


普通高等教育“十二五”规划教材

# 中学数学 课程标准与教材研究

ZHONGXUE SHUXUE  
KECHENG BIAOZHUN YU JIAOCAI YANJIU

主编 王红蔚


 郑州大学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

# 中学数学 课程标准与教材研究

ZHONGXUE SHUXUE  
KECHENG BIAOZHUN YU JIAOCAI YANJIU

主编 王红蔚

 郑州大学出版社  
郑州

图书在版编目(CIP)数据

中学数学课程标准与教材研究/王红蔚主编. —郑州:郑州大学出版社,2014.8

ISBN 978-7-5645-0769-5

I. ①中… II. ①王… III. ①中学数学课-课程标准-高等学校-教材②中学数学课-教材-研究-高等学校-教材 IV. ①G633.602

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第170297号

郑州大学出版社出版发行

郑州市大学路40号

出版人:王 锋

全国新华书店经销

郑州市诚丰印刷有限公司印制

开本:787 mm×1 092 mm 1/16

印张:15.5

字数:374千字

版次:2014年8月第1版

邮政编码:450052

发行部电话:0371-66966070

印次:2014年8月第1次印刷

书号:ISBN 978-7-5645-0769-5

定价:33.00元

本书如有印装质量问题,由本社负责调换

## 作者名单

主 编 王红蔚

副主编 闫德明 杨宪立

周高军 赵艳会

## 内容提要

本书包括数学课程的现代发展、初中数学课程标准、高中数学课程标准、初中数学教材与教学研究、高中数学教材与教学研究等五章内容,可作为高等院校师范专业学生作为教材使用,也可作为教师培训用书。

河南省高等学校教师教育  
精品资源共享课程建设成果

河南省高校特色专业建设点  
数学教育专业建设成果

## 序 言

《数学课程标准》是数学教育工作者的共同家园。我们要知道它的历史传统,理解它的设计理念,欣赏其中的亭台楼阁,培育园中的花草树木。把我们的家园建设好,更是我们的一分责任。王红蔚等老师撰写这本书,其目的也就是全景式描绘这一家园的著作,非常切合今日时代的需求。

进入 21 世纪以来,中国数学教育界发生的最大事件,肯定是《数学课程标准》的颁布与实行。10 多年来,《数学课程标准》一直处于争论之中,甚至成为“人大”“政协”会议上的提案。《数学课程标准》也从“实验稿”,经过修正,出版了“2011 年版”。改革的大方向坚持下来了,一些“矫枉过正”的弊端纠正了,一些新颖的理念提出来了,许多实践经验总结出来了,这是我们一笔宝贵的财富。本书从宏观的考察出发,梳理了许多概念的来龙去脉,有利于人们对《义务教育数学课程标准(2011 年版)》的理解。例如,对于“十大核心概念”的诠释,就是很有意义的工作。

记得新加坡的李秉彝教授,在 2013 年举行的《中国数学教育未来十年展望》的会议上说过“课程标准是‘家’,不是牢房”。诚哉斯言。有些人夸大《课程标准》的作用,说《课程标准》体现了国家意志,是必须遵循的法定文件。这就未免有点过了。一般地说,《课程标准》对内容的规定有其刚性的一面,什么该学,什么不必学,什么可以考,什么不能考,一旦以正式文件公布,无论是否合理都必须执行。但是,今日之《课程标准》中还包括一些教学理念的提出,以及内容的呈现方式,教学设计的示例,等等。这些论述只不过是一种建议,并非绝对真理。事实上,世界上至今还没有哪一种数学教育理论堪称“普世适用”的铁律,充其量不过是比较为大家公认的结论而已。君不见,一度被捧为“学习理论新纪元”的“建构主义教育”已经风光不再了吗?所以说,不要把《数学课程标准》当作牢房,禁止这样,不准那样,必须“舆论一律”;而是要将《数学课程标准》作为大家共同参与的研究平台,凝聚大家意见的共同家园。我注意到,本书的标题是《中学数学课程标准与教材研究》。正因为是“研究”的成果,那就不仅是一种“解读”的宣讲稿,而且是一份实事求是进行研究的学术成果了。

