义务教育初级中学课本（试用）

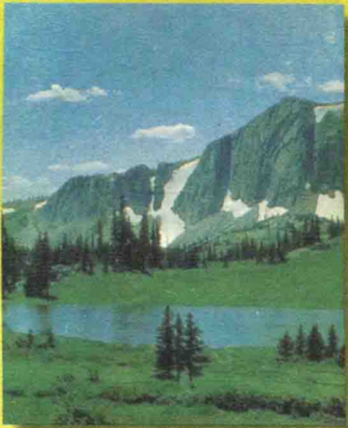
数　学

单色本

第六册 A

浙江教育出版社

ISBN 7-5338-2139-4



义务教育初级中学课本(试用)
数学
第六册 A
(单色本)
浙江教育出版社出版
浙江省出版公司重印
杭州钱江彩色印务公司印刷
浙江省新华书店发行
开本 850×1168 1/32 印张 4 字数 80 000
1999 年 11 月第 2 版 2003 年 9 月第 9 次印刷
ISBN 7-5338-2139-4/G·2135
定价:2.40 元
批准文号:浙价教材批〔2002〕2 号 举报电话:12358
如发现印、装质量问题,请与本厂联系调换。电话:0571-86624091

目　录

第五章　解直角三角形

在 30°角的终边 OB 上任意取一点 P(图 5－1),过点 P 作 $PM \perp OA$, M 为垂足.我们就会发现 PM 与 OP 的比始终等于定值 $\frac{1}{2}$,而与点 P 在终边 OB 上的位置无关.本章我们将学习直角三角形的边与边之比与它的锐角之间的函数关系,及这种函数关系的一些简单应用.

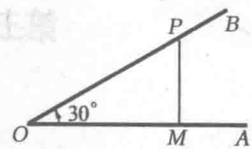


图 5－1

5.1 锐角三角函数

如图 5－2,在锐角 α 的终边 OB 上任意取两点 P 与 P',分别过点 P 与 P' 作始边 OA 的垂线 PM 与 $P'M'$, M, M' 为垂足.由 $\mathrm{Rt}\triangle OMP \backsim \mathrm{Rt}\triangle OM'P'$,得

$$\frac{PM}{OP}=\frac{P'M'}{OP'},\quad \frac{OM}{OP}=\frac{OM'}{OP'},$$

$$\frac{PM}{OM}=\frac{P'M'}{OM'},\quad \frac{OM}{PM}=\frac{OM'}{P'M'}.$$

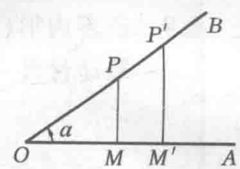


图 5－2

由此可知,对于确定的锐角 α, $\frac{PM}{OP}$, $\frac{OM}{OP}$, $\frac{PM}{OM}$, $\frac{OM}{PM}$ 这四个比值都是由角 α 的大小唯一确定的,与点 P 在角 α 的终边上的位置无关,所以这四个比值都是自变量 α 的函数.我们把

$\frac{PM}{OP}$ 叫做角 α 的**正弦**,记做 $\sin\alpha$,即 $\sin\alpha=\frac{PM}{OP}$;

$\frac{OM}{OP}$ 叫做角 α 的**余弦**,记做 $\cos\alpha$,即 $\cos\alpha=\frac{OM}{OP}$;

$\frac{PM}{OM}$叫做角 α 的**正切**,记做 $\tan\alpha$,即 $\tan\alpha=\frac{PM}{OM}$;

$\frac{OM}{PM}$叫做角 α 的**余切**,记做 $\cot\alpha$,即 $\cot\alpha=\frac{OM}{PM}$.

角 α 的正弦 $\sin\alpha$,余弦 $\cos\alpha$,正切 $\tan\alpha$,余切 $\cot\alpha$ 统称锐角 α 的**三角函数**.

注意 "$\sin\alpha$"是一个完整的符号,不要误解成 $\sin\times\alpha$,其他的三角函数符号也是这样.本章三角函数符号中的角都表示锐角.

例1 如图5-3,在 Rt△ABC 中,$\angle C=\mathrm{Rt}\angle$,$AB=5$,$AC=3$.求$\angle B$ 的四个三角函数值.

