流速测量技术

南京航空学院翻印

1983.1.

第一章　基本知识

也
运动状

第一章　基本知识

《流速测量技术》是一本系统介绍测量流体（水和空气）运动速度的仪器和方法的书。因此，不论从测量目的或测量对象来说，还是从测量原理或测量方法来说，都必须要对流体力学的基本物理概念有一个清晰的了解。

另外，只要进行测量，就会有数字结果。由于各种必然和偶然因素的影响，测出的数字一定会表现出不同程度的随机性，也就是说，一定会有误差。因此，为了能从大量的测量数字中去伪存真提炼出符合实际的规律，就必须对测量误差作出恰当的估计，就必须对随机变量及其统计特性有一定的了解。

本章将扼要地介绍与这两方面有关的一些基本知识。

§1.1 流体静力学的一些基本概念

流体静力学是研究流体在外力作用下处于静止（绝对或相对）状态时的力学特性的。这些特性在工程实践中有着广泛的用途，在本书第二章中介绍的微压计就是流体静力学基本原理的一种应用。

一、流体质点和流体的密度

流体质点

任何物质都是由大量的分子所组成的。这些分子一直在进行着无休止的不规则的运动。流体当然也是这样，但是由于流体力学所研究的只是流体的宏观运动规律以及它们与固体之间的相互作用。也就是说研究的是大量分子运动的统计平均特性，这时个别分子的运动状况对经过统计平均后的宏观值影响极小，因此不需要去考虑

流体的分子运动的情况。

在流体力学的研究中，一般总是将流体看成是由许多微团组成的，这些微团连续地充满了流体所在的整个空间，而每一个流体微团又是由大量的分子所组成。这些微团一方面微观上充分大，大到可以包含大量的分子，足以进行统计平均，另一方面在宏观上又充分小，小到与所研究的问题的特征长度相比，完全可以忽略的程度，就是说在宏观上可以把这些微团看成是几何点。通常就把这样的流体微团称作为流体质点，把流体看成是由无数这样的流体质点所组成的连续介质。

流体的密度

在流体内部的任意一处，考虑一个足够小的体积ΔV，并以Δm表示在这个体积中所包含的流体的质量，我们就称比值$\dfrac{\Delta m}{\Delta V}$为$\Delta V$中流体的平均密度。若体积$\Delta V$缩小到零，并设质量$\Delta m$与体积$\Delta V$大小同阶，则极限值

$$\rho=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta V}=\frac{dm}{dV} \qquad (1-1)$$

就称为在该点的流体密度。

在一般情况下必须认为流体的密度应是空间位置x，y，z及时间t的函数，即

$$\rho=\rho(x,y,z,t)$$

对于均质流体，ρ则与空间位置x，y，z无关，对于静止流体或作定常运动的流体，ρ则与时间t无关。

二、流体的压力

流体中的压力是流体力学中的一个最重要的基本概念之一。要准确地掌握这一概念必须先弄清流体质点所受的力及其性质。

在流体中任取一个以S面为界的体积τ，作用于此体积上的力可以分成两类，体积力和面积力。体积力又称质量力。

质量力或体积力是作用于τ内各个流体质点上的力。对于τ内的任意一点M，如果围绕M点取一微元体积$\Delta\tau$，设$\Delta\tau$所包含的流体的质量为Δm，所受到的质量力为$\Delta\vec{F}$，则M点上单位质量的流体质点所受到的质量力就定义为：

$$\vec{F}=\lim_{\Delta m\to 0}\frac{\Delta\vec{F}}{\Delta m}=\frac{1}{\rho}\lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{\Delta\vec{F}}{\Delta\tau}$$

$$=\frac{d\vec{F}}{dm}=\frac{d\vec{F}}{\rho d\tau}$$

显然，$\vec{F}$应是空间位置和时间的函数，即

$$\vec{F}=\vec{F}(x,\ y,\ z,\ t)$$

不难看出，质量力是和体积成正比的，若$\vec{F}$的大小有限，则作用在$d\tau$上的质量力是三阶无穷小量。

与表面S接触的流体或固体作用于S上的力称为面力。对于S面上的任意一点M，同样可作一个包住M的微元面积ΔS，并设ΔS的法线方向为$\vec{n}$，$\vec{n}$指向作用于ΔS的流体或固体的那一面，若作用于ΔS上的面力为$\Delta\vec{P}$，则过M点上以$\vec{n}$为法线方向的单位面积上所受到的面积力就定义为：

$$\vec{P}_n=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta\vec{P}}{\Delta S}\qquad(1-2)$$