教育一直处于改革的漩涡之中,而数学教育又往往是历次教育改革的前哨,这一现象中外皆然。因此,2011 年版的数学课程标准,也不会是终极真理,仍然需要进一步的改革。如果说新世纪前 10 年的数学教育改革,着重在数学教学方法的改变,着重于“自主、

合作、探索”教学理念的建立,那么今后 10 年的改革重点也许要向数学教学内容的深层研究倾斜。国际上有所谓“教学内容知识”(pedagogical content knowledge, 简称 PCK)的研究。我们是否也要更多地关注数学内容的教学呢?例如,在数学本质的揭示、数学价值的呈现、数学文化的建设、数学内涵的欣赏、数学问题结构的多样与开放等领域多下一点功夫呢?

王红蔚主编的这本著作就要问世了。这是数学教育百花园中的一朵红花。我祝愿它能得到大家的赏识。因作者之请,写了一些感想,权作为序。

张奠宙

2014 年仲春于华东师范大学数学教育研究所



一、数学1	91
二、数学2	94
三、数学3	97
四、数学4	104
五、数学5	108
六、选修系列1	111
七、选修系列2	120
八、选修系列3、系列4	124
九、课程内容的变化及其确定的原则	125
<b>第四章 初中数学教材与教学研究</b>	129
<b>第一节 义务教育数学教材研究</b>	129
一、义务教育数学教材的结构与特点	129
二、义务教育数学教材内容分析	133
<b>第二节 数与代数教学研究</b>	137
一、数与代数的内容结构及中考要点分析	137
二、深刻理解教学目标,提升教学立意	138
三、教学中发现的问题	141
四、教学案例分析研究	144
<b>第三节 图形与几何教学研究</b>	155
一、图形与几何内容结构及中考要点分析	155
二、深刻理解教学目标,提升教学立意	156
三、教学中存在的问题	158
四、教学案例分析研究	159
<b>第四节 统计与概率教学研究</b>	166
一、统计与概率内容结构及中考要点分析	166
二、深刻理解教学目标,提升教学立意	167
三、教学中发现的问题与反思	169
四、教学案例分析研究	171
<b>第五节 综合与实践教学研究</b>	173
一、案例分析与数学教育研究	174
二、数学命题编拟的常用方法	181
三、一道几何题的研究性学习	184
<b>第五章 高中数学教材与教学研究</b>	189
<b>第一节 高中数学教材研究</b>	189
一、高中数学教材的特点	189
二、高中数学教材内容分析	196
<b>第二节 高中数学教学研究</b>	201
一、数列	201

二、微积分 .....	211
三、立体几何 .....	216
四、圆锥曲线 .....	220
五、概率 .....	224
六、统计 .....	226
七、算法 .....	229
参考文献 .....	234

## 数学课程的现代发展

### 第一章 现代数学的发展

本课程以数学的发展为主线,介绍数学知识的发展与安排,来寻求教育理念的体现,探讨数学课程内容的变化。著名的数学课程论专家豪森(G. Howson, 美国)所著《数学课程论》指出:“数学课程发展的动力来自各个不同方面”。“最大的动力来自社会”,“工作场所”、“教学,包括教育本身”。“社会和需求”、“对基础”的要求,“教育发展”的要求,“对数学”的要求,“对数学”的要求,“对数学”的要求。优良的 tradition 和特色,教师在教学过程中,应注重学生的思维能力的培养,使学生在学习中,能体会到数学的

#### 一、数学课程发展的必然性

##### 1. 数学课程发展的原因

数学课程的发展,是随着社会的发展而发展的。随着社会的发展,数学课程的内容和结构也在不断地变化。数学课程的发展,是随着社会的发展而发展的。随着社会的发展,数学课程的内容和结构也在不断地变化。数学课程的发展,是随着社会的发展而发展的。随着社会的发展,数学课程的内容和结构也在不断地变化。

数学课程的发展,是随着社会的发展而发展的。随着社会的发展,数学课程的内容和结构也在不断地变化。数学课程的发展,是随着社会的发展而发展的。随着社会的发展,数学课程的内容和结构也在不断地变化。数学课程的发展,是随着社会的发展而发展的。随着社会的发展,数学课程的内容和结构也在不断地变化。

