ISSN 1000-8934
CN 11-1649/B

自然哲学　科技哲学　科技与社会

自然辩证法研究

STUDIES IN DIALECTICS OF NATURE

PHILOSOPHY OF NATURE, SCIENCE AND TECHNOLOGY
SCIENCE, TECHNOLOGY AND SOCIETY

增刊

1997 年　第 13 卷，　增刊

1997　Volume 13.　Supplement

中国自然辩证法研究会主办

"99-2"

鸣　谢

本期增刊得到下列单位和个人的慷慨赞助，特此鸣谢：

中国逻辑与语言函授大学

香港　黄展骥先生

香港　罗业宏先生

香港　李显时先生

香港　余世坚先生

·书讯·

中国逻辑学会编委会编《逻辑今探》，即中国逻辑学会第五次代表大会暨学术讨论会论文集，于 1997 年 10 月由中国社会科学文献出版社出版。该书分三个部分。第一部分为科研论文，第二部分为论文摘要，第三部分为中国逻辑学会文件、通知及全部会员的通讯录。全书共 40 万字，定价 29 元。本会会员购买此书可享受优惠价： 25 元。(凡在此书发表论文并已交版面费 100 元以上者，本会将赠书两本。) 欲购者请与刘壮虎联系。联系地址： 100871，北京大学哲学系。

自然辩证法研究

（月刊）

1997

第13卷 增刊

（逻辑学研究专辑）

10月20日出版

本刊执行主编：吴　坚　本刊电子版：http: // www.sinobook.com

执行副主编：马惠娣

STUDIES IN DIALECTICS OF NATURE

(PHILOSOPHY OF NATURE, SCIENCE AND TECHNOLOGY, SCIENCE,TECHNOLOGY AND SOCIETY)

Vol. 13, Supplementary Issue

Internet Version: http // www. sinobook. com

自然辩证法研究
Vol. 13，增刊，1997

·符号逻辑·

模型 $^{R}\Delta^{(\mathscr{B})}$ 的一些性质

李 娜

参考文献[1]给出了集合论的有穷公理系统 GB 的广义布尔值模型 $^{R}\Delta^{(\mathscr{B})}$。本文讨论：(1) $^{R}\Delta^{(\mathscr{B})}$ 中的混合原理；(2) $^{R}\Delta^{(\mathscr{B})}$ 中的序数和基数。在下面的讨论中，我们总是假设 $^{R}\Delta^{(\mathscr{B})}$ 是 GB 的广义布尔值模型（即：这里的 $\mathscr{B}=\bigcup_{\lambda} B_\lambda$ 是一个完全的布尔代数类）。限于篇幅，将略去本文中一些定理的证明。

一、$^{R}\Delta^{(\mathscr{B})}$ 中的混合与混合原理

令 $\{a_i: i\in I\}$ 是 $\mathscr{B}$ 中的一个反链，并且 $\{U_i: i\in I\}\subseteq {}^{R}\Delta^{(\mathscr{B})}$。我们定义 $\{U_i: i\in I\}$ 关于 $\{a_i: i\in I\}$ 的混合 $\sum_{i\in I} a_i\cdot U_i$ 为 $U\in{}^{R}\Delta^{(\mathscr{B})}$ 使得：

(a) 如果 $\{U_i: i\in I\}\subseteq {}^{R}\Delta^{(\mathscr{B})}$，则 $\mathrm{dom}(U)=\bigcup_i \mathrm{dom}(U_i)$ 且

$$U(z)=\sum_{i\in I} a_i\cdot\| z\in U_i\| \qquad \text{对任意的 } z\in\mathrm{dom}(U)$$

(b) 如果 $\{U_i: i\in I\}\subseteq{}^{R}\Delta^{(\mathscr{B})}$ 且对 $\forall i\in I(U_i\notin{}^{R}\Delta^{(\mathscr{B})})$，则令

$$\| z\in U\|=\sum_{i\in I} a_i\cdot\| z\in U_i\| \qquad \text{对任意的 } z\in{}^{R}\Delta^{(\mathscr{B})}$$

(c) 如果 $\{U_i: i\in I\}\subseteq{}^{R}\Delta^{(\mathscr{B})}$ 且 $\exists i\in I(U_i\in{}^{R}\Delta^{(\mathscr{B})})$ 且 $\exists j\in I\,(i\neq j\wedge U_j\notin{}^{R}\Delta^{(\mathscr{B})})$，则令

$$\| z\in U\|=\sum_{i\in I} a_i\cdot\| z\in U_i\| \qquad \text{对任意的 } z\in{}^{R}\Delta^{(\mathscr{B})}$$

混合引理 令 $\{a_i: i\in I\}$ 是 $\mathscr{B}$ 中的反链，令 $\{U_i: i\in I\}\subseteq{}^{R}\Delta^{(\mathscr{B})}$ 且 $\sum_{i\in I} a_i\cdot U_i=U$，那么，对所有的 $i\in I$，$a_i\leq\| U=U_i\|$。

混合原理 如果 $\varphi(X)$ 是 L_{GB} 的公式，则

$$\exists U\in{}^{R}\Delta^{(\mathscr{B})}(\|\varphi(U)\|=\|\exists X\varphi(X)\|$$
$$\exists U'\in{}^{R}\Delta^{(\mathscr{B})}(\|\varphi(U')\|=\|\forall X\varphi(X)\|。$$

推论 对任意的 Σ_n 或 Π_n 公式 φ，存在一个无量词的公式 φ' 使得 $\|\varphi\|=\|\varphi'\|$。

二、$^{R}\Delta^{(\mathscr{B})}$ 中的序数和基数

基本定理 (a) 任给 $x, y\in V$，都有
$x\in y\leftrightarrow{}^{R}\Delta^{(\mathscr{B})}\models\hat{x}\in\hat{y}$，$x=y\leftrightarrow{}^{R}\Delta^{(\mathscr{B})}\models\hat{x}=\hat{y}$

(b) 任给受囿公式 $\varphi(v_1,\dots,v_n)$ 和 $x_1,\dots,x_n\in V$，都有 $\varphi(x_1,\dots,x_n)\leftrightarrow{}^{R}\Delta^{(\mathscr{B})}\models\varphi(\hat{x}_1,\dots,\hat{x}_n)$

(c) 令 $\varphi(v_1,\dots,v_n)$ 是 Σ_1 公式且 $x_1,\dots,x_n\in V$，则 $\varphi(x_1,\dots,x_n)\to{}^{R}\Delta^{(\mathscr{B})}\models\varphi(\hat{x}_1,\dots,\hat{x}_n)$

$\mathrm{Ord}(x)$ 是一受囿公式，由基本定理可得：对每个序数 α，$\|\mathrm{Ord}(\hat{\alpha})\|=1$。于是有：

定理 1 对于所有的 $U\in{}^{R}\Delta^{(\mathscr{B})}$，都有

$$\|\mathrm{Ord}(U)\|=\sum_{\alpha\in O_n}\| U=\hat{\alpha}\|$$

证明 因为 $\|\mathrm{Ord}(\hat{\alpha})\|=1$，所以 $\| U=\hat{\alpha}\|=\| U=\hat{\alpha}\|\cdot\|\mathrm{Ord}(\hat{\alpha})\|\leq\|\mathrm{Ord}(U)\|$，因此

$$\sum_{\alpha\in O_n}\| U=\hat{\alpha}\|\leq\|\mathrm{Ord}(U)\| \tag{1}$$

下面证明不等式(1)的逆也成立。首先注意，当 $\eta\neq\xi$ 时，$\|\hat{\eta}=\hat{\xi}\|=0$（由基本定理的(a)）。而 $\xi\to\| x=\hat{\xi}\|$ 是从 $D^{(x)}_x=\{\xi: \| x=\hat{\xi}\|\neq 0\}$ 到 $\bigcup_{\xi<\alpha} B_\xi$ 的 1-1 映射并且 $\bigcup_{\xi<\alpha} B_\xi$ 是集合，所以 $D^{(x)}_x$ 也是集合。

