高等师范专科学校统编教材

数学分析

下　册

（物理专业用）

主编　王坚定　副主编　谭东北　陈金康

西南师范大学出版社

需要全本请访问 www.ertongbook.com

高等师范专科学校统编教材

数 学 分 析

（物理专业用）

下 册

主 编：王坚定
副主编：谭东北 陈金康

西南师范大学出版社

数学分析（下）

王坚定 主编

西南师范大学出版社出版
（重庆 北碚）
新华书店重庆发行所经销
重庆建筑工程学院印刷厂印刷
*
开本：787×1092 1/32 印张：13.75 字数：298千
1990年5月第一版 1990年7月第二次印刷
印数：1——2,300
*
ISBN 7—5621—0253—8/O·16
定价：2.71元

重庆建筑工程学院 藏书

出 版 说 明

党的十一届三中全会以来，师范专科教育有了很大的发展，但是，作为师专教学三大基本建设之一的师专教材建设，却始终没有得到很好的解决。近几年来，有的地区和学校为了改变这种状况，也零星地编写了一些师专教材，可是，不成套，有的学科甚至编写了几种，质量参差不齐。虽对师专无教材的局面有了部分改变，但终因没有一套全国统一的、高质量的教材而影响了师专的教学质量。

为了进一步发挥师专的办学效益，彻底改变师专没有适合自己特色的教材局面，国家教委师范司在1987年制订了《二年制师范专科学校八个专业教学计划》；继之又约请了全国有教学经验的专家、教授编写了这八个专业的《教学大纲》；1988年7月在长春又召开了全国二年制师专教材编写出版规划会议。会上研究制订了《1988～1990年二年制师专八个专业教材编写出版规划》。八个专业是：中文、历史、政治教育、数学、物理、化学、生物和地理。

在国家教委师范司的统一部署、各省市自治区教委、高教局的大力帮助和出版社的积极组织下，这套教材聘请了一些长期从事师专教学工作，具有丰富的教学实践经验和较高学术水平的教授或副教授担任各科主编。各科教材由学术造诣比较深、熟悉师专教学情况的专家负责主审。各位主编根据国家教委师范司拟定的《关于编写二年制师专教材的指导思想和基本原则》及各科《教学大纲》的精神，组织编者收集资料，综合研究，争取编出一套具有师专自身特色的教

材，以适应师专教育的迫切需要。

现在，在各方面的大力支持下，经过主编、主审和各位编写人员的努力和辛勤劳动，这套教材将陆续面世。我们热忱地欢迎师专的广大师生使用它，并在使用过程中，多提宝贵意见，使之不断完善，不断提高，以保持与当代科学和师专教育实践的同步发展。

1990年2月

目　录

第六章　常微分方程初步……1

§6.1　常微分方程的基本概念……1

练习6.1 ……5

§6.2　可分离变量方程与齐次方程……6

1　可分离变量方程　　2　齐次方程

3　形如$\frac{dy}{dx}=\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}$的方程

练习6.2 ……15

§6.3　一阶线性方程与伯努利方程……16

1　一阶线性方程　　2　伯努利方程

练习6.3 ……24

§6.4　可降阶的二阶方程……25

练习6.4 ……31

§6.5　二阶常系数线性齐次方程……32

1　二阶线性齐次方程的通解结构　2　二阶常系数线性齐次方程的解法

练习6.5 ……41

§6.6　二阶常系数线性非齐次方程……42

1　二阶常系数线性非齐次方程的通解结构　2　常数变易法

*3　比较系数法

练习6.6 ……60
*§6.7 常系数线性方程组……61
练习6.7 ……64
小结……64
习题六 ……66
第七章 无穷级数……69
§7.1 常数项级数的概念和性质……69
1 常数项级数的概念 2 无穷级数的性质
练习7.1 ……76
§7.2 正项级数……76
练习7.2 ……86
§7.3 任意项级数……86
1 交错级数 2 绝对收敛和条件收敛 3 绝对收敛级数的性质
练习7.3 ……94
§7.4 幂级数……94
1 函数项级数 2 幂级数的收敛半径和收敛区间
3 幂级数的运算性质
练习7.4 ……101
§7.5 函数的幂级数展开式……102
1 函数的幂级数展开式 2 幂级数展开式在近似计算上的应用 3 欧拉 (Euler) 公式
练习7.5 ……117
§7.6 傅里叶级数……117
1 傅里叶级数及其收敛定理 2 正弦级数与余弦级数，奇、偶函数的傅里叶级数 3 [0，l] 区间上的傅里叶级数
练习7.6 ……135