# 第一章

## 数学课程的现代发展

### 第一节 数学课程及其发展

课程是指学校学生所应学习的学科总和及其进程与安排,是国家教育理念的体现。课程内涵丰富且不断发展变化。著名的数学课程论专家豪森(G. Howson 英国)所著《数学课程发展》指出:“促使课程发展的动力来自各个不同方面”“最大的动力来自社会”,还有“动力来自数学,来自教育本身”。社会的需要、科技进步的要求、教育发展的要求、数学发展的要求、学生发展的要求使数学课程发展成为必然。优良的传统和特色、教师的数学与教学水平、社会的环境又决定了数学课程发展必须是稳定的。

#### 一、数学课程发展的必然性

##### 1. 社会和科学技术的发展

社会发展是数学课程改革的直接动力。社会的需求直接或间接地决定着数学课程所应具有的时代标准和价值取向,成为选择课程内容、方法、评价的依据。比如,在现代广泛的生产领域、经济领域和日常生活中,收集数据,分析处理数据,并根据结果做出预测和决策已成为普遍需求,数学课程就应该对此做出反映,数据处理意识、思想、方法就成了数学课程的重要内容。

社会的发展,使得人们的生活方式、内容和节奏也发生了变化,根据《全日制义务教育数学课程标准解读》提供的一项调查,选择与老百姓生活密切相关的报刊杂志,从中了解百姓生活中的数学,结论如下:①数学的定量化特征越来越多地表现在人们的日常生活中;②图表,尤其是各种各样的统计图、统计表出现较多,它们以清楚、明了、信息量大、对比度强等特点出现在报刊中;③《中国证券报》是一份比较专业化的报纸,在调查的两个不同时段的结果中,都出现了比较复杂和比较多的数学表达式;④与生活相关的报道

及广告中的数学内容很多也很丰富<sup>①</sup>。数学课程的社会责任与价值内涵应该从对社会需求的一般适应转变为积极地服务于社会,并前瞻性地为社会的未来需要做好准备。

科学技术的发展,一是改变了数学学习方法,信息技术的应用使数学实验轻而易举;二是科技的发展又向数学提出了更高要求,数学化的手段在高科技发展中发挥着重要作用,以至普遍认为高科技本质上是数学技术。这两方面的影响也毫无例外地要在数学课程中体现出来。

## 2. 国际数学教育的发展

数学教育自身的发展必然是影响数学课程发展的一个重要因素。在20世纪与21世纪之交,世界各国的教育包括数学教育都发展迅猛,下面以美国、英国、俄罗斯和日本的数学课程改革为例,观察国际数学教育的发展。

(1) 美国 一个在数学课程改革方面勇于探索,不断改进的国家。

美国最近的数学教育改革开始于1989年的全美数学教师协会(NCTM)公布的有史以来第一个美国国家标准《中小学数学课程与评价标准》(简称《标准1989》)。2000年美国又重新推出面向21世纪的《中小学数学的原则与标准》(简称《标准2000》),其中提出6条原则,10条标准,前5条标准是关于数学内容的,后5条标准是关于数学过程的。

具体原则为:

- 1) 平等性原则 指数学教学设计应当促进所有学生的数学学习。
- 2) 课程的原则 指数学教学设计应当突出重要的和有意义的数学,并设计出协调的和综合的数学课程。
- 3) 教学的原则 指数学教学设计的实施依赖于有能力的教师。
- 4) 学习的原则 指数学教学设计应使学生理解数学和应用数学。
- 5) 评估的原则 指数学教学设计应当包括评估,以指导、强化和评价学生的数学学习,并为教师提供必要的信息。
- 6) 技术性原则 指数学教学设计应当利用现代技术帮助学生理解数学,并为他们进入技术性不断增强的社会做好准备。

具体标准为:

- 1) 数学运算标准
  - \* 理解数学、数字的表达方法、数字之间的关联以及联系。
  - \* 理解运算的含义以及各种运算之间的关联。
  - \* 熟练地进行计算并能给出恰当的估算。
- 2) 代数标准
  - \* 理解模式、关系和运算。
  - \* 使用代数符号表达,分析数学情境和结构。
  - \* 通过数学模型表达和理解定量关系。

<sup>①</sup> 刘兼,孙晓天.全日制义务教育数学课程标准解读[M].北京:北京师范大学出版社,2002.