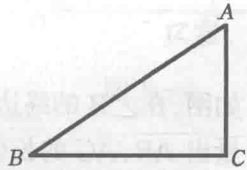


图 5-3

分析: 把点 A 看做$\angle B$ 的终边上一点,$AC\perp BC$,C 为垂足,由三角函数的定义就可以求出$\angle B$ 的四个三角函数值.

解: $\because$ $AB=5, AC=3$,

$\therefore$ $BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$.

$\therefore$ $\sin B$[1] $=\frac{AC}{AB}=\frac{3}{5}$, $\cos B=\frac{BC}{AB}=\frac{4}{5}$,

$\tan B=\frac{AC}{BC}=\frac{3}{4}$, $\cot B=\frac{BC}{AC}=\frac{4}{3}$.

从上例我们可以看到,在直角三角形中,锐角 α 的三角函数有如下的规律:

---

[1] 在三角函数式中,表示这个角的符号"$\angle$"省略不写,如角 B 的正弦写成"$\sin B$",而不写成"$\sin\angle B$".

$$\sin\alpha=\frac{\alpha\text{ 的对边}}{\text{斜边}},\qquad \cos\alpha=\frac{\alpha\text{ 的邻边}}{\text{斜边}},$$

$$\tan\alpha=\frac{\alpha\text{ 的对边}}{\alpha\text{ 的邻边}},\qquad \cot\alpha=\frac{\alpha\text{ 的邻边}}{\alpha\text{ 的对边}}.$$

例 2 已知 Rt△ABC 中,$\angle C=$Rt∠,求证:**$\cos A=\sin B$.**

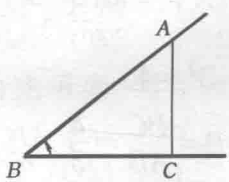
证明: $\because$ $\cos A=\frac{\angle A\text{ 的邻边}}{\text{斜边}}=\frac{AC}{AB}$,

$\sin B=\frac{\angle B\text{ 的对边}}{\text{斜边}}=\frac{AC}{AB}$,

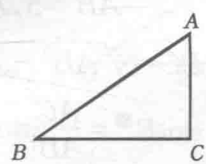
$\therefore$ $\cos A=\sin B$.

练习

1. 如图,在$\angle B$ 的终边上取一点A,作 $AC\perp BC$,点 C 为垂足.量出 AB,AC 的长(精确到 0.1 cm),求出$\angle B$ 的四个三角函数的值.



(第 1 题)



(第 2 题)

2. 如图,在 Rt△ABC 中,$\angle C=$Rt∠,$AC=2$,$BC=3$,求

(1) $\sin B$, $\sin A$; (2) $\tan A$, $\cot B$.

3. α 为锐角,求证:**$\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$.**

想一想

对于 Rt△ABC ($\angle C=$Rt∠)的两个锐角,哪些锐角三角函

数的值一定相等?

5.2 30°,45°,60°角的三角函数值

以后我们经常用到30°,45°,60°角的三角函数值,下面我们来求出它们的各个三角函数值.

1. 如图5-4,$\alpha=30^\circ$,我们在角α的终边上取一点P,作$PM\perp OM$,点M是垂足.

$\because \quad \angle POM=30^\circ$,

$\therefore \quad OP=2PM$,

$$OM=\sqrt{OP^2-PM^2}=\sqrt{4PM^2-PM^2}=\sqrt{3}PM.$$

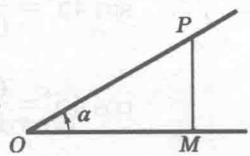


图5-4

$$\therefore \quad \sin 30^\circ=\frac{PM}{OP}=\frac{PM}{2PM}=\frac{1}{2},$$

$$\cos 30^\circ=\frac{OM}{OP}=\frac{\sqrt{3}PM}{2PM}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\tan 30^\circ=\frac{PM}{OM}=\frac{PM}{\sqrt{3}PM}=\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\cot 30^\circ=\frac{OM}{PM}=\frac{\sqrt{3}PM}{PM}=\sqrt{3}.$$

练习

利用图5-4,求出60°角的四个三角函数值.

2. 如图5-5,$\alpha=45^\circ$,同样在角α的终边上取点P,作

$PM \perp OM$，M 为垂足.