令 $D^{(\alpha)}=\bigcup_{x\in\mathrm{dom}(U)} D^{(x)}_x$，则 $\exists\alpha_o\forall\alpha'\in D^{(\alpha)}(\alpha'<\alpha_o\wedge\forall x\in\mathrm{dom}(U)(\|\hat{\alpha}_0=x\|=0))$ 在 $^{R}\Delta^{(\mathscr{B})}$ 中真（反之，从 $\forall\alpha\exists x\in\mathrm{dom}(U)(\|\hat{\alpha}=x\|\neq 0)$ 可得 $D^{(x)}_x$ 不是集合，此与上面的结论矛盾！）。

再令 $D=\bigcup_{\alpha\in O_n} D^{(\alpha)}$，如果 γ 是任意的比 D 中每个元素都大的序数，那么，对任意的 $x\in\mathrm{dom}(U)$，$\|\hat{\gamma}=x\|=0$。因此 $\|\hat{\gamma}\in U\|=\sum_{x\in\mathrm{dom}(U)}(U(x)\cdot\|\hat{\gamma}=x\|)=0$。由集合论的定理 $\mathrm{Ord}(x)\wedge\mathrm{Ord}(y)\to x\in y\vee x=y\vee y\in x$ 得 $\|\mathrm{Ord}(U)\|\leq\| U\in\hat{\gamma}\|+\| U=\hat{\gamma}\|+\|\hat{\gamma}=U\|$。

又$\|\hat{\gamma}\in U\|=0$，所以$\|Ord(U)\|\le\|U\in\hat{\gamma}\|+\|U=\hat{\gamma}\|\le\sum_{\alpha\in O_n}\|U=\hat{\alpha}\|$

$|x|$表示x的基数。由$|x|=|y|$是Σ_1公式和基本定理的(c)立刻得：

$$|x|=|y|\to\||\hat{x}|=|\hat{y}|\|=1 \qquad (*)$$

（下面我们将会看到，一般情况下，此式的逆不成立）

定理 2　(a) ${}^R\Delta^{(\mathscr{B})}\models\hat{\aleph}_0=\aleph_0$。

(b) 对所有的α，${}^R\Delta^{(\mathscr{B})}\models\hat{\aleph}_\alpha\le\aleph_{\hat{\alpha}}$

证明　(a) $x=\aleph_0$是受囿公式 00

(b) 施归纳于α 证明此结论成立。当α=0 时，结论可以从(a)立刻得。现在假设α>0 并且

$${}^R\Delta^{(\mathscr{B})}\models\hat{\aleph}_\beta\le\aleph_{\hat{\beta}} \quad 对所有的\beta<\alpha \qquad (1)$$

则$\aleph_0\le\xi<\aleph_\alpha\to|\xi|=\aleph_\beta$　对某个$\beta<\alpha$

$$\to{}^R\Delta^{(\mathscr{B})}\models|\hat{\xi}|=|\hat{\aleph}_\beta| \qquad (由(*))$$

$$\to{}^R\Delta^{(\mathscr{B})}\models|\hat{\xi}|\le\aleph_{\hat{\beta}} \qquad (由(1))$$

$$\to{}^R\Delta^{(\mathscr{B})}\models|\hat{\xi}|\le\aleph_{\hat{\alpha}}$$

$$\to{}^R\Delta^{(\mathscr{B})}\models\hat{\xi}\le\aleph_{\hat{\alpha}}$$

另外，$\xi<\aleph_0\to{}^R\Delta^{(\mathscr{B})}\models\hat{\xi}<\aleph_0$

$$\to{}^R\Delta^{(\mathscr{B})}\models\hat{\xi}<\aleph_{\hat{\alpha}}$$

因此，$\xi<\aleph_\alpha\to{}^R\Delta^{(\mathscr{B})}\models\hat{\xi}<\aleph_{\hat{\alpha}}$　(2)

于是，$\|\eta<\hat{\aleph}_\alpha\|=\sum_{\xi<\aleph_\alpha}\|\eta=\hat{\xi}\|$

$$=\sum_{\xi<\aleph_\alpha}(\|\eta=\hat{\xi}\|\cdot\|\hat{\xi}<\aleph_{\hat{\alpha}}\|) \qquad (由(2))$$

$$\le\|\eta<\aleph_{\hat{\alpha}}\|$$

即${}^R\Delta^{(\mathscr{B})}\models\forall\eta(\eta<\hat{\aleph}_\alpha\to\eta<\aleph_{\hat{\alpha}})$，故${}^R\Delta^{(\mathscr{B})}\models\hat{\aleph}_\alpha\le\aleph_{\hat{\alpha}}$

Card(α)表示α 是一个基数，于是有：

定理 3　(a) 任给$\alpha\le\omega$，${}^R\Delta^{(\mathscr{B})}\models Card(\hat{\alpha})$；

(b) 如果${}^R\Delta^{(\mathscr{B})}\models Card(\hat{\alpha})$，则Card(α)。

证明　(a) 当$\alpha=\omega$时，由定理 2 的(a)可得：${}^R\Delta^{(\mathscr{B})}\models Card(\hat{\alpha})$。另一方面，$\forall\alpha(\alpha\in\omega\to Card(\alpha))$是ZF 的定理，所以${}^R\Delta^{(\mathscr{B})}\models\forall\alpha(\alpha\in\omega\to Card(\alpha))$。但是，利用定理 2 中的(a)可得：${}^R\Delta^{(\mathscr{B})}\models\hat{\omega}=\omega$。因此$\prod_{\alpha\in\omega}\|Card(\hat{\alpha})\|=1$。(a)获证。

(b) $\neg Card(\alpha)$是一个Σ_1公式，用基本定理的(c)即可得。

定义 1　$\mathscr{B}$被说是满足可数链条件(ccc)，如果$\mathscr{B}$中的每个反链都是可数的。

定理 4　$\mathscr{B}$满足 ccc，α 是序数，$x,y\in V$，则

(a) $Card(\alpha)\to{}^R\Delta^{(\mathscr{B})}\models Card(\hat{\alpha})$；

(b) ${}^R\Delta^{(\mathscr{B})}\models\hat{\aleph}_\alpha=\aleph_{\hat{\alpha}}$；

(c) $|x|=|y|\leftrightarrow{}^R\Delta^{(\mathscr{B})}\models|\hat{x}|=|\hat{y}|$。

证明　(a)令α 是一个基数，如果$\alpha\le\omega$，则${}^R\Delta^{(\mathscr{B})}\models Card(\hat{\alpha})$(由定理 3 的(a))，所以可以假设$\alpha>\omega$。现在只要证明：对所有的$f\in{}^R\Delta^{(\mathscr{B})}$和所有的有的$\beta<\alpha$，$\|Fun(f)\wedge dom(f)=\hat{\beta}\wedge ran(f)=\hat{\alpha}\|=0$成立。

反证：设存在一个$f\in{}^R\Delta^{(\mathscr{B})}$和$\beta<\alpha$，使$a=\|Fun(f)\wedge dom(f)=\hat{\beta}\wedge ran(f)=\hat{\alpha}\|\ne0$，则$0\ne a\le\prod_{\eta<\alpha}\sum_{\xi<\eta}\|f(\hat{\xi})=\hat{\eta}\|\cdot a$，于是对每个$\eta<\alpha$，存在最小的$\xi_\eta<\beta$使得$\|f(\hat{\xi}_\eta)=\hat{\eta}\|\cdot\alpha\ne0$。因为α 是一个不可数基数并且$\beta<\alpha$，所以存在$\gamma<\beta$使集合$X=\{\eta<\alpha:\ \xi_\eta=\gamma\}$是不可数的。由此可得$\{\|f(\hat{\gamma})=\hat{\eta}\|\cdot a:\eta\in X\}$是β 中的一个不可数反链，与β 是 ccc 相矛盾！因此$a=0$。

(b) 归纳法。设任给$\beta<\alpha$，${}^R\Delta^{(\mathscr{B})}\models\hat{\aleph}_\beta=\aleph_{\hat{\beta}}$，由定理 2 的(b)，只需证${}^R\Delta^{(\mathscr{B})}\models\aleph_{\hat{\alpha}}\le\hat{\aleph}_\alpha$。由(a)得${}^R\Delta^{(\mathscr{B})}\models Card(\hat{\aleph}_\alpha)$，又如果$\beta<\alpha$则${}^R\Delta^{(\mathscr{B})}\models\hat{\aleph}_\beta<\hat{\aleph}_\alpha$，并且由归纳假设${}^R\Delta^{(\mathscr{B})}\models\hat{\aleph}_\beta=\aleph_{\hat{\beta}}$，因此${}^R\Delta^{(\mathscr{B})}\models\aleph_{\hat{\beta}}<\hat{\aleph}_\alpha$，所以

$$1=\|Card(\hat{\aleph}_\alpha)\|\cdot\prod_{\beta<\alpha}\|\aleph_{\hat{\beta}}<\hat{\aleph}_\alpha\|$$

$$=\|Card(\hat{\aleph}_\alpha)\wedge\forall\beta<\alpha(\aleph_{\hat{\beta}}<\hat{\aleph}_\alpha)\|$$

$$\le\|\aleph_{\hat{\alpha}}\le\hat{\aleph}_\alpha\|$$

(c)是(b)的直接推论。

参考文献

[1] 李娜：《公理系统 GB 的广义布尔值模型》，第六届亚洲逻辑会论文集（摘要卷），1996 年 5 月。

[2] Jech Thomas: *Set Theory*, Academic Press, 1978.