- \* 分析各种情境中的变化。

### 3) 几何标准

- \* 分析二维和三维几何形状的特征和性质,建构与几何相关的数学证明。

- \* 用坐标表示确定位置,并描述空间关系。

- \* 运用变换和对称分析数学情境。

- \* 通过视觉化、空间推理和几何模型解决问题。

### 4) 测量标准

- \* 理解物体的测量特性,以及测量的单位、体系和过程。

- \* 运用恰当的技术、工具和公式进行测量。

### 5) 数据分析与概率标准

- \* 构造可用数据说明问题,收集、组织和呈现相关的数据以解答问题。

- \* 选择并使用恰当的统计方法分析数据。

- \* 提出并评价基本数据的推断和预测。

- \* 理解和使用概率的基本概念。

### 6) 问题解决标准

- \* 通过问题解决建立新的数学知识。

- \* 解决数学和其他情境中的问题。

- \* 运用并改编各种适宜的策略以解决问题。

- \* 监控和反思数学问题解决的过程。

### 7) 推理与证明标准

- \* 认识到推理与证明是数学的根本。

- \* 提出探索数学猜想。

- \* 提出并评价数学论据和证明。

- \* 选择并使用各种推理类型和证明方法。

### 8) 交流标准

- \* 通过交流,组织和巩固数学思想。

- \* 向他人连贯地、清晰地表述数学思想。

- \* 分析和评价他人的数学思想和策略。

- \* 使用数学语言准确地表达数学思想。

### 9) 联系标准

- \* 认识和使用数学思想之间的联系。

- \* 理解数学思想是如何相互联系并构成统一整体的。

- \* 认识并运用数学之外情境中的数学。

### 10) 表达标准

- \* 建构表达的组织,记录交流数学思想。

- \* 选择、应用和变换数学表达以解决问题。

- \* 表达数学建模,解释物理、社会和数学现象。

可以看出,美国的数学课程十分重视教学过程,专门制定具体标准,美国的数学课程

与教学有以下几方面特点:

第一,注重学生问题解决能力的培养。在他们的数学教材中,提供很多富有挑战性的设计作业,其难度要求并不高,主要强调综合能力的培养,解决这类题目,往往需要学生走向社会,亲自搜集信息,甄别筛选信息,分析处理信息,归纳总结规律,论证所得结果,陈述成果。这些技能和经验是在常规的数学学习中无法获得的。

第二,强调数学与生活,数学与其他学科的联系。在数学教材中,介绍了许多数学在实际生活中的应用,向学生展示数学是如何在其他学科(不仅局限于理科)中发挥作用的。美国学生在数学课堂上接触到很多应用性问题,十分贴近生活。

第三,重视数学交流。要求学生清晰地写出应用数学解决问题的过程,要求写数学日志并对自己的数学学习进行反思,强调对数学课本的阅读,提高使用数学语言能力,为数学交流打下基础。使学生通过数学交流,加深对数学知识的理解。

第四,数学课堂活动很常见。结对学习或小组活动,使学生通过活动体验协作精神,体会协作是现代生活的重要因素。合作学习也是培养学生的数学交流能力的一个有效途径。

第五,强调技术。美国的教育者相信,计算器(机)的使用无论在计算还是理解知识上都有积极作用而无消极作用;利用计算器(机)的自动反馈功能,学生可以及时修正自己的学习,计算机的模拟功能可以拓展学生的学习领域,一些受客观条件限制的活动在计算机中可以得到实现;因特网的发展使学生的学习不再局限于课本,可以走向社会、走向世界。

