学时和教学情况,精简了代数结构的内容,并将其调整到本书的最后,作为第9章.

本着离散数学为计算机科学与技术专业的其他专业课程(如数据结构、操作系统、计算机组成原理、数据库原理、算法设计与分析、编译原理、软件工程、计算机网络、人工智能、形式语言与自动机等)的学习提供必要数学基础的原则,全书共分9章,主要内容为:集合、映射与运算,关系,命题逻辑,谓词逻辑,初等数论,图论,几类特殊的图,组合计数,代数结构.本书以集合、映射、运算和关系为主线,内容联系紧密,逻辑性强.每一节都提供了精选的习题,书后提供了部分习题答案及提示.

本书各章之间的联系如图1所示.

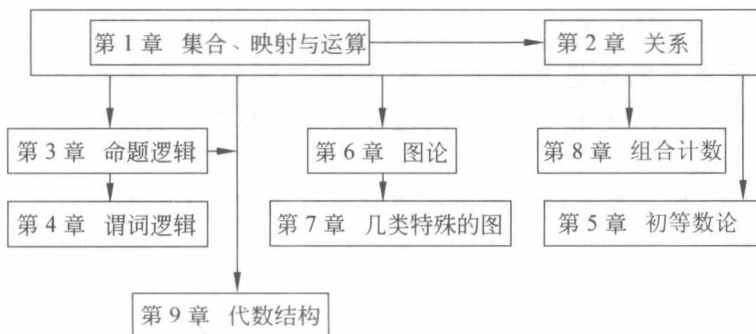


图1 本书各章之间的联系

本书的目标是：培养学生的抽象思维能力(包括符号抽象和计算抽象)、严密的逻辑思维能力以及计算思维能力,使学生能够将计算机作为认知工具,按计算机的方式求解问题.

本书全部内容的讲授大约需要 72 学时(见表 1). 使用本书的学校根据学时以及学生具体情况,可适当删减第 4 章和第 9 章的内容,也可以考虑适当删减以下章节:第 1 章 1.5 节和 1.6 节、第 2 章 2.4 节和 2.6 节,第 3 章 3.4.4 节、3.5.1 节、3.6 节和 3.7.3 节,第 6 章 6.5.2 节和 6.6.3 节,第 7 章 7.7 节,这样即可适合 54 学时的教学安排. 如果适当增加部分内容或加强习题训练,本书也可供 90 学时的教学使用. 若结合与本书配套的《离散数学习题解答》(第 4 版)进行学习,能起到举一反三、加深理解的作用.

表 1 学时安排

章 号	章内每节的学时及章的总学时
第 1 章	$2 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 = 9$
第 2 章	$2 + 1 + 2 + 1 + 1 + 1 + 2 = 10$
第 3 章	$1 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 = 10$
第 4 章	$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6$
第 5 章	$3 + 2 + 1 = 6$
第 6 章	$2 + 1 + 1 + 1 + 2 + 1 + 1 = 9$
第 7 章	$1 + 1 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 = 10$
第 8 章	$2 + 2 + 2 = 6$
第 9 章	$1 + 2 + 1 + 2 = 6$

读者在学习过程中可查阅以下网络教学资源:

(1) Kenneth H. Rosen website. <http://www.mhhe.com/rosen>.

(2) ArsDigita University. Discrete Mathematics Course.

<http://aduni.org/courses/discrete/index.php?view=cw>.

(3) Harver Mudd College. Discrete Mathematics Course.

<http://www.infocobuild.com/education/learn-through-videos/mathematics/discrete-mathematics.html>.

(4) MIT. Discrete Mathematics Course.

<http://ocw.mit.edu/OcwWeb/Electrical-Engineering-and-Computer-Science/6-042JFall-2005/CourseHome/index.htm>.

(5) 爱课程网. <http://www.icourses.cn>.

(6) 网易公开课. <http://open.163.com>.