小结 …… 136
习题七 …… 139
第八章 多元函数及其微分法 …… 143
§8.1 多元函数的概念 二元函数的极限与连续性 … 143
1 多元函数的概念 2 邻域 3 二元函数的极限
4 二元函数的连续性
练习8.1 …… 148
§8.2 偏导数与全微分 …… 148
1 偏导数 2 二元函数偏导数的几何意义 3 高阶
偏导数 4 多元函数的全微分
练习8.2 …… 157
§8.3 复合函数和隐函数的微分法 …… 158
1 复合函数的微分法 2 隐函数的微分法
练习8.3 …… 169
§8.4 二元函数的极值 …… 171
1 二元函数的极值 2 二元函数的最大值与最小值
3 条件极值
练习8.4 …… 179
§8.5 偏导数在空间曲线和曲面中的应用 …… 180
1 空间曲线的切线与法平面 2 曲面的切平面及法线方程
练习8.5 …… 186
*§8.6 复变函数简介 …… 187
1 复变函数 2 复变函数的几何表示 3 复变函数的
极限与连续性
*练习8.6 …… 191
小结 …… 192
习题八 …… 193

第九章　重积分…… 196
§9.1　二重积分的概念及其基本性质…… 196
1　二重积分的概念　2　二重积分的基本性质
练习9.1 ……202
§9.2　用直角坐标计算二重积分…… 203
练习9.2 ……211
§9.3　用极坐标计算二重积分…… 212
练习9.3 …… 219
§9.4　三重积分的概念　用直角坐标计算三重积分… 220
1　三重积分的定义　2　用直角坐标计算三重积分
练习9.4 ……225
§9.5　用柱坐标和球坐标计算三重积分…… 226
1　用柱坐标计算三重积分　2　用球坐标计算三重积分
练习9.5 …… 234
§9.6　重积分的物理应用…… 235
1　质心　2　转动惯量
练习9.6 …… 243
小结…… 244
习题九 …… 249
第十章　曲线积分和曲面积分…… 249
§10.1　第一型曲线积分…… 249
1　第一型曲线积分的定义　2　第一型曲线积分的计算
练习10.1 ……257
§10.2　第二型曲线积分…… 258
1　第二型曲线积分的定义　2　第二型曲线积分的计算
*3　两种曲线积分之间的关系
练习10.2 …… 272

§10.3 第一型曲面积分…… 273
练习10.3 …… 278
§10.4 第二型曲面积分…… 278
1 第二型曲面积分的概念 2 第二型曲面积分的计算
练习10.4 …… 291
§10.5 格林公式 曲线积分与路线无关的条件…… 292
1 格林公式 2 平面上曲线积分与路线无关的条件
练习10.5 …… 305
§10.6 斯托克斯公式与奥高公式…… 306
练习10.6 …… 314
§10.7 全微分方程与积分因子…… 315
1 全微分方程 2 积分因子
练习10.7 …… 322
小结…… 323
习题十 …… 323
第十一章 矢量分析和场论初步…… 331
§11.1 矢量分析…… 331
1 矢性函数的微分与积分 2 导矢的几何意义 3 导矢的力学意义
练习11.1 …… 343
§11.2 数量场的方向导数和梯度…… 345
1 场的概念 2 等值面 3 方向导数 4 梯度
练习11.2 …… 354
§11.3 矢量场的场线和散度…… 355
1 场线 2 通量和散度的定义 3 散度的物理意义
练习11.3 …… 362
§11.4 矢量场的环量和旋度 …… 363

1 环量和旋度的定义 2 平面矢量场的旋度的物理意义，
3 空间矢量场的旋度的物理意义
练习11.4 …… 375
§11.5 几种重要的矢量场 …… 376
1 有势场 *2 管形场 *3 调和场
练习11.5 …… 387
小结 …… 390
习题十一 …… 395
答案 …… 397