不过从《标准 1989》颁布以来到《标准 2000》颁布及以后,在新课程标准的课程开发过程中,数学家认为课程中任意地删减了一些内容,严重忽视了基本技能培养,于是对新标准的批评声四起。由 200 多名大学数学家和科学家,其中包括诺贝尔奖和菲尔兹奖得主联合签名并在华盛顿邮报发表致美国部长的公开信。信中要求教育部长撤回此前对 10 种数学教学用书的推荐,并要求停止数学标准的实施。这是“数学战争”(math wars)的一个典型事例。在这场持久的数学论战中,数学家们认为“太不重视学生对基本算术运算的掌握和对基本的数的知识的记忆,对必不可少的重复性训练重视不够”<sup>①</sup>,表达了他们对课程、标准、评价、教师准备和教学法等方面的不同观点。这些争论,加深了对学校数学一些重要问题的认识,但也阻碍了美国改进数学学习的努力。于是,活跃于数学和数学教育的专家重新审视了这场争论,2005 年进行对话后,达成以下 10 点共识<sup>②</sup>:

第一,数字方面的基本技能对于多样化的日常应用仍然是十分重要的。这些技能为更高级的数学学习提供了重要的基础。

第二,数学需要使用有关精确定义的对象及概念进行小心推理。

第三,学生必须能够明确地表达问题和解决问题。

第四,自动化回忆基本事实。计算的流畅性需要基本数字事实的自动化回忆。

<sup>①</sup> 李祎.从“课程标准”到“课程焦点”——近 20 年美国数学课程发展及其启示[J].外国中小学教育,2007(7):20-24.

<sup>②</sup> 张奠宙.数学“双基”教学的理论与实践[M].南宁:广西教育出版社,2008.

第五,计算器对学生是有帮助的,但必须慎重使用它们,以免妨碍学生对基本算术和计算步骤的熟练掌握。同样的,图形计算器能增强学生对函数的理解。

第六,学生应该熟练地使用整数运算的法则,这些基本算法是数学的主要智慧结晶之一。

第七,分数的数学意义是十分重要的。分数的运算是代数学习的重要基础。

第八,数学教学中的“现实”背景,通过应用问题进行数学教学可能有助于激发动机和导入数学观点。然而,这种方法不应该被提升到一个一般的原则。

第九,现实能够通过直接教学、结构化的调查和开放式的探究组合进行有效的学习。根据具体数学内容、学习目标、学生已有的技能和知识来决定是采用直接教学法或是结构化的探究教学法,将会取得更好的教学效果。

第十,有效的数学教学依赖于深刻理解的学科知识。教师必须能够做他们教的数学,但是仅此而已对教学来说是不够的。有效的教学需要理解隐含的意义,并说明教学的观点和程序,能够建立主题同主题之间的联系,能流畅、正确和精确地使用数学术语和记号。

基于达成的共识,以及借鉴新加坡等东方国家的经验,2006年美国NCTM组织数学家、数学教育家以及中小学教师,通过广泛征求各界意见出版了《学校数学原则和标准》(NCTM,2000)的扩展文件《学前到八年级数学课程焦点:寻求一致》,简称《课程焦点》<sup>①</sup>。《课程焦点》发布后,《纽约时报》发表评论指出,它将给美国中小学的数学教育带来深刻的变化,并为困扰美国基础教育20年的“数学战”画上句号<sup>②</sup>。

美国认为,他们国家在20世纪大部分的时间里,拥有无与伦比的数学力量——无论是数学专家的资历和数量,还是工程、科学、金融等领域的领导规模和质量,甚至是接受数学教育的人口范围。但同时,他们又提出,如果教育体制没有实质性、持续的改变,美国将会在21世纪放弃他们的领导地位。鉴于美国数学教育的平庸表现,美国总统在2006年4月签发了总统令,专门成立国家数学咨询小组,负责根据“最有效的科学证据”对“美国学生掌握更多的数学知识和提高数学成绩”提出建议。根据总统的要求,主要在7个方面进行了广泛的调查和研究,并提出了一些建设性的建议,强调美国一定要采取实际行动来加强他们在学习领域的中心地位。7个方面是课程内容、学习过程、教师和教师教育、教学实践、教学材料、评价、研究政策和机制。

通过变革、数学战争、寻求一致等的努力,美国数学教育观念出现了以下一些变化:①强调数学是成功的基础;②重视理论,更强调实用;③回避争论,寻求对策;④学习信念出现东西融合(东乃世界东方包括中国);⑤提倡双基,寻求平衡(此双基乃我国之传统)<sup>③</sup>。

① 黄荣金. 美国“数学战争”始末及其启示[J]. 数学通报,2007(1):24-30.