教材建设是一个长期的、艰苦的过程. 限于编者水平,书中难免有不足之处,恳请读者提出宝贵意见,以便编者不断改进和完善本书. 欢迎教师与编者联系(huiwend@swu.edu.cn). 与本书配套的教学 PPT 和 20 套考试题可在清华大学出版社网站(<http://www.tup.com.cn>)本书页面下载.

感谢重庆市 2013 年高等学校教学改革研究项目和西南大学专业核心课程建设项目(第一批)对本书的资助.

编 者

2019 年 10 月

目 录

第 1 章 集合、映射与运算	1
1.1 集合的有关概念	1
1.1.1 集合	1
1.1.2 子集	2
1.1.3 幂集	3
1.1.4 n 元组	4
1.1.5 笛卡儿积	4
习题 1.1	5
1.2 映射的有关概念	5
1.2.1 映射的定义	5
1.2.2 映射的性质	7
1.2.3 逆映射	9
1.2.4 复合映射	10
习题 1.2	11
1.3 运算的定义及性质	12
1.3.1 运算的定义	13
1.3.2 运算的性质	14
习题 1.3	18
1.4 集合的运算	19
1.4.1 并运算	19
1.4.2 交运算	20
1.4.3 补运算	21
1.4.4 差运算	23
1.4.5 对称差运算	24
习题 1.4	25
1.5 集合的划分与覆盖	26
1.5.1 集合的划分	26
1.5.2 集合的覆盖	28
习题 1.5	29
1.6 集合对等	29
1.6.1 集合对等的定义	29
1.6.2 无限集合	30

1.6.3	集合的基数	30
1.6.4	可数集合	31
1.6.5	不可数集合	31
1.6.6	基数的比较	32
	习题 1.6	32
	本章小结	32
第 2 章	关系	35
2.1	关系的概念	35
2.1.1	n 元关系的定义	35
2.1.2	二元关系	36
2.1.3	关系的定义域和值域	37
2.1.4	关系的表示	38
2.1.5	函数的关系定义	39
	习题 2.1	40
2.2	关系的运算	41
2.2.1	关系的集合运算	41
2.2.2	关系的逆运算	42
2.2.3	关系的复合运算	42
2.2.4	关系的其他运算	45
	习题 2.2	46
2.3	关系的性质	47
2.3.1	自反性	47
2.3.2	反自反性	48
2.3.3	对称性	49
2.3.4	反对称性	49
2.3.5	传递性	50
	习题 2.3	53
2.4	关系的闭包	54
2.4.1	自反闭包	54
2.4.2	对称闭包	55
2.4.3	传递闭包	55
	习题 2.4	59
2.5	等价关系	60
2.5.1	等价关系的定义	60
2.5.2	等价类	61
	习题 2.5	62
2.6	相容关系	63
2.6.1	相容关系的定义	64

2.6.2	相容类	65
	习题 2.6	65
2.7	偏序关系	66
2.7.1	偏序关系的定义	66
2.7.2	偏序集的哈斯图	67
2.7.3	偏序集中的特殊元素	68
	习题 2.7	70
	本章小结	71
第 3 章	命题逻辑	74
3.1	命题的有关概念	74
	习题 3.1	76
3.2	逻辑联结词	76
3.2.1	否定联结词 \neg	76
3.2.2	合取联结词 \wedge	77
3.2.3	析取联结词 \vee	77
3.2.4	异或联结词 \oplus	77
3.2.5	条件联结词 \rightarrow	78
3.2.6	双条件联结词 \leftrightarrow	79
3.2.7	与非联结词 \uparrow	79
3.2.8	或非联结词 \downarrow	79
3.2.9	条件否定联结词 $\overset{n}{\rightarrow}$	79
	习题 3.2	80
3.3	命题公式及其真值表	80
3.3.1	命题公式的定义	80
3.3.2	命题的符号化	81
3.3.3	命题公式的真值表	82
3.3.4	命题公式的类型	82
	习题 3.3	84
3.4	逻辑等值的命题公式	85
3.4.1	逻辑等值的定义	85
3.4.2	基本等值式	86
3.4.3	等值演算法	87
3.4.4	对偶原理	88
	习题 3.4	89
3.5	命题公式的范式	90
3.5.1	命题公式的析取范式及合取范式	90
3.5.2	命题公式的主析取范式及主合取范式	93
	习题 3.5	98