[3] Bell , J. L., *BooLean-valued Models and Independence Proofs in Set Theory*, Qxford University Press, 1979.

【作者简介】李娜，女，1958 年生，河南大学政治系副教授。
邮编：475001

自然辩证法研究
Vol. 13，增刊，1997

以广义析舍为初始符号的经典命题逻辑系统

张 清 宇

命题逻辑研究复合命题的逻辑性质以及它们之间的推理关系。复合命题由命题联结词和一些不再作进一步分析的命题组成。这些不再作进一步分析的命题叫作初始命题或简单命题，它们被看作只具有真或假的区别的对象。复合命题的真假由初始命题的真值和联结词决定。命题逻辑要研究命题联结词的逻辑性质和相应的推理规律。

命题联结词决定了复合命题与作为其组成部分的命题（叫做支命题）之间的真假关系，因此也叫做真值联结词。自然语言中的联结词在意义方面往往不是完全严格确定的，有时是多义的。真值联结词是自然语言中的联结词的抽象，反映了复合命题与其支命题在真假方面的联系。真值联结词个数无穷，但相互之间不尽独立，可以取其中若干个为初始的联结词，其它真值联结词都可由它们表达出来。经常被用作初始联结词的有下列五个：$\neg$（否定），$\wedge$（合取），$\vee$（析取），$\supset$（蕴涵），以及 $\equiv$（等值）。

我们在本文中将建立以广义析舍为初始联结词的经典命题逻辑系统。全部广义析舍形成真值联结词的一个元数递增的无穷序列。因此，所建立的系统中实际上有无穷多个初始联结词，这跟通常只用有穷多个初始联结词的做法是很不一样的。我们用逗号和一对角括号统一处理了全部广义析舍，使括号发挥了联结词的作用，从而避免了因拥有无穷多个初始联结词而引起初始符号的过多增加，也为直接定义广义合取和广义析取等带来了方便。从某种意义上说，本文也可看作文[1]的一个继续。

一、命题语言

命题逻辑所用的形式语言叫作命题语言。我们选定的命题语言有下列初始符号：

(1) **命题符**：$p_0, p_1, p_2, \cdots, p_n, \cdots$； n 为非负整数。全体命题符所组成的集合，记作 P 。我们以 p, q, r 表示 P 中任意元素。

(2) **逗号**和**角括号**：，〔 〕。

符是由初始符号组成的有穷序列，也就是有穷多个初始符号依次并列而得的结果。由全体符所形成的集合，记作 E 。我们用黑正体小写字母 **u**、**v**（或加上、下标）表示任意符。任两个符 **u** 和 **v** 依次并列而得的结果仍是一个符，这个符记为 **uv** 。我们以正体大写字母 X, Y, Z 等表示任意的符集，即，由任意多个符组成的集合。

初始符号是有意义的，但由它们形成的符并不全都对我们有意义。我们只对一部分符感兴趣，这部分符形成 E 的一个子集。这个子集记作 F，它的精确定义如下。

定义 1.1 符集 F 是所有满足下列条件的符集 X 的交：

(1) $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{X}$；

(2) 如果符 $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_{n-1}$ $(n \geq 0)$都属于 X ，那么符〔$\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_{n-1}$〕也属于 X 。

注意：此定义的(2)中包括 n = 0 的情形，此时实际上是说左、右角括号并列而得到的符〔〕属于 X 。后文将可看到，符〔〕表示恒假命题。F 中的符被称为**公式**（简称**式**）。符集 E 和 F 都是可数无穷集。我们用正体大写字母 A, B, C 表示任意公式。如果一公式 A 作为另一公式 B 的一个相连续的部分出现，那么就称 A 为 B 的**子公式**（简称**子式**）。

作为公式的定义的直接结论，我们有下面的很有用的归纳原理。

定理 1.1 （公式结构上的归纳原理） 令 R 是关于符的某个性质。如果下列两条件成立，即(1)命题符都具有性质 R，(2)若公式 $A_0, A_1, \cdots, A_{n-1}$ (n

≥ 0)都具有性质 R，则公式〔$A_0, A_1, \cdots, A_{n-1}$〕也具有性质 R；那么，任何公式都具有性质 R。

证明　令 X 为具有性质 R 的符的全体。易证，X 满足定义 1.1 中的条件。因此，$F \subseteq X$。所以，任何公式都具有性质 R。证毕。

应用归纳原理来证明所有公式都具有某性质，这是归纳证明，被称为**施归纳于公式上**。在公式概念的定义下，我们还有一个表明公式重要特征的唯一分解定理；其证明从略，引用此定理时也常不加说明。

定理 1.2（唯一分解定理）　对任一个公式 A，下列条款(1)和(2)中有且只有一个成立：(1)A 是某个命题符；(2)有唯一确定的 n 个公式 $A_0,\cdots, A_{n-1}$ 使得 A 为公式〔$A_0,\cdots, A_{n-1}$〕，这里 $n \geq 0$。

由此可知，每个公式有且仅有下列两种形式之一：p 和〔$A_0,\cdots, A_{n-1}$〕。所以，要想在 F 上定义一个映射可以如下进行：

(1) 对各个命题符赋值；

(2) 假定已经对公式 $A_0,\cdots, A_{n-1}$ 赋值，然后对公式〔$A_0,\cdots, A_{n-1}$〕赋值。

这种定义方式被称为**公式上的归纳定义**。例如，我们可以定义 F 上的映射 Sub 如下。

定义 1.2　映射 Sub 定义如下：

(1) $\mathrm{Sub}(p)=\{p\}$；

(2) Sub(〔$A_0,\cdots, A_{n-1}$〕)

$$=\{〔A_0,\cdots, A_{n-1}〕\}\cup\bigcup_{i=0}^{n-1}\mathrm{Sub}(A_i)。$$

映射 Sub 为每一个公式 A 指定一个公式集 Sub(A)，其中的元素被称为 **A 的子公式**。A 的不同于 A 的子公式，被称为 **A 的真子公式**。

二、命题语义

初始符号本身并无任何意义，只表示其自身。公式本身也无意义可言，只是一串符号。只有在给这些符号以一定的解释后，公式才有意义。所谓命题语义也就是命题逻辑中所使用符号的含义的解释。命题逻辑中公式的涵义总是相对于某一给定的命题语义的。

定义 2.1　一个**真值赋值**，就是对每个公式 A 指定一个真值σ(A)的映射σ，即，从 F 到{0, 1}的一个映射，它满足下述条件：

$$\sigma(〔A_0,\cdots,A_{n-1}〕)=0 \quad \text{iff} \quad \forall i<n\,(\sigma(A_i)=1)。$$

这里“iff”表示“当且仅当”，“∀”表示“对一切”。

由此定义可知

$$\sigma(〔A_0,\cdots,A_{n-1}〕)=1 \quad \text{iff} \quad \exists i<n\,(\sigma(A_i)=0)。$$