② 白改平,杨光伟. 美国数学课程改革的特点及其启示[J]. 外国中小学教育,2008(7):43-46.

③ 桂德怀,徐斌艳. 国家数学咨询组报告:美国数学教育的新视角[J]. 外国中小学教育,2008(11):33-37.

(2) 英国 一个关注层次化数学教育,不断摸索经验的国家。

英国国会 1988 年通过《教育改革法案》,这个法案从根本上改变了英国传统课程中地方、学校有充分的教育自主权的局面,取消学校和教师的课程自主权。要求在所有的公立学校实施“国家课程”,包括数学、语言和科学三门核心课程。该法案对数学课程发展的重要影响是政府组织工作组进行课程标准的制定,于 1989 年开始实行法定国家课程,标志着国家对课程开始具有约束力。在此之前,英国的各科课程比较自由。英国注重在实践中不断改进课程,1989,1992,1995 年先后实施了三套国家课程标准,每一套都是基于前面的课程标准修改而制定的。实施国家课程是近 20 年来英国政府提高学校教学水准的核心政策。2000 年又开始实施新的国家课程标准。

2000 年版的《国家数学课程标准》主要由两大部分构成:学习计划和成绩目标。四个关键学段(key stage,缩写 KS),其中 KS1(5~7 岁)和 KS2(7~11 岁),这两个关键阶段就是初级教育,即小学教育;KS3(11~14 岁)和 KS4(14~16 岁)是义务中学教育阶段。每一个学段都有自己的学习计划,学习计划从“知识、技能、理解”和学习范围两个方面阐述学生应该学会的内容,描述了学习广度;此外,学习计划还说明了国家数学课程在写、讲、听、读等方面使用语言的要求,以及使用信息技术(information communication technology,简称 ICT)的要求。学习计划对所有教师提出三项教学原则:①个性化教育。设立学习挑战,给每一个学生创造学习上成功的机会,使他们达到尽可能高的水平。对那些成绩远高于期望水平的学生,教师要为他们安排富有挑战性的学习任务;对那些低于期望水平的学生,有必要大幅度实施个性差异教学。②层次化教育。适应不同学生的不同学习需求。指出教师要考虑学生的不同经验、背景、兴趣、能力,合理安排教学,使所有学生能充分有效地参与课堂教学过程。教师应知道法律上涉及种族、性别和残疾人平等机会的要求,确保满足所有学生在教育上的要求。教师要采取专门措施去适应学生的不同需要,包括创造有效学习环境,使学生学有动机、学有专心,提供学习上均等的机会,建立学习目标,使用适当的评定方法。③弱势群体教育。克服部分学生和群体的潜在障碍。弱势群体一般指有特殊需要的学生,有残疾的学生,以及英语非母语的学生,学习纲要对此有专门的论述和具体建议,并认为这一方面非常重要。

成绩目标则是从“使用和应用数学”“数与代数”“形状、空间与测量”和“数据处理”四个方面进行描述。列出每个方面中不同能力和发展水平的学生具有的知识、技能和理解的期望标准,按照九种不同的学习水平做了详细的划分,各水平的难易程度有别,由低到高进展,指出处于每个水平的多数学生典型的学业表现、类型及范围。这里充分体现了英国传统的层次化教学思想,是教师把握层次化教学的操作依据。在实际教学中,英国也十分注重区别化。在英国的中小学,经常采用混合能力分班、学科能力分班、均衡能力分班、总体能力分班来进行教学。

在学习目标中,英国数学教育还有一些特点,比如,结合现代技术进行数学教学,以及强调各个学科之间的系统性和协调性。学习纲领在这些方面都有详尽的阐述,在数学课程纲要中明确具体地阐明与其他学科内容要求上的联系是英国的特色,是其他各国大纲中少见的。

英国数学教育的核心在于,坚持个性化教育和层次化教育,这可以在他们的国家数