3.6	联结词集合的功能完备性	100
3.6.1	联结词的个数	100
3.6.2	功能完备联结词集	100
	习题 3.6	102
3.7	命题逻辑中的推理	103
3.7.1	推理形式有效性的定义	103
3.7.2	基本推理规则	104
3.7.3	命题逻辑的自然推理系统	105
	习题 3.7	109
	本章小结	110
第 4 章	谓词逻辑	113
4.1	个体、谓词、量词和函词	113
4.1.1	个体	113
4.1.2	谓词	114
4.1.3	量词	114
4.1.4	函词	116
	习题 4.1	116
4.2	谓词公式及命题的符号化	117
4.2.1	谓词公式	117
4.2.2	命题的符号化	118
	习题 4.2	119
4.3	谓词公式的解释及类型	121
4.3.1	谓词公式的解释	121
4.3.2	谓词公式的类型	122
	习题 4.3	123
4.4	逻辑等值的谓词公式	124
4.4.1	谓词公式等值的定义	124
4.4.2	基本等值式	124
	习题 4.4	126
4.5	谓词公式的前束范式	126
4.5.1	谓词公式的前束范式的定义	127
4.5.2	谓词公式的前束范式的计算	127
	习题 4.5	127
4.6	谓词逻辑中的推理	128
4.6.1	逻辑蕴涵式	128
4.6.2	基本推理规则	128
4.6.3	谓词逻辑的自然推理系统	129
	习题 4.6	131

本章小结	132
第 5 章 初等数论	135
5.1 整除关系与素数	135
5.1.1 整除关系与带余除法	135
5.1.2 素数与素因数分解	136
5.1.3 最大公因数	138
5.1.4 最小公倍数	141
习题 5.1	141
5.2 模同余关系	142
5.2.1 模同余关系	142
5.2.2 模同余方程(组)	145
习题 5.2	147
5.3 RSA 密码算法	148
5.3.1 加密与解密过程	148
5.3.2 RSA 密码算法	148
习题 5.3	149
本章小结	150
第 6 章 图论	152
6.1 图的基本概念	152
6.1.1 图的定义	152
6.1.2 邻接	154
6.1.3 关联	154
6.1.4 简单图	154
习题 6.1	155
6.2 节点的度数	156
习题 6.2	158
6.3 子图、图的运算和图同构	158
6.3.1 子图	158
6.3.2 图的运算	159
6.3.3 图同构	160
习题 6.3	161
6.4 路与回路	162
6.4.1 路	162
6.4.2 回路	162
习题 6.4	163
6.5 图的连通性	164
6.5.1 无向图的连通性	164

6.5.2	连通无向图的点连通度与边连通度	165
6.5.3	有向图的连通性	166
	习题 6.5	168
6.6	图的矩阵表示	169
6.6.1	图的邻接矩阵	169
6.6.2	图的可达矩阵	170
6.6.3	图的关联矩阵	171
	习题 6.6	172
6.7	赋权图及最短路径	173
6.7.1	赋权图	173
6.7.2	最短路径	174
	习题 6.7	175
	本章小结	176
第 7 章	几类特殊的图	178
7.1	欧拉图	178
7.1.1	欧拉图的有关概念	178
7.1.2	欧拉定理	178
7.1.3	中国邮递员问题	179
	习题 7.1	180
7.2	哈密顿图	181
7.2.1	哈密顿图的有关概念	181
7.2.2	哈密顿图的必要条件	182
7.2.3	哈密顿图的充分条件	182
7.2.4	旅行商问题	184
	习题 7.2	184
7.3	无向树	185
7.3.1	无向树的定义	185
7.3.2	无向树的性质	186
7.3.3	生成树	187
7.3.4	最小生成树	188
	习题 7.3	189
7.4	有向树	189
7.4.1	有向树的定义	190
7.4.2	根树	190
7.4.3	m 叉树	191
7.4.4	有序树	194
7.4.5	定位二叉树	194
	习题 7.4	196