$\because \quad \alpha = 45°$，

$\therefore \quad OM = PM$，

$$
\begin{aligned}
OP &= \sqrt{OM^2 + PM^2} \\
&= \sqrt{PM^2 + PM^2} \\
&= \sqrt{2}PM.
\end{aligned}
$$

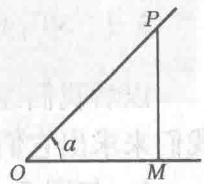


图 5－5

$$\therefore \quad \sin 45° = \frac{PM}{OP} = \frac{PM}{\sqrt{2}PM} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos 45° = \frac{OM}{OP} = \frac{PM}{\sqrt{2}PM} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\tan 45° = \frac{PM}{OM} = 1,$$

$$\cot 45° = \frac{OM}{PM} = 1.$$

为了便于记忆，把 30°，45°，60°角的各三角函数值列表如下：

三角函数值　角 三角函数	30°	45°	60°
正弦	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
余弦	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
正切	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
余切	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

例 求下列各式的值：

（1）$2\sin 30^\circ - 3\cos 60^\circ + \tan 45^\circ$；

（2）$\cos^2 45^\circ$[1] $+ \cot 30^\circ \cdot \sin 60^\circ$；

（3）$\sqrt{3}\cos 30^\circ - \sqrt{2}\sin 45^\circ + \sin 60^\circ \cdot \cos 60^\circ$.

解：（1）$2\sin 30^\circ - 3\cos 60^\circ + \tan 45^\circ$

$$= 2\times\frac{1}{2} - 3\times\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2};$$

（2）$\cos^2 45^\circ + \cot 30^\circ \cdot \sin 60^\circ$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 2;$$

（3）$\sqrt{3}\cos 30^\circ - \sqrt{2}\sin 45^\circ + \sin 60^\circ \cdot \cos 60^\circ$

$$= \sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}$$

$$= \frac{2+\sqrt{3}}{4}.$$

练习

1. （口答）$\sin 30^\circ$ 与 $\cos 60^\circ$ 的值各是多少？$\tan 45^\circ$ 与 $\cot 45^\circ$ 呢？$\sin 45^\circ$ 与 $\cos 45^\circ$ 呢？$\tan 60^\circ$ 与 $\cot 30^\circ$ 呢？
2. 求下列各式的值：

（1）$\cos 60^\circ - 3\tan 30^\circ + 2\sin 60^\circ$；

（2）$\sin^2 45^\circ - 2\sin 45^\circ\cos 60^\circ + \cos^2 60^\circ$；

（3）$\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ$；

（4）$\dfrac{2\cos 30^\circ - \cot 45^\circ}{\tan 60^\circ - \tan 45^\circ}$.

[1] $\cos^2 45^\circ$ 表示 $(\cos 45^\circ)^2$，其他三角函数的幂也这样表示.

3. 求证：$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$.

4. 在 Rt△ABC 中，已知∠C = Rt∠，$AC=2BC$. 求∠A 的各个三角函数的值.

想一想

对于锐角 α，哪些三角函数的值一定大于零而小于 1?

5.3 正弦表和余弦表

除了 30°，45°，60°的角外，其他锐角的三角函数值可以用查表法求得，我们从附录中给出的“正弦表和余弦表”“正切表和余切表”可以查出 0°到 90°间每隔 1′的各个角所对应的三角函数值(一般是含有四个有效数字的近似值).

下面我们先以例说明正弦表和余弦表的用法.

例 1 查表求 sin 37°24′的值.

从正弦表左边的直列里查到 37°，从顶端的横行里查到 24′. 从 37°所在的行和 24′所在的列相交处查出的数字是 6074，它实际表示 0.6074(这里整数部分为 0，可从左上角第一个数值 0.5736 的整数部分看出)，这就是 sin 37°24′的值.

正　　弦

A	→0′	…	24′	…	60′		1′	2′	3′
35° ↓	0.5736		↓					↓	
…									
37°	→		6074	…	…	→		5	

解： $\sin 37°24' =$ [1] 0.6074.

练习

1. 查表求下列正弦的值，然后按照从小到大的顺序，用“<”号把它们排列起来：

   $\sin 78°$，　$\sin 11°24'$，　$\sin 40°48'$，　$\sin 8°30'$.

2. 查表求下列正弦的值，然后按照从大到小的顺序，用“>”号把它们排列起来：

   $\sin 54'$，　$\sin 89°12'$，　$\sin 55°6'$，　$\sin 23°18'$.