这里“∃”表示“对某个”。从而当 $n=0$ 时有

$$\sigma(〔〕)=1 \quad \text{iff} \quad \exists i<0(\sigma(A_i)=0)。$$

所以，σ(〔〕)=0；这也就是说，公式〔〕在任一真值赋值σ下的值都为 0。

“σ(A)=1”可读作“σ使 A 为真”。我们称从 P 到{0, 1}的映射为真值指派，即，为命题符指定真值。每一个真值赋值确定一个真值指派；另一方面，每一个真值指派也唯一确定一个真值赋值。因此，我们只须确定一个真值指派，也就确定了一个真值赋值。

根据真值赋值的定义，常见的一些真值联结词可以在我们的系统中定义如下：

$f:=〔〕$　“假”

$t:=〔〔〕〕$　“真”

$\neg A:=〔A〕$　“非”

$A\wedge B:=〔〔A, B〕〕$　“合取”

$A\vee B:=〔〔A〕,〔B〕〕$　“析取”

$A\supset B:=〔A,〔B〕〕$　“实质蕴涵”

$A-B:=〔〔A,〔B〕〕〕$　“减”

$A\downarrow B:=〔〔〔A〕,〔B〕〕〕$　“合舍”

$A\uparrow B:=〔A, B〕$　“析舍”

$A\equiv B:=〔〔A,B〕,〔〔A〕,〔B〕〕〕$　“等值”

$A\not\equiv B:=〔〔A,〔B〕〕,〔〔A〕,B〕〕$　“不等值”

$\bigwedge_{i=0}^{n-1}A_i:=〔〔A_0,\cdots,A_{n-1}〕〕$　“广义合取”

$\bigvee_{i=0}^{n-1}A_i:=〔〔A_0〕,\cdots,〔A_{n-1}〕〕$　“广义析取”

$\langle A_0,\cdots,A_{n-1}\rangle:=\bigvee_{i=0}^{n-1}〔〔〔A_0〕,\cdots,〔A_{i-1}〕,A_i,〔A_{i+1}〕,\cdots,〔A_{n-1}〕〕〕$　“广义不相容析取”

广义合取 $\bigwedge_{i=0}^{n-1}A_i$ 也可以记为 $\wedge\{A_0,\cdots, A_{n-1}\}$

或者 $A_0 \wedge \cdots \wedge A_{n-1}$，广义析取 $\bigvee_{i=0}^{n-1} A_i$ 也可以记为 $\vee\{A_0, \cdots, A_{n-1}\}$ 或者 $A_0 \vee \cdots \vee A_{n-1}$。

从上述显然可见，$A \equiv B$ 与〔〈A, B〉〕等值，$A \not\equiv B$ 与〈A, B〉等值。另外，有一个很有意思的现象出现：我们有

$\bigwedge_{i=0}^{n-1} A_i$ = 〔〔〔A_0〕,…,〔A_{n-1}〕〕〕 = 〔$\bigvee_{i=0}^{n-1} A_i$〕

即，否定的合取也就是析取的否定。这也就是说，公式〔〔〔A_0〕,…,〔A_{n-1}〕〕〕既可记成 $\bigwedge_{i=0}^{n-1}$〔A_i〕，又可记成〔$\bigvee_{i=0}^{n-1} A_i$〕，德摩根律之一成了同一个公式的两个不同记法，无须证明自然成立。

定义 2.2 称一公式 A 为**可满足的**，仅当有一真值赋值使它为真。称一公式Γ为**可满足的**，仅当有一真值赋值使Γ中任一公式为真。称一公式 A 为一公式集Γ的**重言后承**，仅当使Γ中任一公式都为真的真值赋值也一定使 A 为真。称一公式 A 为**重言式**，仅当任一真值赋值使它为真。当 A 为重言式时，记成 $\models A$。当 A 为Γ的重言后承时，记成 $\Gamma \models A$。

给定一个公式，我们可以能行地决定它是否为一重言式，之所以能如此做是由于以下几点。首先，在任一真值赋值下，任一公式的真值取决于出现在其中的命题符的真值。其次，当我们为有穷多个命题符指定真值后，我们可以把这个有穷指派扩充成一个真值指派（例如，为其它命题符都指定真值 0）。有了这两点，我们就有第三点：一公式不是重言式，当且仅当，我们能为出现在其中的命题符指定某些真值而整个公式在此指派下取值为 0。由于出现在任一公式中的命题符只能是有穷多个，为它们指定真值的可能也只能是有穷多种，因此我们可以能行地决定一公式是否为重言式。列出全部这样的可能并求出公式的真值的过程可以用真值表的方法表述出来。有关真值表方法的详细描述可以参看任何一本现代逻辑教科书，此处从略。不过，要提请注意的是，当所含命题符个数相当大时，真值表方法也并不是一个很实用的方法。

真值表方法也可用来决定两个公式是否（语义）等值：A（语义）等值 B 当且仅当 $A \equiv B$ 是重言式。

三、基本定理

本节将建立命题逻辑的一个基本定理。为此，我们必须先引进一些定义和引理。

定义 3.1 令 **C** 是由一些公式集组成的类。称 **C** 为一个协调类，仅当 **C** 中各公式集Γ符合下列条件：

(1) Γ不同时包含一个命题 p 及其否定〔p〕；

(2) 如果〔$A_0, \cdots, A_{n-1}$〕$\in \Gamma$，那么 $\exists i < n$ ($\Gamma \cup$ {〔A_i〕}$\in$**C**)；

(3) 如果〔〔$A_0, \cdots, A_{n-1}$〕〕$\in \Gamma$，那么 $\Gamma \cup \{A_0, \cdots, A_{n-1}\} \in$ **C**。

当 $n = 0$ 时，此定义中的(2)实际是说，公式〔〕不属于Γ。因此，协调类中的任一公式集都不含有公式〔〕。

令 **C** 是由一些集合组成的类。如果对任一个Γ有，$\Gamma \in$ **C** 当且仅当Γ的各个有穷子集都在 **C** 中，则称 **C** 为具有有穷性征的。关于这样的类，我们有选择公理的一个等价形式—— Tukey 引理。

Tukey 引理　具有有穷性征的非空类含有极大元。

引理 3.1 任一个协调类 **C** 都可扩张成具有有穷性征的协调类。

证明 首先作一个类 **C′**：

$$\mathbf{C}' = \{\Gamma : \Gamma \text{ 是 } \mathbf{C} \text{ 中某公式集的子集}\}。$$

易证，**C′** 是包含 **C** 的一个协调类。这个类对于子集是封闭的；即，若 $\Gamma_1 \in \mathbf{C}'$ 且 $\Gamma_2 \subseteq \Gamma_1$ 则 $\Gamma_2 \subseteq \mathbf{C}'$。然后，再作一个类 **C″**：

$$\mathbf{C}'' = \{\Gamma : \Gamma \text{ 的有穷子集都在 } \mathbf{C}' \text{ 中}\}。$$

同样易证，**C″** 是包含 **C′**（从而包含 **C**）的一个协调类。此外不难验证，**C″** 具有有穷性征。**C″** 即为所求。证毕。

引理 3.2 令 **C** 是一个具有有穷性征的协调类。那么 **C** 的任一个元素都可扩张成它的一个极大元。

证明 设 $\Gamma \in$ **C**。作一个类 **D**：

$$\mathbf{D} = \{\Delta : \Gamma \cup \Delta \in \mathbf{C}\}。$$

可以验证，**D** 是具有有穷性征的非空类。由 Tukey 引理可知，**D** 有一个极大元 Δ_0。由于 $\Delta_0 \in \mathbf{D}$，故而 $\Gamma \cup \Delta_0 \in \mathbf{C}$。$\Gamma \cup \Delta_0$ 就是所要求的 **C** 的极大元。

基本定理 令 **C** 是一个协调类。如果 $\Gamma \in$ **C**，那么Γ是可满足的。

证明 设$\Gamma\in\mathbf{C}$。据引理 3.1，$\mathbf{C}$ 可以扩张成一个具有有穷性征的协调类 $\mathbf{C}'$，显然$\Gamma\in\mathbf{C}'$。从而由引理 3.2 可知，$\mathbf{C}'$ 有一个极大元$\Delta\supseteq\Gamma$。利用Δ，我们可以作出这样一个真值指派：当命题符 p 属于Δ时，它为 p 指定真值 1。这个真值指派确定了唯一的一个真值赋值σ。σ 具有下述性质：