7.5	平面图	198
7.5.1	平面图的有关概念	198
7.5.2	欧拉公式	199
7.5.3	库拉托夫斯基定理	200
7.5.4	平面图的对偶图	200
	习题 7.5	201
7.6	平面图的面着色	202
7.6.1	平面图的面着色定义	203
7.6.2	图的节点着色	203
7.6.3	任意图的边着色	204
	习题 7.6	205
7.7	二部图及匹配	206
7.7.1	二部图	206
7.7.2	匹配	207
	习题 7.7	208
	本章小结	208
第 8 章	组合计数	211
8.1	计数原理、排列组合与二项式定理	211
8.1.1	计数原理	211
8.1.2	排列	212
8.1.3	组合	213
8.1.4	二项式定理	214
	习题 8.1	214
8.2	生成函数	214
8.2.1	组合计数生成函数	215
8.2.2	排列计数生成函数	217
	习题 8.2	218
8.3	递归关系	218
8.3.1	递归关系的概念	219
8.3.2	常用的递归关系求解方法	220
	习题 8.3	225
	本章小结	225
第 9 章	代数结构	227
9.1	代数结构简介	227
9.1.1	代数结构的定义	227
9.1.2	两种最简单的代数结构: 半群及独异点	228
9.1.3	子代数	229

9.1.4	代数结构的同态与同构	229
	习题 9.1	231
9.2	群	232
9.2.1	群的有关概念	232
9.2.2	子群	235
9.2.3	群的同态	235
	习题 9.2	236
9.3	环和域	237
9.3.1	环的定义	237
9.3.2	几种特殊的环	238
9.3.3	域的定义	239
9.3.4	有限域	240
	习题 9.3	240
9.4	格与布尔代数	241
9.4.1	格的定义和性质	242
9.4.2	分配格	245
9.4.3	有补格	246
9.4.4	布尔代数	247
	习题 9.4	249
	本章小结	250
附录 A	离散数学常用符号	253
附录 B	中英文名词对照表	258
附录 C	部分习题答案及提示	263
参考文献		288

第 1 章 集合、映射与运算

集合是现代数学最基本的概念,映射是现代数学的基本概念,运算本质上就是映射,其基本内容在中学已出现. 由于信息科学很多理论研究和应用研究都与集合、映射和运算有关,需要进一步较系统、深入地学习集合、映射和运算的有关内容.

集合、映射、运算和关系是贯穿于本书的一条主线,它们可使离散数学内容不“离散”.

1.1 集合的有关概念

1.1.1 集合

现代数学均建立在集合基础之上,集合已渗透到自然科学以及社会科学的各个研究领域. 集合是表示(离散)对象的数学工具. 在非数值信息的表示及处理中,可以借助于集合实现数据的表示、删除、插入、排序以及描述数据间的关系,这在程序设计、数据结构、数据库和软件工程等课程中会经常用到.

众所周知,集合论创始人、德国数学家 G. Cantor(1845—1918)在讨论函数项级数的收敛点问题时定义了集合. 根据 G. Cantor 的朴素集合论观点,集合(set)是具有某种特定性质的对象汇集成的一个整体,其中的每一个对象都称为该集合的**元素**(element),如班上的所有男生就组成一个集合. 我们把一些特定对象看作一个整体,就是一个集合,尽管这种理解存在不足之处.

数学上常用一对大括号(即 $\{ \}$)表示一个整体.