第六章　常微分方程初步

寻找变量之间的函数关系是科学和技术问题研究中的一个重要课题。但在许多实际问题中，往往不能直接找出所需要的函数关系，有时只能根据问题所提供的条件列出含有未知的函数及其导数（或微分）的关系式，这种关系式就是所谓的微分方程。本章将介绍一阶常微分方程和二阶常系数线性方程的解法，举例说明它们在物理学中的应用。

§6.1　常微分方程的基本概念

我们先来看看下面两个简单的例子

例 1　已知一曲线在点$P(x, y)$处的切线的斜率为$2x$，且经过点$M(1, 1)$，试求出这条曲线。

解　设所求曲线的方程为$y = y(x)$，则由已知条件，得

$$y' = 2x, \tag{1}$$

两边积分，得

$$y(x) = x^2 + C. \quad (C为任意常数) \tag{2}$$

由于曲线经过点$M(1, 1)$，故将条件

$$x = 1 时 \quad y = 1 \tag{3}$$

代入（2）求得$C = 0$。所以，所求的曲线为

$$y = x^2. \tag{4}$$

例 2　物体从高空由静止开始自由下落，在不考虑空气

阻力的情况下，其下落的加速度为 g。试求物体下落的运动方程式。

解 设物体经过时间 t 下落距离 h，因为物体下落的加速度为 g，则由运动学中加速度的定义得

$$\frac{d^2h}{dt^2}=g, \tag{5}$$

积分两次可得

$$h=\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2。(C_1,C_2为任意常数) \tag{6}$$

由于物体开始下落前为静止状态，所以

$$t=0时h=0，\quad v=\frac{dh}{dt}=0。 \tag{7}$$

将条件（7）代入（6）得$C_1=0$，$C_2=0$。所以所求的运动方程式为

$$h=\frac{1}{2}gt^2。 \tag{8}$$

象（1）、（5）式那样，含有自变量、未知函数及其导数（或微分）的方程，称为**微分方程**。

下面的方程

$$y'+2y^2=\sin x, \tag{9}$$

$$y''+P(x)y'+q(x)y=f(x), \tag{10}$$

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0, \tag{11}$$

也都是微分方程。这些微分方程中的未知函数都是一元函数，这种微分方程称为**常微分方程**，简称**微分方程**。

方程中含有的导数或微分的最高阶数，称为**微分方程的阶**。方程（1）、（9）、（11）是一阶方程，方程（5）、（10）是

二阶方程。

如果方程中含有未知函数和它的各阶导数的项对于未知函数及其各阶导数的全体而言都是一次的，则方程称为**线性方程**。否则，称为**非线性方程**。方程(1)、(5)、(10)是线性方程，方程(9)不是线性方程，方程(11)不能确定是否是线性方程。

如果存在一个可微函数，将其代入微分方程后，能使方程成为恒等式，那么这个函数称为**微分方程的解**。例如(2)是方程(1)的解，(6)是方程(5)的解。在(2)和(6)中都含有任意常数，而且它们含有的任意常数的个数分别与方程的阶数相同。凡含有的任意常数的个数恰好与方程阶数相同的解，称为**微分方程的通解**。(2)、(6)分别是(1)、(5)的通解。

从例1、例2中我们已经看到(4)也是方程(1)的解，(8)是方程(5)的解。它们是方程(1)、(5)分别满足条件(3)、(7)的解，这种解不含有任意常数，称它们为微分方程的**特解**。条件(3)、(7)称为微分方程的**初始条件**。求方程满足初始条件的解，称为**求解初值问题**。例1也可以认为是求解初值问题

$$\begin{cases} y' = 2x, \\ y|_{x=1} = 1。 \end{cases}$$

一个 n 阶微分方程可表为

$$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0。 \tag{12}$$

那么，方程(12)的初始条件应该有n个，即为

$$x = x_0 时 y = y_0, y' = , y'_0, \cdots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}。 \tag{13}$$