(1) $A\in\Delta\Rightarrow\sigma(A)=1$；

(2) 〔 A 〕$\in\Delta\Rightarrow\sigma(A)=0$。

这里，“$\Rightarrow$”表示“如果…那么…”，下同。这性质的证明可以如下进行。

当 A 为某个命题符 p 时，显然成立。

当 A 为某个形如〔 $A_0,\cdots,A_{n-1}$ 〕的公式时，则有

(1) 〔 $A_0,\cdots,A_{n-1}$ 〕$\in\Delta$

$\Rightarrow\exists i<n\,(\Delta\cup\{$〔 Ai 〕$\}\in\mathbf{C}')$ （定义 3.1(2)）

$\Rightarrow\exists i<n\,($〔 Ai 〕$\in\Delta)$ （Δ-极大）

$\Rightarrow\exists i<n\,(\sigma(Ai)=0)$ （归纳假设）

$\Rightarrow\sigma($〔 $A_0,\cdots,A_{n-1}$ 〕$)=1$ （定义 2.1 ）

(2) 〔〔 $A_0,\cdots,A_{n-1}$ 〕〕$\in\Delta$

$\Rightarrow\Delta\cup\{A_0,\cdots,A_{n-1}\}\in\mathbf{C}'$ （定义 3.1(3)）

$\Rightarrow\forall i<n\,(A_i\in\Delta)$ （Δ-极大）

$\Rightarrow\forall i<n\,(\sigma(A_i)=1)$ （归纳假设）

$\Rightarrow\sigma($〔 $A_0,\cdots,A_{n-1}$ 〕$)=0$ （定义 2.1 ）

因此，σ 满足Δ。由于 $\Gamma\subseteq\Delta$，故而σ 满足Γ，即，Γ 是可满足的。证毕。

利用这一基本定理，我们可以从语义方面直接证明经典命题逻辑的紧致性定理和 Craig 插入定理，并得到经典命题逻辑的可判定性，详细结论请参看文献[4]和[5]。

四、重言式的形式证明方法

在这最后一节中，我们将粗略地列举命题逻辑中重言式的一些形式证明方法，包括自然推理系统、公理系统、后承演算和语义表列系统。

自然推理系统由下述推理规则组成：

(1) Hyp （假设引入规则）：可按需要随时引入一个假设，以此来开始一个子证明。

(2) Rep （重复规则）：同一子证明中的公式可以在该子证明中重复出现。

(3) Reit （重述规则）：子证明中的公式可以在从属于此子证明的子证明中重复出现。

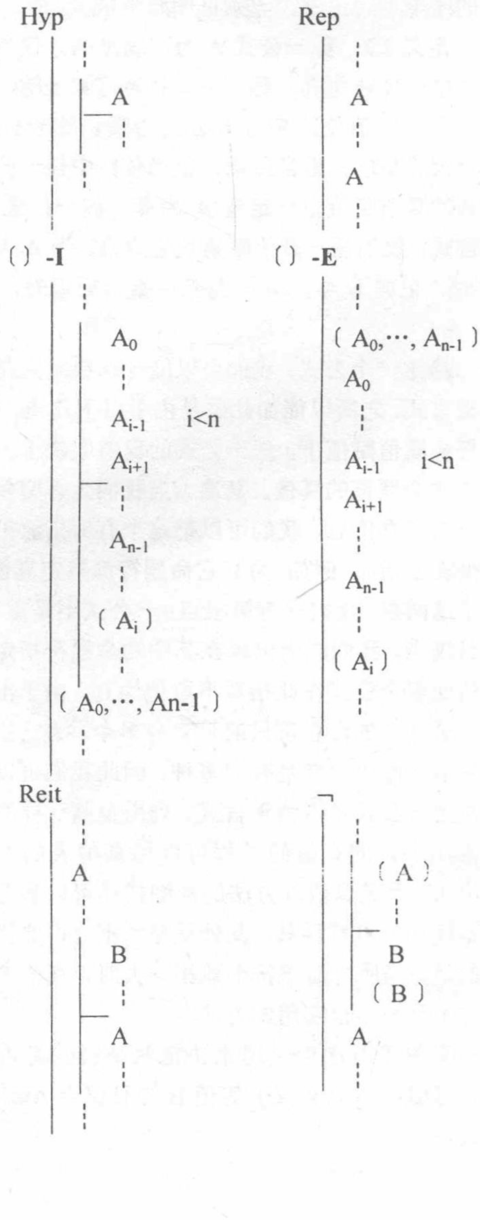
(4) 〔〕-I （括号引入规则）：从由 $A_0,\cdots,A_{i-1},A_{i+1},\cdots,A_{n-1}$ 导出〔 A_i 〕的子证明，可推出公式〔 $A_0,\cdots,A_{n-1}$ 〕；$i<n$。

(5) 〔〕-E （括号消去规则）：从〔 $A_0,\cdots,A_{n-1}$ 〕，$A_0,\cdots,A_{i-1},A_{i+1},\cdots,A_{n-1}$ 可推出〔 A_i 〕；这里 $i<n$。

(6) ¬ （否定规则）：从由〔 A 〕导出〔 B 〕和 B 的子证明，可推出 A。

(7) t （t 规则）：随时都可推出〔〔〕〕。

这些规则可图示如下：



t

⋮

〔〔〕〕

⋮

公理系统由下列公理模式和推证规则组成：

公理模式

(1) $A \supset (B \supset A)$ 即 $\text{〔}A, \text{〔}\text{〔}B, \text{〔}A\text{〕}\text{〕}\text{〕}\text{〕}$；

(2) $(A \supset B) \supset ((C \supset A) \supset (C \supset B))$；

(3) $(A \supset \text{〔}A_0,\cdots,A_{n-1}\text{〕}) \supset ((A \supset A_0) \supset (\cdots((A \supset A_{i-1}) \supset ((A \supset A_{i+1}) \supset \cdots ((A \supset A_{n-1}) \supset (A \supset \text{〔}A_i\text{〕}))\cdots)$，$i<n$；

(4) $(A_0 \supset (\cdots (A_{i-1} \supset (A_{i+1} \supset \cdots (A_{n-i} \supset \text{〔}A_i\text{〕})\cdots) \supset \text{〔}A_0,\cdots,A_{n-1}\text{〕}$，$i<n$；

(5) $(\text{〔}A\text{〕} \supset B) \supset ((\text{〔}A\text{〕} \supset \text{〔}B\text{〕}) \supset A)$；

(6) 〔〔〕〕；

推证规则

MP　从 A 和 $A \supset B$ 可推出 B。

后承演算由下述公理和规则组成：

公理

$\Gamma, p \to \Delta, p$；

$\Gamma, p, \text{〔}p\text{〕} \to \Delta$；

$\Gamma \to \Delta, p, \text{〔}p\text{〕}$；

$\to \text{〔〔〕〕}$。

规则

〔〕 **L**

$$\frac{\Gamma, \text{〔}A_0\text{〕} \to \Delta;\ \cdots;\ \Gamma, \text{〔}A_{n-1}\text{〕} \to \Delta}{\Gamma, \text{〔}A_0,\cdots,A_{n-1}\text{〕} \to \Delta}$$

〔〕 **R**

$$\frac{\Gamma \to \Delta, \text{〔}A_0\text{〕},\cdots,\text{〔}A_{n-1}\text{〕}}{\Gamma \to \Delta, \text{〔}A_0,\cdots,A_{n-1}\text{〕}}$$

〔〔〕〕 **L**

$$\frac{\Gamma, A_0,\cdots,A_{n-1} \to \Delta}{\Gamma, \text{〔〔}A_0,\cdots,A_{n-1}\text{〕〕} \to \Delta}$$

〔〔〕〕 **R**

$$\frac{\Gamma \to \Delta, A_0;\ \cdots;\ \Gamma \to \Delta, A_{n-1}}{\Gamma \to \Delta, \text{〔〔}A_0,\cdots,A_{n-1}\text{〕〕}}$$

这里，Γ和Δ都只表示有穷的公式集。

最后，语义表列系统由下列两条分枝扩张规则组成：

$\text{〔〔}A_0,\cdots,A_{n-1}\text{〕〕}$

|

A_0

⋮

A_{n-1}

$\text{〔}A_0, A_1,\cdots,A_{n-1}\text{〕}$

$\text{〔}A_0\text{〕}$　$\text{〔}A_1\text{〕}$　……　$\text{〔}A_{n-1}\text{〕}$

这些系统的具体论述都从略，读者可以参照文献[6]而作。

参考文献

[1] 张清宇：不用联结词的经典命题逻辑系统，《哲学研究》1995 年第 5 期。

[2] 张清宇：不用联结词和量词的一阶逻辑系统，《哲学研究》1996 年第 5 期。

[3] 张清宇、郭世铭、李小五：《哲学逻辑研究》，社会科学文献出版社 1997 年。

[4] Smullyan, R: First -order Logic, 1968.