在讨论集合时,应该先指定讨论的范围,这是避免在集合论中出现某些悖论的最好方法. 指定的范围本身就是一个集合,称为**全集**(universal set),有时称为论域,用 U 表示. 在一定范围内,特定对象汇集成的整体就是集合. 在画文氏(John Venn, 1834—1923)图时,用一个矩形框表示,如图 1-1 所示.

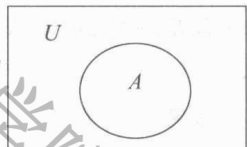


图 1-1

因此,集合是指定范围内具有某种特定性质的对象汇集成的整体. 集合通常用大写字母 A, B, C, \dots 表示.

给定一个集合,比如 A ,对于全集中的任意元素 x ,有且只有下述两种情形出现:

- (1) 若 x 是 A 中的元素,则称 x 属于 A ,记为 $x \in A$.
- (2) 若 x 不是 A 中的元素,则称 x 不属于 A ,记为 $x \notin A$.

显然,集合 A 有明确的边界.

思考 将班上的所有高个子同学看作一个整体时是一个**模糊集合**(fuzzy set)^[1],你能想出描述它的方法吗?

常见的数的集合(用黑正体字母表示)有以下几个: \mathbf{N} 是自然数集合,包括数 0; \mathbf{Z} 是整数集合(正整数集合也可以记为 \mathbf{Z}^+); \mathbf{Q} 是有理数集合; \mathbf{R} 是实数集合; \mathbf{C} 是复数集合; \mathbf{Z}_m 是

模 m 剩余类集合, $\mathbf{Z}_m = \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$.

表示集合的常用方法有下面几种.

(1) **列举法**. 将集合中的元素按一定规律列举出来, 元素之间用逗号隔开, 如小于 10 的偶自然数组成的集合为 $\{0, 2, 4, 6, 8\}$, 自然数集合 $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, $\mathbf{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$. 这种表示方法适用于元素个数有限或元素出现的规律性很强(元素可列)的集合.

注意 所有素数组成的集合 \mathbf{P} 在理论上可用列举法表示(见 1.6.4 节), 但由于素数有无限多个且尚未找到其出现规律, 用列举法表示在实际操作时存在一定的困难.

(2) **描述法**. 这种方法用得最多, 它只需要把集合中元素满足的条件描述出来即可, 一般形式是 $\{x | x \text{ 满足的条件}\}$. 例如, 小于 10 的偶自然数组成的集合可表示为 $\{x | x \text{ 是自然数且 } x \text{ 是偶数且 } x \text{ 小于 } 10\}$.

(3) **迭代法**. 首先给出这个集合的初始元素; 然后给出由集合中已知元素构造其他元素的方法; 最后, 有限次使用前面的步骤得到的元素是集合中仅有的元素.

【例 1-1】 自然数集合 \mathbf{N} 可以递归定义如下:

(1) $0 \in \mathbf{N}$.

(2) 若 $n \in \mathbf{N}$, 则 n 的后继 $n+1 \in \mathbf{N}$.

(3) 有限次使用前面的步骤得到的元素是集合 \mathbf{N} 中仅有的元素.

在集合的迭代定义中, 最后的步骤很重要, 它强调除有限次使用前面的步骤得到的元素是集合中元素外, 不含有别的元素.

在计算机科学中, 还可以用别的方法定义集合, 例如定义一种程序设计语言的语法时常采用的 BNF 法等(参见编译原理课程).

若集合 A 是有限集合, 则用 $|A|$ 表示集合 A 中的元素个数, 它与函数项级数收敛点的多少密切相关. 集合 A 中的元素个数在中学使用的记号是 $\text{card}(A)$.

需要注意的是, 集合中的元素可以是任意对象, 如元素本身又可以是集合等. 例如 $A = \{a, \{a, b\}, b, c\}$, 这时 $|A| = 4$, 即 A 中有 4 个元素, 分别是 $a, \{a, b\}, b, c$.

思考 所有不以自身为元素的集合能构成集合吗?