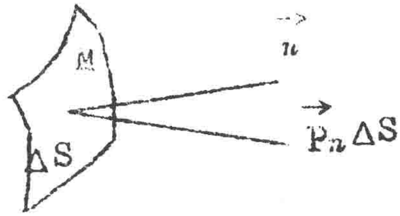


图1－1

$\vec{P}_n$ 又称为面力在S面上的分布密度或称为应力。同样，面力是和面积成正比的，若 $\vec{P}_n$ 的大小有限，则作用在 ds 面上的面力是二阶无穷小量。

这里须要注意的有两点。一是在一般情况下，应力不垂直于它所作用的面。二是因为过同一个点M可以作无数个方向不同的微元面积ΔS，所以作用于流体中任一点M上的面力可以有无穷多个值，而作用于该点上的体积力则只有一个值。由此可见，流体中某点的“应力”代表通过该点的所有可能截面上的全部应力矢量。

可以证明，只要知道过某点的三个相互垂直的平面上的应力，则过该点的任一以 $\vec{n}$ 为法线方向的平面上的应力就可以被决定。严格来说，实际上只要知道过该点的能组成一个立体角的三个平面上的应力，就可以决定过该点的任一以 $\vec{n}$ 为法线方向的平面上的应力。

现在简单证明如下：设过M点的可以构成一个立体角的任意三个平面上的应力已知，那么，如果用以 $\vec{n}$ 为法线方向的第四个平面去截这个立体角，就组成了一个四面体。为运算简便起见，我们将构成立体角的三个平面用坐标平面来代替。见图1．2。显然，对这个四面体来说，它从三个坐标面上所受到的力可由已知的应力矢量 P_{-x} ， P_{-y} ， P_{-z} 分别乘以相应的三角形的面积来得到。这时只有一个力能与上述三个力相平衡，若把这个力除以以 $\vec{n}$ 为法线方向的三角形面积就得到所求的应力 P_n 。由于 $\vec{n}$ 可任给，所以

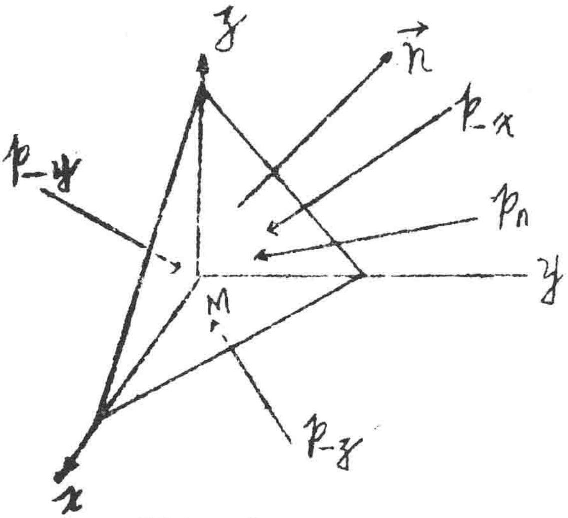


图1 －2

上述命题是正确的。

这一结论意味着流体中一点的应力状态，需要用三个矢量或九个分量才能表示。换句话说就是需要用一个二阶张量来表示。这个张量一般称为“应力张量”，它是空间点的单值函数。其数学表示为：

$$
P = \begin{pmatrix} P_{xx} & P_{xy} & P_{xz} \\ P_{yx} & P_{yy} & P_{yz} \\ P_{zx} & P_{zy} & P_{zz} \end{pmatrix} \qquad (1-3)
$$

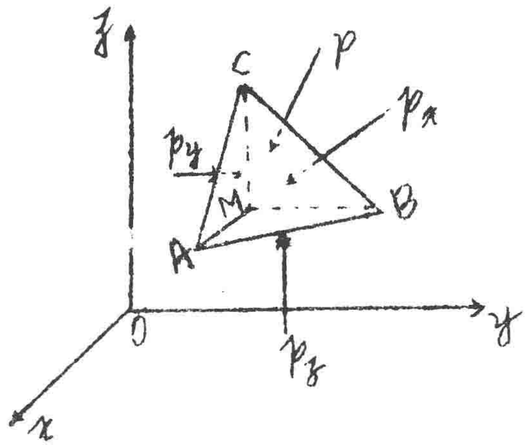
还可以进一步证明，应力张量具有对称性。即有：

$$
\begin{cases} P_{xy} = P_{yx} \\ P_{yz} = P_{zy} \\ P_{zx} = P_{xz} \end{cases} \qquad (1-4)
$$