[5] Fitting, M.: Proof Method for Modal and Intuitionstic Logics, 1983.

[6] Fitting, M.: First-order Logic and Automated Theorem Proving, 1990.

【作者简介】张清宇，男，1944 年生，
中国社科院哲学所研究员。
邮编：100732

自然辩证法研究
Vol. 13，增刊，1997

命名空间与范畴空间的数学模型*

周　北　海

一、名的运算

名的运算指的是名字和名表达式之间的运算。通过这些运算，由一些简单或相对简单的名形成了复杂的名。名和名表达式的语言形式即词或词组。从语言学的语法学上看，名的运算应该是构成词组的语法规则。不同的自然语言有不同的构成词组的语法规则，从而形成了不同的词组类型。以汉语为例。根据汉语的语法修辞学，汉语词组有五种基本的类型：主谓结构，述宾结构，偏正结构，联合结构和述补结构。根据逻辑语法（如一阶语言的语法），其中的主谓结构，述宾结构和述补结构的词组或者可以化归为语句，如主谓结构的词组，“太阳/出来”，或者可以看作不完整的或不确定的句子表达式，例如述宾结构词组“洗/衣服”，和述补结构词组“洗/干净”。前者可以看成“(什么)洗衣服”，用一阶语言表达应为“x洗y并且y是衣服”即“洗$xy \wedge$衣服y”，是一个带没有明确其属性的自由变元x的句子函项。后者可以看成“(什么1)洗(什么2)并且(什么2)在此之后干净了”，要复杂一些，不是简单的一阶语言可以表达的，但是也是一个带自由变元的句子函项。为不失一般性，这里抽去汉语的特殊性，相应于这五种结构的词组，只选择相应于偏正结构和联合结构的语法规则作为名的运算，分别称为限制运算和联合运算。再考虑到逻辑中常见的负概念或负词项，在此还引入相应的运算，称为负名运算。限制运算，联合运算和负名运算以下分别用符号表示为•, ∘, –，称为“限制”，“联合”以及“非”。

相应于这些名的运算，我们引入两种等词＝和≡。＝的直观意思是名或名表达式通过语法或其他语言学方面的意义，如语词定义、词组的缩写等，形成的等同。例如，

第一宇宙速度＝每秒7.9公里的•速度

四化＝四个现代化＝农业现代化∘工业现代化∘国防现代化∘科学技术现代化

≡直观意思是由名字的某些语义方面的意义形成的等同，如通过真实定义得到的等同。如真实定义“人是有理性的动物”可以表示成

人≡有理性的•动物

二．命名空间与范畴空间

命名空间与范畴空间总是相对于某个自然语言来说的。设L是任一自然语言，令A_L是L中所有初始名的集合，$M(A_L)$是满足以下条件的最小集合：

(1) 若$a \in A_L$，则$a \in M(A_L)$；

(2) 若$a, b \in M(A_L)$，则$a \bullet b, a \circ b, -a \in M(A_L)$；

(3) 若$a \in M(A_L)$，且$b = a$，则$b \in M(A_L)$；

(4) $\bigcirc \in M(A_L)$。

$M(A_L)$的直观意思是L中的所有名表达式形成的集合，不仅初始名在其中，对于•, ∘, –封闭，而且由语词定义引入的新名也在其中（条件(3)）。○表示空符号串，是为了运算的方便而引入的一个特定的元素。

设L是任一自然语言（以下简称语言），以下用K_L表示满足下列条件的$M(A_L)$的任意子集：

(1) 若$a \in A_L$，则$a \in K_L$；

(2) $\bigcirc \in K_L$。

定义2.1　设L是任一语言，L的命名空间是一个五元组$<K_L, \bullet, \circ, -, =>$，满足以下条件：对任意的$a, b, b_1, \cdots, b_n \in K_L$，

(1) $a \circ \bigcirc = \bigcirc \circ a = a$

(2) $\bigcirc \bullet a = a$

* 本文是《自然语言的命名空间与范畴空间》（待发表）的姊妹篇，有关的背景和直观说明请参见该文。

定义2.2 设L是任一语言，L的范畴空间是一个五元组$<K_L, \bullet, \circ, -, \equiv>$，满足以下条件：对任意的$a, b, b_1, \cdots, b_n \in K_L$，

(1) $b_1 \bullet (b_2 \bullet \cdots \bullet (b_n \bullet a) \cdots) \equiv (b_1 \circ \cdots \circ b_n) \bullet a$

(2) $(b_1 \circ \cdots \circ b_n) \bullet a \equiv (b_1 \bullet a) \circ \cdots \circ (b_n \bullet a)$

(3) $-a \circ a \equiv \bigcirc$

(4) 任给$a, b \in M(A_L)$，若$a = b$则$a \equiv b$。

其中(4)表示了两种等词之间的关系。$=$要强于$\equiv$，凡是有关系$=$的名也都有关系$\equiv$。(3)是这里的约定。(1)和(2)表示了运算$\bullet$和$\circ$之间的一些关系，在自然语言中应该说这些关系是普遍存在的。例如，对于名“大红苹果”来说，如果我们将其理解成“大的且红的苹果”，即“(大的$\circ$红的)$\bullet$苹果”，那么有

(大的$\circ$红的)$\bullet$苹果$\equiv$大的$\bullet$(红的$\bullet$苹果)

$\equiv$(大的$\bullet$苹果)$\circ$(红的$\bullet$苹果)

在我们平时的语言中或许没有“(大的$\bullet$苹果)$\circ$(红的$\bullet$苹果)”这样的名，但是作为名的运算$\bullet$和$\circ$来说，在自然语言中(3)和(4)原则上是应该成立的。(对“大红苹果”的另一种理解是某种红颜色的苹果，可以表示为：“大红的$\bullet$苹果”，甚至“(大$\bullet$红的)$\bullet$苹果”。)

定义2.3 L是一语言，$\mathfrak{N} = <K_L, \bullet, \circ, -, =>$是L的命名空间，$\mathfrak{C} = <K_L, \bullet, \circ, -, \equiv>$是L的范畴空间，如果对于任意的$a, b \in K_L$，若$a = b$则 $a \equiv b$，则称$\mathfrak{C}$是$\mathfrak{N}$(在L上)的相随范畴空间。

对任一语言，由定义2.1得到的命名空间显然是存在的。但是由定义2.2定义的范畴空间的存在性并不显然，我们将在后面讨论这一问题。

定义2.4 L是任一语言，对任意的$a, b \in K_L$，$a \leqslant b$，当且仅当，存在$c \in K_L$，使得$a \equiv c \bullet b$。

显然，对于任意的语言L，$\leqslant$是K_L上的偏序。

(如果考虑到实际情况，不是对所有的名都能给出严格的定义，比如我们常说，a是一种b，或a是某种b，还可以放宽对$\leqslant$的定义，规定对任意的L，K_L都含有一个特定的元素λ，表示“一种”或“某种”。只要有$a \equiv \lambda \bullet b$，也可以得到$a \leqslant b$。)

三、基、空间的关系和范畴

定义3.1 L是任一语言，$<K_L, \bullet, \circ, -, =>$和$<K_L, \bullet, \circ, -, \equiv>$是L的命名空间和范畴空间，$a = f(a_1, \cdots, a_m)$，$b = g(b_1, \cdots, b_n)$，A是$K_L$的任意子集，f和g分别是由$\bullet$，$\circ$和$-$有穷次复合而成的m和n元函数，