这是一个著名的罗素(B. A. M. Russell)悖论. 该悖论的出现引发了数学的第三次危机. 所谓悖论, 就是逻辑上不一致. 假设存在集合 $A = \{X | X \notin X\}$, 则无论 $A \in A$ 或 $A \notin A$ 都是矛盾的. 避免这种悖论的方法是指定全集^[4], 这就体现了全集的重要性. 而信息科学中出现的集合不会有悖论, 因此本书不讨论公理化集合论.

在没有特别说明的情况下, 集合之间的元素是没有次序的, 前面的集合 A 也可以记为 $A = \{a, b, c, \{a, b\}\}$ 等. 注意, 程序是有序集合. 同时, 若没有特别说明, 本书所讨论的集合不是多重集, 即集合中的元素原则上不重复, 所以集合 $\{a, \{a, b\}, b, b, c\}$ 就是集合 A .

若集合 A 中有两个 a 元素、5 个 b 元素和无限多个 c 元素, 则 A 是可重集, 这时 A 可以表示为 $A = \{2 \cdot a, 5 \cdot b, \infty \cdot c\}$. 可重集在讨论组合计数时经常用到.

不含有任何元素的集合称为空集(empty set), 记为 \emptyset 或 $\{\}$.

1.1.2 子集

一般来说, 集合的子集比其本身要“小”一些.

【定义 1-1】 给定两个集合 A 和 B , 若 A 中的任意元素都属于 B , 则称 A 是 B 的子集 (subset), 或称 A 包含在 B 中, 或称 B 包含 A , 记为 $A \subseteq B$, 如图 1-2 所示.

若 A 不是 B 的子集, 这时集合 A 中至少有一个元素不属于 B .

显然有下面的定理.

【定理 1-1】 对于任意的集合 A , 有 $\emptyset \subseteq A$.

若两个集合 A, B 有完全相同的元素, 则称这两个集合相等, 记为 $A=B$.

我们有下述结论.

【定理 1-2】 设 A, B, C 是任意集合, 下列结论成立.

- (1) $A \subseteq A$.
- (2) 若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$, 则 $A=B$.
- (3) 若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq C$, 则 $A \subseteq C$.

我们知道, 上述定理中结论(2)的逆也成立, 这就是定理 1-3.

【定理 1-3】 $A=B$ 的充要条件是 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$.

该定理是证明两个集合相等的基本方法.

【定义 1-2】 若 $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$, 则称 A 是 B 的真子集 (proper subset), 记为 $A \subset B$.

需要注意 \in 与 \subseteq 的区别, 前者讨论的是元素与集合的关系, 后者讨论的是集合与集合的关系, 参见下面的例子.

【例 1-2】 设 A, B, C 是任意集合, 若 $A \subseteq B, B \in C$, 是否必有 $A \subseteq C$?

解 不成立. 例如, $A = \{a, b\}, B = \{a, b, c\}, C = \{a, \{a, b, c\}\}$, 这时有 $A \subseteq B, B \in C$, 而因为 $b \notin C$, 所以结论不成立.

注意 在很多情况下, 可以直接根据已知条件得出结论; 但对于有些问题的讨论, 举反例是一种最具说服力的方法.

1.1.3 幂集

【定义 1-3】 给定集合 X , 由 X 的所有子集组成的集合称为 X 的幂集 (power set), 记为 $P(X)$, 即

$$P(X) = \{A \mid A \subseteq X\}$$

$P(X)$ 也可以记为 2^X , 这种记法与下面的定理 1-4 有一定的关系.

【例 1-3】 设 $X = \{a, \{a, b\}\}$, 计算 $P(X)$.

解 X 的子集有: 空集 \emptyset ; 由一个元素构成的子集 $\{a\}, \{\{a, b\}\}$; 由两个元素构成的子集 $\{a, \{a, b\}\}$. 于是 $P(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{\{a, b\}\}, \{a, \{a, b\}\}\}$.