在弄清了流体中一点的应力的含义以后，就可以比较容易地建立起流体中一点的压力的概念。通常认为"压力"也是一种面积力，是到处与它所作用的面相垂直的一种应力。

压力的一个最基本的性质是：流体中任意一点上的压力的大小与计算这个压力的微元面积的方向无关。这可以很容易地进行证明。

在流体取出一个微元体积，它是一个由三条平行于坐标轴的棱所组成的四面体MABC。以$\Delta\tau$表示它的体积，ΔS_x、ΔS_y、ΔS_z、ΔS分别表示它的各个侧面积，且以$\vec{P}_{xx}$、$\vec{P}_{yy}$、$\vec{P}_{zz}$、$\vec{P}$分别表示作用在相应侧面上并以单位面积来计算的压力。若设作用在$\Delta\tau$中的流体上的质量力为$\vec{F}$，惯性力为$-\vec{W}$，那么，依据达朗贝尔原理，这些力之间应满足关系式：



$$\vec{F}\rho\Delta\tau-\vec{W}\rho\Delta\tau+\vec{P}_{xx}\Delta S_x+\vec{P}_{yy}\Delta S_y+\vec{P}_{zz}\Delta S_z+\vec{P}\Delta S=0$$

由于有 $\Delta\tau=\frac{1}{3}h\Delta S$

其中h是四面体以ΔS为底时的高，故将此式在三个坐标轴方向投影便可得：

$$\frac{1}{3}(F_x-W_x)\rho h\Delta S+P_{xx}\Delta S_x+P\cos\alpha\Delta S=0$$

$$\frac{1}{3}(F_y-W_y)\rho h\Delta S+P_{yy}\Delta S_y+P\cos\beta\Delta S=0$$

$$\frac{1}{3}(F_z-W_z)\rho h\Delta S+P_{zz}\Delta S_z+P\cos\gamma\Delta S=0$$

式中$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$是面积ΔS的法线的方向余弦，又因为有：

$$\Delta S_x=\Delta S\cos\alpha$$

$$\Delta S_y=\Delta S\cos\beta$$

$$\Delta S_z=\Delta S\cos\gamma$$

则上式还可以进一步写为：

$$\frac{1}{3}(F_x-W_x)\rho h+P_{xx}\cos\alpha+P\cos\alpha=0$$

$$\frac{1}{3}(F_y-W_y)\rho h+P_{yy}\cos\beta+P\cos\beta=0$$

$$\frac{1}{3}(F_z-W_z)\rho h+P_{zz}\cos\gamma+P\cos\gamma=0$$

现在让四面体收缩到M点，体积减小到零，于是四面体的高h也就趋向于零。因此，将上式取$h\to 0$的极限即可得：

$$-P_{xx}=P,\quad -P_{yy}=P,\quad -P_{zz}=P$$

亦即：
$$-P=P_{xx}=P_{yy}=P_{zz} \qquad (1-5)$$

这就证明了在流体中任一指定点上，其压力的大小与计算该压力的面积的方向无关。也就是说流体中的压力是各向同性的。

前面我们在普遍意义下建立了流体中任意一个流体质点上的应力状态的概念，并进而引出了流体的压力的概念。下面我们来考察一下，在静止流体中流体质点的应力状态。

流体之所以为流体，就在于它有易流性，它与固体或松散体之间的基本差别就在于固体或松散体之间存在着静摩擦力，而流体则

没有。也就是说，在流体中不存在一个与相邻质点之间的相对速度无关的固定不变的静摩擦力。所以要使固体或松散体从静止状态开始运动，必须首先克服存在于它们之间的静摩擦力，而要流体从静止状态开始运动则无须如此。

流体的这一基本特性就意味着静止流体不能承受切向力。就是说对于静止流体中的任一流体质点，不存在切应力。因此静止流体中的应力张量则为：

$$P=\begin{pmatrix} P_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & P_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & P_{zz} \end{pmatrix}$$

如果注意到前面证明过的结论：

$$-P=P_{xx}=P_{yy}=P_{zz}$$

就可以看到静止流体中的应力张量为：

$$P=-P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=-PI \quad (1-6)$$

其中 I 为单位张量。

由此可见，静止流体的应力状态特别简单，只需压力 P 一个数值就完全决定了。

三、流体静力学的基本规律，阿基米德原理

流体静力学的基本问题是确定均匀重液体如水内的压力分布的问题。

现在，我们先来考察在静止流体中同一水平面上各点的压力之间的关系。在静止流体中取一棱柱，见图1.4，其轴为水平，其端面垂直于轴，面积为ΔS，两端的压力分别为P_1和P_2。由于此棱柱的重量与其轴垂直，故重力在轴向没有分力；由于此棱柱是静止的，故它在轴向所受到的合外力应为零，则有：