3. 根据1,2两题的结果回答：锐角的正弦值怎样随着角的大小变化而变化.

例2　查表求 $\sin 37°26'$ 的值.

在正弦表顶端的横行里找不到 $26'$，但 $26'$ 在 $24'$ 和 $30'$ 之间而靠近 $24'$，比 $24'$ 多 $2'$. 所以先查出 $\sin 37°24' = 0.6074$，再在表右边修正值栏标有 $2'$ 的一列和 $37°$ 所在的行相交处查得 5，它实际表示 0.0005. 从正弦表中可以看出，当角度在 $0°$ 到 $90°$ 间变化时，正弦值随着角度的增大（或减小）而增大（或减小）. 所以，把0.6074加上 $2'$ 的修正值0.0005，即得 $\sin 37°26'$ 的值.

解：

$$
\begin{aligned}
\sin 37°24' &= 0.6074,\\
(+2')\quad &\quad (+0.0005)\\
\sin 37°26' &= 0.6079.
\end{aligned}
$$

---

[1] 查表得到的近似值约定仍用“＝”号表示.

例 3 查表求 $\sin 37°23'$的值.

$23'$在 $18'$和 $24'$之间而靠近 $24'$,比 $24'$少 $1'$.所以先查出 $\sin 37°24'=0.6074$,再减去 $1'$的修正值 0.0002.

解: $\sin 37°24'=0.6074,$

$(-1')\quad(-0.0002)$

$\sin 37°23'=0.6072.$

练习

查表求下列正弦的值:

(1) $\sin 48°40'$; (2) $\sin 86°19'$;

(3) $\sin 21°8'$; (4) $\sin 70°57'$.

余弦表的用法和正弦表类似,但要注意以下两点区别:

(1) 查余弦值时,"度"数在表**右边**的直列里查,"分"数在**底端**的横行里查.

(2) 查修正值时,要注意角度在 0°到 90°间变化时,余弦值随着角度的增大(或减小)而减小(或增大).

例 4 查表求下列余弦的值:$\cos 43°24'$, $\cos 43°26'$.

$\cos 43°24'$可直接从余弦表中查出.对于 $\cos 43°26'$,因为 $26'$在 $24'$和 $30'$之间而靠近 $24'$,比 $24'$多 $2'$,所以先查出 $\cos 43°24'$的值,再减去 $2'$的修正值 0.0004.

	…	7266	←	43°	→	4	
	…	↑	…	↑	…	↑	
	…	24′	←	A	1′	2′	3′

余 弦

解： $\cos 43°24' = 0.7266$,

$(+2')$ (-0.0004)

$\cos 43°26' = 0.7262$.

练习

查表求下列余弦的值：

(1) $\cos 63°$；　(2) $\cos 27°12'$；　(3) $\cos 85°36'$；

(4) $\cos 3°12'$；　(5) $\cos 21°44'$；　(6) $\cos 54°23'$；

(7) $\cos 12°31'$；　(8) $\cos 38°39'$.

反过来，当已知一个锐角的正弦值或余弦值时，可用"正弦表和余弦表"查出这个锐角.

例 5 已知 $\sin\alpha = 0.2974$，求锐角 α.

从正弦表中找到 0.2974，由这个数所在的行向**左**查得 17°，由这个数所在的列向**上**查得 18′，即

$0.2974 = \sin 17°18'$.

解： 锐角 $\alpha = 17°18'$.

例 6 已知 $\cos\alpha = 0.7857$，求锐角 α.

在余弦表中找不到 0.7857，但能找到同它最接近的数 0.7859，由这个数所在的行向**右**查得 38°，由这个数所在的列向**下**查得 12′，即 $0.7859 = \cos 38°12'$. 已知的余弦值比 0.7859小 0.0002，这说明所求的锐角比查得的角要大. 由 0.7859所在的行向右查得修正值为 0.0002 时对应的角度是 1′，所以

$$0.7859 = \cos 38°12',$$
$$(-0.0002) \quad (+1')$$
$$0.7857 = \cos 38°13'.$$

解： 锐角 $\alpha = 38°13'$.

例 7 已知 $\sin\beta = 0.4511$，求锐角 β.