(1) a和b命名相关，当且仅当，存在$a_i = b$或$b_j = a$，$1 \leq i \leq m$，$1 \leq j \leq n$；

(2) a和b范畴相关，当且仅当，存在$c \in K_L$，使得$a \equiv c \bullet b$或$b \equiv c \bullet a$；

(3) 如果存在$a, b \in A$，a和b命名相关，则A是命名相关的，否则，称A是命名无关的；

(4) 如果存在$a, b \in A$，a和b范畴相关，则A是范畴相关的，否则，称A是范畴无关的。

定义3.2 L是一语言，$\mathfrak{N} = <K_L, \bullet, \circ, -, =>$和$\mathfrak{C} = <K_L, \bullet, \circ, -, \equiv>$是L的任意命名空间和范畴空间，B是$K_L$的任意子集，

(1) 如果对任意的$a \in K_L$，存在$a_1, \cdots, a_n \in B$，$f(a_1, \cdots, a_n) \in K_L$，使得$a = f(a_1, \cdots, a_n)$，则B是$\mathfrak{N}$的基，B中的元素称为$\mathfrak{N}$的基元；

(2) 如果B是$\mathfrak{N}$的基，并且B是命名无关的，则B是$\mathfrak{N}$的一个规范基，B中的元素称为$\mathfrak{N}$的规范基元；

(3) 如果对任意的$a \in K_L$，存在$b \in K_L$，$c \in B$，使得$a \equiv b \bullet c$，则B是$\mathfrak{C}$的基，B中的元素称为$\mathfrak{C}$的基元；

(4) 如果B是$\mathfrak{C}$的基，并且B是范畴无关的，则B是$\mathfrak{C}$的一个规范基，B中的元素称为$\mathfrak{C}$的规范基元。

定义3.3 设L和L'是任意的自然语言，$\mathfrak{N} = <N(L), \bullet, \circ, -, =>$，$\mathfrak{N}' = <N(L'), \bullet, \circ, -, =>$，$\mathfrak{C} = <N(L), \bullet, \circ, -, \equiv>$和$\mathfrak{C}' = <N(L'), \bullet, \circ, -, \equiv>$分别是L和L'的命名空间和范畴空间，

(1) 如果存在从N(L)到N(L')的同态映射φ，满足$\varphi(\bigcirc) = \bigcirc$，则$\mathfrak{N}$是$\mathfrak{N}'$的嵌入子空间。特别地，如果$\varphi$是等同映射，即对任意的$a \in N(L)$，$\varphi(a) = a$，则$\mathfrak{N}$是$\mathfrak{N}'$的子空间。

(2) 如果$\mathfrak{N}$是$\mathfrak{N}'$的嵌入子空间，并且对任意的$a \in N(L)$，存在$b, c \in N(L')$，$\varphi(a) \equiv b \bullet c$，则$\mathfrak{C}$是$\mathfrak{C}'$的嵌入下属空间，$\mathfrak{C}'$是$\mathfrak{C}$的嵌入上属空间。特别地，如果$\mathfrak{N}$是$\mathfrak{N}'$的子空间，则$\mathfrak{C}$是$\mathfrak{C}'$的下属空间，$\mathfrak{C}'$是$\mathfrak{C}$的上属空间。

(3) 设$\leqslant$和$\leqslant'$分别是范畴空间$\mathfrak{C}$和$\mathfrak{C}'$上由定义2.4得到的偏序。如果$\mathfrak{N}$是$\mathfrak{N}'$的嵌入子空间，并且对任意的$a, b \in K_L$，$a \leqslant b$当且仅当$\varphi(a) \leqslant' \varphi(b)$，则$\mathfrak{C}$是$\mathfrak{C}'$的嵌入子空间。特别地，如果$\mathfrak{N}$是$\mathfrak{N}'$的子空间，则$\mathfrak{C}$是$\mathfrak{C}'$的子空间。

定义3.4 设$\mathscr{C}$是任一范畴空间的类，$\mathfrak{C} \in \mathscr{C}$，如果在$\mathscr{C}$中除$\mathfrak{C}$自身外不存在其他$\mathfrak{C}$嵌入上属空间，则

$\mathfrak{C}$是一个$\mathscr{C}$-顶空间。如果$\mathfrak{C}$是任意范畴空间类的顶空间，则$\mathfrak{C}$称为顶空间。

据该定义，$\mathscr{C}$-顶空间和顶空间有可能不唯一。在实际中，顶空间的范畴都是哲学范畴，而不同的哲学可能有不同的范畴，所以从不同的哲学体系出发有不同的范畴空间。每一个这样的范畴空间实际上是其相应的哲学对于整个对象世界的一个解释，是该哲学对于整个对象世界提出的一个模型。由于哲学范畴都是最大的范畴，并且所有的哲学都是试图由自己的范畴出发去解释所有的东西，总是试图将其他范畴空间作为自己的子空间或嵌入子空间，所以，对于一个成功或较成功的哲学来说，不论它用的是哪一种自然语言，一般来说不再有其他范畴空间作为自己范畴空间的上属范畴空间。因此，不同哲学的范畴空间就是一些不同的顶空间。另外，如果考虑到宗教，甚至某些神秘主义，在它们的语言中，也有各自有所不同的范畴空间。与哲学有一点相同，它们也是对整个世界给出解释，所以这些范畴空间也是一些顶空间。

定义3.5 L是一语言，$\mathfrak{N}=\langle N(L), \bullet, \circ, -, \equiv\rangle$是L的任意范畴空间，B是$K_L$的任意子集，

(1)如果$a\in B$，并且对任意的$b\in B$，$a\not\leq b$，则称a是B-范畴；

(2)如果a是B-范畴，且$B=K_L$，则称a是$\mathfrak{C}$-范畴；

(3)如果a是$\mathfrak{C}$-范畴，且$\mathfrak{C}$是顶空间，则a是范畴。

该定义中的B-范畴和$\mathfrak{C}$-范畴都是相对与某一特定领域来说的范畴，是相对范畴，由(3)得到的范畴是绝对范畴。

由以上定义，不难看出，对任意范畴空间$\mathfrak{C}$来说，$\mathfrak{C}$的规范基中的元素都是$\mathfrak{C}$-范畴，反之亦然。证明从略。

四、范畴空间的存在性和组织度

定义4.1 设L是任一自然语言，对任意的a, $b_1,\cdots,b_n\in K_L$，如果$b_1\bullet(b_2\bullet\cdots\bullet(b_n\bullet a)\cdots)\in K_L$当且仅当$(b_1\circ\cdots\circ b_n)\bullet a\in K_L$，$(b_1\circ\cdots\circ b_n)\bullet a\in K_L$当且仅当$(b_1\bullet a)\circ\cdots\circ(b_n\bullet a)\in K_L$，则$\langle K_L, \bullet, \circ, -, =\rangle$是完善命名空间。

定义4.2 L是任一语言，$\mathfrak{C}=\langle K_L, \bullet, \circ, -, =\rangle$和$\mathfrak{C}'=\langle K_L', \bullet', \circ', -', =\rangle$是L的两个命名空间，如果$K_L\subseteq K_L'$，且$\mathfrak{C}$和$\mathfrak{C}'$的基相同，则$\mathfrak{C}'$是$\mathfrak{C}$的基保持扩张。

据定义2.3，与任一命名空间$\mathfrak{N}$相随的范畴空间的条件分为两部分：(1)～(3)和(4)，其中(4)是自然满足的。所以，相对于完善命名空间，只需把其中的$=$换成$\equiv$，就是一个与之相随的范畴空间，即对于完善的命名空间，范畴空间的存在性显然。对不完善命名空间，总可以得到一个基保持的扩张，使得该扩张是一个完善命名空间，称为完善扩张。相对于这个完善扩张，总存在与之相随的范畴空间。

完善命名空间即$\bullet$和$\circ$这两种运算的具有一定的性质的空间，显然这不是对所有的自然语言都成立的。前面说到原则上这两条都应该成立，在这一意义下，我们可以忽略不完善的命名空间，只讨论完善的命名空间。