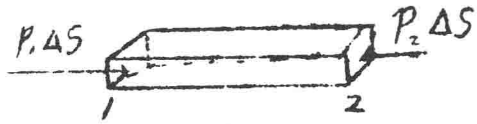


图1．4

$$P_1\Delta S=P_2\Delta S$$

即 $$P_1=P_2 \qquad (1-7)$$

由于此轴的长度可以任意，从而可知：在静止液体中，同一水平面上各点的压力都是相同的。

进而，我们再来考察在静止流体中不同高度上流体质点的压力之间的关系。类似于前述，在静止流体中取一轴为铅直的棱柱，见图1.5，这时，考虑沿轴向，即沿垂直方向的棱柱的外力的平衡，即得：

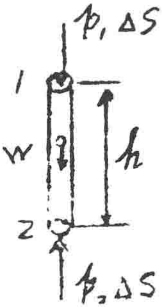


图1．5

$$P_2\Delta S=P_1\Delta S+\rho gh\Delta S$$

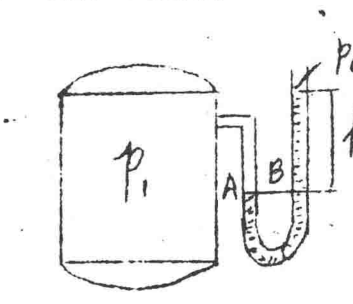
即 $$P_2=P_1+\rho gh \quad 或 \quad P_2-P_1=\rho gh \qquad (1-8)$$

这一结果说明，在静止流体中，不同高度的二点之间的压力差等于这两点之间的单位面积的液柱的重量。

上述这两点就是流体静力学的最基本的规律。从这一规律出发

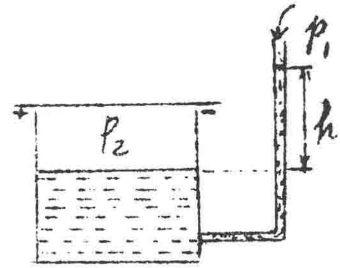
1～10.

可以得到很多重要的推论和应用。比如：液体的自由表面必定为水平面，否则不会静止。而U形管压力计或普朗特微压计和水压机等均是这一规律的应用。



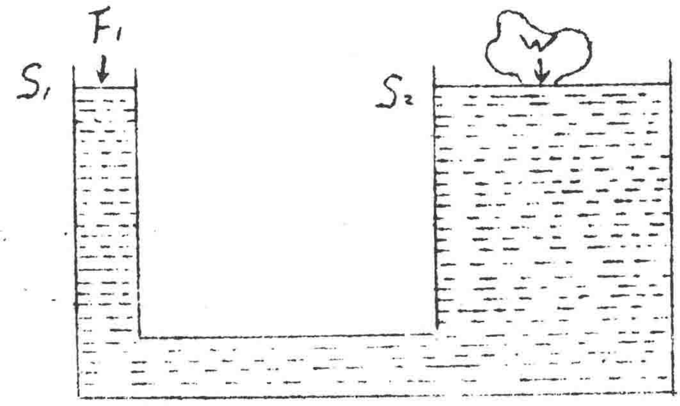
$$P_1 = P_0 + \rho g h$$

图1．6　U形管压力计



$$P_2 - P_1 = \rho g h$$

图1．7　普朗特微压计



$$W = \frac{S_2}{S_1} \cdot F_1$$

图1．8　水压机原理

上述的流体静力学的基本规律还可以用来解决沼在液体中的物体的所受的浮力问题，这就是著名的阿基米德原理。

对于潜入液体的任何物体，我们可以先设想这个物体被与周围同样的液体所代替，显然这一部分液体将与原物体的形状相同，与周围流体的密度相同，且在其表面所受的压力的作用下保持平衡。因此，这些压力的合力必定与这一部分液体的重量相同，且通过这一部分新液体的重心铅直向上，这就是说，潜在液体中的物体将受到一个大小与该物体的体积相同的液体的重量相等的浮力，这个原理称为阿基米德原理。它还可以表述为：一个潜在液体中的物体所损失掉的重量，等于它所排开的液体的重量。