其中，y_0，y'_0，… $y_0^{(n-1)}$ 都是常数

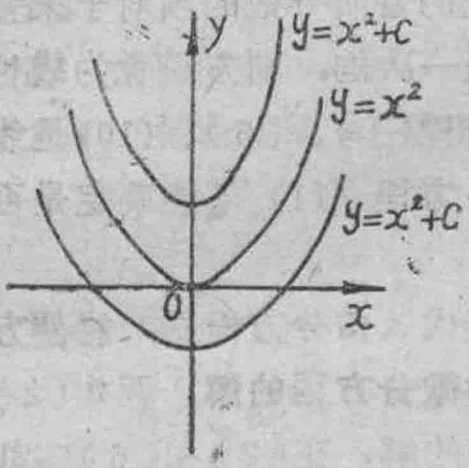

图 6-1

微分方程的特解的几何意义是一条曲线，通解的几何意义是一族曲线。因此，微分方程的特解也称为方程的**积分曲线**，通解称为方程的**积分曲线族**。方程（1）的积分曲线（4）和积分曲线族（2），如图6-1所示

例3 验证 $y=C_1e^x+C_2e^{-x}$为方程$y''-y=0$的通解(其中C_1、C_2为任意常数）。

证明

因为

$$y=C_1e^x+C_2e^{-x},$$

故

$$y'=C_1e^x-C_2e^{-x},\quad y''=C_1e^x+C_2e^{-x}.$$

将y及y″代入方程左边，得

$$C_1e^x+C_2e^{-x}-(C_1e^x+C_2e^{-x})\equiv 0\ 。$$

所以，函数$y=C_1e^x+C_2e^{-x}$是方程的解，所给方程是二阶方程，而解中含有两个任意常数，所以它是方程的通解。

例4 方程$y''+4y'+4y=0$的通解是$y=C_1e^{-2x}+C_2xe^{-2x}$。试求方程满足初始条件$y|_{x=0}=1$，$y'|_{x=0}=3$的特解。

解

$$y=C_1e^{-2x}+C_2xe^{-2x},$$

$$y'=-2C_1e^{-2x}+C_2e^{-2x}-2C_2xe^{-2x},$$

将初始条件代入y和y'，得关于C_1、C_2的方程组

$$\begin{cases} C_1 + 0 \cdot C_2 = 1 \\ -2C_1 + C_2 + 0 \cdot C_2 = 3。 \end{cases}$$

解此方程组，得 $C_1 = 1$，$C_2 = 5$。故方程满足初始条件的特解为

$$y = e^{-2x} + 5xe^{-2x},$$

即

$$y = (1 + 5x)e^{-2x}。$$

练　习　6.1

1．指出下列方程的线性或非线性、阶数、自变量和未知函数：

1）$\frac{d^2s}{dt^2} - 3t\frac{ds}{dt} + 5s = 0$，　2）$\frac{dx}{dy} + y^2 - x = 0$，

3）$\frac{d^2u}{dt^2} + \left(\frac{du}{dt}\right)^2 - u = 0$，　4）$y' = x^3 - p(x)y$。

2．验证下列各题中左边的函数是右边微分方程的通解其中C、C_1、C_2是任意常数。

1）$y = Ce^{\int P(x)dx}$，　$y' - P(x)y = 0$，

2）$y = C_1\cos x + C_2\sin x$，　$y'' + y = 0$。

3．已知方程 $y'' + y\mathrm{tg}x = \sin 2x$ 的通解是 $y = -2\cos^2 x + C\cos x$，试求方程满足初始条件 $y(0) = 1$ 的特解。

4．镭的衰变规律为：衰变速度与该时刻的现有存量成正比。现已知 $t = 0$ 时镭的存量为 R_0 克，试确定任意时刻 t 的镭的存量 $R(t)$。

§6.2 可分离变量方程与齐次方程

可分离变量的方程与齐次方程都是一阶方程中可以求解的类型。

1 可分离变量的方程

可分离变量方程的一般形式为

$$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y). \tag{1}$$

若$g(y)\neq 0$，分离变量，则方程化成

$$\frac{dy}{g(y)}=f(x)dx. \tag{2}$$

两边积分

$$\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx+C. \tag{3}$$

(3)式就是方程(1)的通解。在将(1)化为(2)时附加了条件$g(y)\neq 0$，容易验证使$g(y)=0$的y的值也是方程(1)的解，它是特解。有时这些特解就已包含在(3)中，**如果这些特解不包含在(3)中，则应另外写出。**

例1 求方程$y'=xy$的通解.

解 分离变量，得

$$\frac{dy}{y}=xdx,$$

两边积分，得

$$\ln|y|=\frac{x^2}{2}+C_1.$$

即