从正弦表中找出与 0.4511 最接近的数 $0.4509 = \sin 26°48'$.已知的正弦值 0.4511 比 0.4509 大 0.0002，由 0.4509所在的行向右查修正值只有 0.0003 最接近，所对应的角度是 $1'$，所以

$$0.4509 = \sin 26°48',$$
$$(+0.0003) \quad (+1')$$
$$0.4512 = \sin 26°49'.$$

这就是说，从表中只能查得与 0.4511 最接近的数 $0.4512 = \sin 26°49'$，我们就取锐角 $\beta = 26°49'$.

解： 锐角 $\beta = 26°49'$.

练习

1. 查表求下列三角函数值：

(1) $\sin 10°$，$\sin 14°36'$，$\sin 62°30'$，$\sin 2°8'$，$\sin 57°33'$；

(2) $\cos 70°$，$\cos 50°18'$，$\cos 52°20'$，$\cos 75°46'$，$\cos 80°27'$.

2. 已知下列三角函数值，求锐角 α 或 β：

(1) $\sin\alpha = 0.7083$；　(2) $\sin\beta = 0.9371$；

(3) $\sin\alpha = 0.3526$；　(4) $\cos\alpha = 0.8290$；

(5) $\cos\alpha = 0.7611$；　(6) $\cos\beta = 0.2996$；

(7) $\cos\beta = 0.9931$.

想一想

查正弦表与查余弦表在处理修正值的方法上有什么不同？

5.4 正切表和余切表

正切表的用法与正弦表类似，余切表的用法与余弦表类似.

例 1 查表求下列三角函数值：

（1）$\tan 53°49'$；　　（2）$\cot 14°32'$.

解：（1）$\tan 53°48' = 1.3663$，

$(+1')$　　$(+0.0008)$

$\tan 53°49' = 1.3671$；

（2）$\cot 14°30' = 3.867$，

$(+2')$　　(-0.009)

$\cot 14°32' = 3.858$.

例 2 已知下列三角函数值，求锐角 α.

（1）$\tan\alpha = 1.4036$；　　（2）$\cot\alpha = 0.8637$.

解：（1）　$1.4019 = \tan 54°30'$，

$(+0.0017)$　$(+2')$

$1.4036 = \tan 54°32'$，

$\therefore$　锐角 $\alpha = 54°32'$；

（2）　$0.8632 = \cot 49°12'$，

$(+0.0005)$　　$(-1')$

$0.8637 = \cot 49°11'$，

$\therefore$　锐角 $\alpha = 49°11'$.

例 3　计算：$\tan 10^\circ - \sin 20^\circ + \cos 60^\circ$（精确到 0.01）.

解：　查表，得　$\tan 10^\circ = 0.1763, \sin 20^\circ = 0.3420$，

$\therefore\ \tan 10^\circ - \sin 20^\circ + \cos 60^\circ$

$= 0.1763 - 0.3420 + 0.5$

$= 0.3343 \approx 0.33$.

例 4　如图5-6，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C = \text{Rt}\angle$. 已知 $BC = 2, AC = 1$，求$\angle B$ 的度数.

解：　由已知，得

$$\tan B = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{2} = 0.5.$$

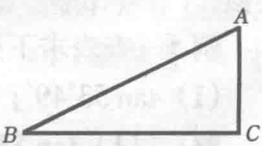


图 5-6

查表，得

$$\angle B = 26^\circ 34'.$$

练习

1. 查表求下列三角函数值：

（1）$\tan 13^\circ 12'$，$\tan 40^\circ 55'$，$\tan 54^\circ 28'$，$\tan 74^\circ 3'$，$\tan 89^\circ 43'$；

（2）$\cot 72^\circ 18'$，$\cot 56^\circ 56'$，$\cot 32^\circ 23'$，$\cot 15'$，$\cot 15^\circ 15'$.

2. 已知下列三角函数值，求锐角 α 或β：

（1）$\tan \beta = 0.9131$，　$\tan \alpha = 0.3314$，

$\tan \alpha = 2.220$，　$\tan \beta = 31.80$；

（2）$\cot \alpha = 1.6003$，　$\cot \beta = 3.590$，

$\cot \beta = 0.0781$，　$\cot \alpha = 180.9$.

3. 求证：$\tan \alpha = \dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

4. 计算：$\cos^2 35^\circ + 2\cos 45^\circ + \sin^2 45^\circ - \dfrac{\sin 70^\circ}{\cos 70^\circ}$（精确到 0.01）.