但是这样一来，尽管范畴空间的存在性问题解决了，每个命名空间都至少存在一个有着相同基的相随范畴空间，但是新问题随之而来：因此而得到的范畴空间没有什么意义，只不过是可以叫做“范畴空间”的命名空间而已，并不是真正意义上的范畴空间。因为这样的范畴空间与命名空间的区别只是$\equiv$和$=$的形式记法不同而已，它们有相同的基。而实际上，范畴空间的重要意义之一就在于它的基小于相应的命名空间，以较少的出发点对全体的名进行安排整理。为此，下面提出范畴空间的组织度的概念。

设A是任意集合，以下用$\|A\|$表示A的基数。

定义4.3 L是任一语言，$\mathfrak{N}=\langle K_L, \bullet, \circ, -, =\rangle$是L的命名空间，$\mathfrak{C}=\langle K_L, \bullet, \circ, -, \equiv\rangle$是$\mathfrak{N}$的相随范畴空间，$B(\mathfrak{N})$是命名空间$\mathfrak{N}$的极小规范基，$B(\mathfrak{C})$是范畴空间$\mathfrak{C}$的极小规范基，$\mathfrak{C}_T$是一顶空间，$\mathfrak{C}_T$是$\mathfrak{C}_T$的子空间中$\mathfrak{C}$的最小的嵌入上属空间，$B(\mathfrak{C}_T)$为$\mathfrak{C}_T$的最小规范基，范畴空间$\mathfrak{C}$（在$\mathfrak{C}_T$下的）的相对组织度为$d(\mathfrak{C})$：

$$d(\mathfrak{C})=\begin{cases}1-\dfrac{\|B(\mathfrak{C})\|-\|B(\mathfrak{C}_T)\|}{\|B(\mathfrak{N})\|} & \|B(\mathfrak{C})\|<\|B(\mathfrak{N})\| \\ 0 & \|B(\mathfrak{C})\|=\|B(\mathfrak{N})\|\end{cases}$$

令$B(\mathfrak{C}_T)$是$\mathfrak{C}_T$的极小规范基，范畴空间$\mathfrak{C}$(在$\mathfrak{C}_T$下的)的绝对组织度为$D(\mathfrak{C})$：

$$D(\mathfrak{C})=\begin{cases}1-\dfrac{\|B(\mathfrak{C})\|-\|B(\mathfrak{C}_T)\cap K_L\|}{\|B(\mathfrak{N})\|} & \|B(\mathfrak{C})\|<\|B(\mathfrak{N})\| \\ 0 & \|B(\mathfrak{C})\|=\|B(\mathfrak{N})\|\end{cases}$$

范畴空间总要在一定的命名空间上才得以建立，所以范畴空间的基元不会多于它所相随的命名空间的基元，因此$\|B(\mathfrak{C})\|$总小于等于$\|B(\mathfrak{N})\|$，即

$\|B(\mathfrak{C})\| \le \|B(\mathfrak{N})\|$。而当$\|B(\mathfrak{C})\| = \|B(\mathfrak{N})\|$时，组织度(相对组织度和绝对组织度)为0,得到的就是那些没有意义的范畴空间。一般来说，$\|B(\mathfrak{C})\|$要小于$\|B(\mathfrak{N})\|$，所以范畴空间的相对组织度和绝对组织度总是0到1之间的某个数，包括1。

该定义实际上是认为顶空间有最完善的组织，即最高的组织度，以此为标准来衡量其他范畴空间的组织程度。给定某顶空间，相对组织度是以该顶空间的某个局部的组织程度来衡量得到的结果，绝对组织度则是以该顶空间的最小规范基元在被测空间中的出现以及由这些基元形成的该顶空间的子空间的组织度为标准来衡量得到的结果。前面已说明，顶空间的最小规范基元实际上都是哲学上的范畴。对任何一个语言使用主体来说，它的范畴空间$\mathfrak{C}$的最小规范基的基元数$\|B(\mathfrak{C})\|$都只能是大于或等于在其自身中出现的哲学范畴的数目，即$\|B(\mathfrak{C})\| \ge \|B(\mathfrak{C}_T) \cap K_L\|$。如果$\mathfrak{C}$不是顶空间，则$\|B(\mathfrak{C})\| > \|B(\mathfrak{C}_T) \cap K_L\|$。只有当$\mathfrak{C}$是顶空间，并且以该顶空间自身为标准，才有$\|B(\mathfrak{C})\| = \|B(\mathfrak{C}_T)\| = \|B(\mathfrak{C}_T) \cap K_L\|$。所以任何范畴空间的相对组织度都可能为1，但只有顶空间绝对组织度才会为1。

前面说到顶空间可能不唯一，从不同的哲学出发可以有不同的顶空间。用在这里，根据不同的顶空间，对一给定的范畴空间测定的组织度的数值有可能不同，这是从一个方面表明了不同的哲学对语言或对象世界的组织结构有不同的看法，从而对其他范畴空间的组织度有不同的评定。

下面举例说明范畴空间组织度的具体测定。一个语言的命名空间和范畴空间以下也称为该使用主体的命名空间和范畴空间。设某儿童的语言为L，$\mathfrak{N} = \langle K_L, \bullet, \circ, -, \Longrightarrow \rangle$ 是他的命名空间，$\mathfrak{N}$的某个相随范畴空间$\mathfrak{C} = \langle K_L, \bullet, \circ, -, \equiv \rangle$是他的范畴空间，$B(\mathfrak{N})$是命名空间$\mathfrak{N}$的极小规范基，$\|B(\mathfrak{N})\| = 30$(大致可以看成他的语言共有30个初始名)，$B(\mathfrak{C})$ = {爸爸，妈妈，天，太阳，小朋友，大灰狼，小白兔，小动物，人}，是范畴空间$\mathfrak{C}$的极小规范基。设$\mathfrak{C}_T$是一顶空间（为说明方便，设$\mathfrak{C}_T$是一个汉语的范畴空间），$\mathfrak{C}_T$是$\mathfrak{C}_T$的子空间中$\mathfrak{C}$的最小上属空间。于是，$\mathfrak{C}_T$的极小规范基元，即根据通常的理解，应是：$B(\mathfrak{C}_T)$ = {天，太阳，大灰狼，小动物，人}。因此有，$\|B(\mathfrak{C})\| = 9$，$h(\mathfrak{C}_T) = 6$，所以

$$d(\mathfrak{C}) = 1 - \frac{9-6}{30} = 0.9$$

即该儿童的相对范畴空间组织度为0.9，或说有着90%的相对组织度。因为$B(\mathfrak{C})$中没有哲学范畴，即$\|B(\mathfrak{C}_T) \cap K_L\| = 0$，所以他的范畴空间的绝对组织度为

$$d(\mathfrak{C}) = 1 - \frac{9}{30} = 0.7$$

即他的范畴空间有着70%的绝对组织度。

【作者简介】周北海，男，1955年生，北京大学哲学系副教授，博士。邮编：100871

逻辑学硕士点简介

华东师范大学哲学系逻辑学硕士点于1982年由国务院学位委员会批准设立，十余年来共培养了逻辑专业硕士研究生24人，毕业的研究生中已有多名晋升为教授或副教授。本硕士点现共有正、副教授4人，其中彭漪涟教授为中国逻辑学会副会长、上海市逻辑学会会长，冯棉教授为中国逻辑学会理事、上海市逻辑学会副会长，马钦荣副教授为中国逻辑学会辩证逻辑专业委员会副主任、上海市逻辑学会理事，还有一名副教授为邵春林。本专业的研究方向是：(1) 形式逻辑与辩证逻辑，(2) 现代逻辑，(3) 逻辑哲学。开设的硕士学位课程有：逻辑思维的辩证法，数理逻辑，模态逻辑，西方逻辑史暨原著选读，中国逻辑史暨原著选读，逻辑哲学，直觉主义逻辑与自然推理，形式逻辑专题研究，辩证逻辑专题研究，语言逻辑专题研究。近年来先后承担了国家自考委、国家教委和上海市的科研项目多项，出版专著、译著及教材20余部，发表论文80余篇。