§1.2　流体运动学的一些基本概念

流体，包括液体和汽体，它们的一个共同特点就是易于流动。研究流体力学当然首先要研究描述流体运动的方法。

一、拉格朗日方法和欧拉方法

拉格朗日（Lagrange）方法

拉格朗日方法是通过描述流场中每一个流体质点的空间位置与速度，加速度等运动学量在整个运动过程中随时间而变化情况，来得到流体的整体运动情况的一种方法。

在拉格朗日方法中，每个流体质点都用它们起始空间位置的坐标（a，b，c）标志之，这称为物质坐标或拉格朗日坐标。这样，流体质点的各个物理量都可以看成是拉格朗日坐标和时间t的函数。如流体质点在t时刻时的位置$\vec{r}$就可以表示为：

$$\vec{r}=\vec{r}(a, b, c, t)$$

其中$\vec{r}$是流体质点的矢径。在直角坐标系中，$\vec{r}$的三个分量为：

$$\begin{cases} x = x(a, b, c, t) \\ y = y(a, b, c, t) \\ z = z(a, b, c, t) \end{cases}$$

当给定（a，b，c）时，这就代表了某一个流体质点的运动情况；当给定t时，就代表了在t时刻全部流体质点的空间位置分布。

显然，据此即可得流体质点的速度$\vec{U}$和加速度$\vec{a}$。设$\vec{U}=(u, v, w)$，$\vec{a}=(a_x, a_y, a_z)$

则：

$$\vec{U} = \frac{\partial \vec{r}(a, b, c, t)}{\partial t}$$

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{U}(a, b, c, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \vec{r}(a, b, c, t)}{\partial t^2}$$

即：

$$\begin{cases} U = \dfrac{\partial x(a, b, c, t)}{\partial t} \\ V = \dfrac{\partial y(a, b, c, t)}{\partial t} \\ W = \dfrac{\partial z(a, b, c, t)}{\partial t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_x = \dfrac{\partial^2 x(a, b, c, t)}{\partial t^2} \\ a_y = \dfrac{\partial^2 y(a, b, c, t)}{\partial t^2} \\ a_z = \dfrac{\partial^2 z(a, b, c, t)}{\partial t^2} \end{cases}$$

由于速度和加速度都是对某一确定的流体质点而言的，也即是对确定的（a，b，c）而言的，故上面二式中只出现对时间t的偏微商。

欧拉（Euler）方法

欧拉方法是从场的观点出发，把描述流体运动的所有物理量如速度，加速度等都看成场和时间的函数，而不是着眼于某个具体流体质点在空间的位置。因此，在欧拉方法中，流体运动速度的表示式为：

$$U = U(x, y, z, t)$$
$$V = V(x, y, z, t)$$
$$W = W(x, y, z, t)$$

当给定（x，y，z）时，这代表了场中某一固定的空间位置上流体运动速度随时间的变化规律。这实际上表示了不同时刻通过同一个空间位置的流体质点的速度情况。当给定t时，这代表了在该时刻流体运动速度在空间场中的分布情况，一般称为速度场。

当场函数不依赖于空间位置时，称为均匀场，反之则称为不均匀场；当场函数不依赖于时间t时，称为定常场，反之则称为不定

常场。相应的流体运动就称为均匀流，不均匀流，定常流和不定常流。

这两种方法，各有优劣，互为补充。在流体力学的理论和实验研究中分别都起着重要的作用。

二、流线和迹线

流线是空间中这样的一条曲线：在某一固定时刻，曲线上每一点的切线方向就是位于该点的流体质点的速度方向。

在欧拉坐标中，确定流线的常微分方程为：

$$\frac{dx}{u(x,y,z,t)}=\frac{dy}{v(x,y,z,t)}=\frac{dz}{w(x,y,z,t)}$$

这里，函数中的时间 t 是参量，积分时视为常量。

流线概念是和欧拉方法相联系的，在定常流动中十分有用。若速度场已知，就可画出全流场中的流线，如果使流线的条数和流量成正比，这称之为流动图案，它形象地刻画了流动的运动学性质。

迹线是流体质点在运动时所经过的空间位置的连线。

在拉格朗日坐标中，流体质点的运动规律 $\vec{r}=\vec{r}(a,b,c,t)$ 就是一个以 t 为参数的迹线方程；在欧拉坐标中，要确定迹线，必须解出下述的常微分方程组：

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=u(x,y,z,t)\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=v(x,y,z,t)\\[2ex]\dfrac{dz}{dt}=w(x,y,z,t)\end{cases}$$

其中 t 为自变量，x，y，z 为待求的 t 的函数，积分后在所得的表