【定理 1-4】 若 $|X| = n$, 则 $|P(X)| = 2^n$.

证 \emptyset 是 X 的一个子集; 由 X 中一个元素构成的子集有 C_n^1 个; 由 X 中两个元素构成的子集有 C_n^2 个……由 X 中 $n-1$ 个元素构成的子集有 C_n^{n-1} 个; 由 X 中 n 个元素构成的子集有 C_n^n 个. 因此, 由加法原理和二项式定理知 X 的子集合的个数为

$$1 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^{n-1} + C_n^n = (1+1)^n = 2^n$$

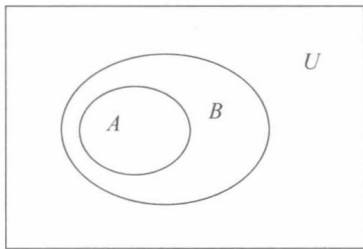


图 1-2

上述定理也可以用乘法原理很方便地证得,见习题 1.1.

1.1.4 n 元组

下面用最简洁的方式介绍 n 元组.

【定义 1-4】 将从论域 U 中选取的 n 个元素 x_1, x_2, \dots, x_n 按照一定顺序排列,就得到一个 n 元有序组,简称 n 元组(ordered n -tuple),记为 (x_1, x_2, \dots, x_n) 或 $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$.

在不强调排列的元素个数时, n 元组可以简称元组.

线性代数中的 n 维向量是 n 元组,有 n 个元素的字符串是 n 元组.在 n 元组 (x_1, x_2, \dots, x_n) 中, x_i 称为第 i 分量或第 i 位置元素 ($1 \leq i \leq n$),它本身又可以是集合.

平面直角坐标系中任意一个点用二元组表示;空间直角坐标系中任意一个点用三元组表示.

n 元组在数据结构中是一个线性表、栈或队列;在数据库中是一条记录,如(张三,男,19,重庆).

显然,两个 n 元组 (x_1, x_2, \dots, x_n) 和 (y_1, y_2, \dots, y_n) 相同的充要条件是其对应的分量或坐标相同,即 $x_i = y_i, 1 \leq i \leq n$.

一般来说, $(x, y) \neq (y, x)$.例如二元组 $(2, 3)$ 和 $(3, 2)$ 是不相同的,这一点可以在平面直角坐标系下直观地看出.同时, $((a, b), c)$ 是二元组,它与二元组 $(a, (b, c))$ 是不同的.

通常把二元组称为有序对或序偶(ordered pair).

1.1.5 笛卡儿积

给定一些集合,可以按下列方式构造出“新”的集合.

【定义 1-5】 设 A_1, A_2, \dots, A_n 是集合,称集合 $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in A_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ 为 A_1, A_2, \dots, A_n 的笛卡儿积(Cartesian product)、直积(product set)或叉积(cross product),记为 $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$.

解析几何之父笛卡儿(R. Descartes, 1596—1650)是法国数学家,“我思故我在”和“越学习越发现自己无知”是他的名言.

由定义可知,笛卡儿积是一个集合,该集合中的元素是 n 元组.为了方便,将 $\overbrace{A \times A \times \dots \times A}^n$ 记为 A^n .

【例 1-4】 设 $A = \{a, b\}, B = \{1, 2\}, C = \{\emptyset\}$,试分别计算 $A \times B, B \times A, B \times C$ 和 $A \times B \times C$.

解 $A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2)\}$

$B \times A = \{(1, a), (2, a), (1, b), (2, b)\}$

$B \times C = \{(1, \emptyset), (2, \emptyset)\}$

$A \times B \times C = \{(a, 1, \emptyset), (a, 2, \emptyset), (b, 1, \emptyset), (b, 2, \emptyset)\}$

根据定义有 $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$,一般来说 $A \times B \neq B \times A$.

利用乘法原理,容易证明定理 1-5.

【定理 1-5】 若 $|A| = m, |B| = n$,则 $|A \times B| = mn$.