数学

电子科技大学出版社

CONTENTS

目录

第 1 章 建模基础

在中职课堂开展数学建模教学，不仅为培养同学们利用数学方法分析、解决实际问题的能力开辟了一条有效的途径，也能使大家体会到数学是如何源于生活并应用于生活的.“教学生感兴趣的数学，让学生学到有用的数学”是本章编写的最基本出发点.

本章从一些简单的实例出发，通过认识建模与建模流程两节内容，让学生初步理解实际问题是如何转化成数学问题的.同时，还提供了解决应用问题的一般思路和方法.

1.1 认识建模

问题探究

如图 1－1－1 所示，设某一物体在平面上运动，当它由上半平面的点 A 处运动到下半平面的点 B 处时，问：此物体应沿什么路径运动，才能使所需的时间最短？

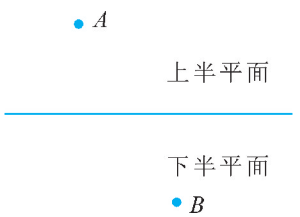

图 1－1－1

知识建构

分析：一般情况下，此物体以同一速度，沿最短路径运动，就能使所需的时间最短.

假设：(1)把此物体视为质点；

(2)假设此质点在上、下两个半平面都是以同一恒定速度 v 运动.

如图 1－1－2 所示，此质点在上半平面、下半平面都是沿直线运动.设运动路径与上、下半平面交界处的交点为 P，所需的时间为 t.

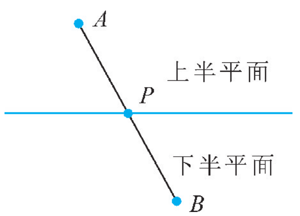

图 1－1－2

建立模型：$t=\dfrac{AP}{v}+\dfrac{PB}{v}$.

模型求解：当速度 v 恒定时，要使得 t 最小，显然，就是要使得 $AP+BP$ 最小，即当 AP，BP 在同一条直线上时成立（由于两点之间，线段最短）.因此，APB 就是所需的时间最少的路径.

新知识：像这里讨论的由数字、字母或其他数学符号组成的，描述现实对象数量规律的数学公式、图形或算法称为数学模型.而用数学的语言（图、表、式等）和方法解决实际问题的全过程则称为数学建模，简称建模.

例题讲解

例　某位同学非常想知道自己平常所用书本的一张纸的厚度，而他现在只有一把精确到毫米的直尺，你能帮他达成心愿吗？

解　分析：这位同学想知道书本一张纸的厚度，但一张纸太薄，无法用直尺直接测量出，可考虑先测量整本书的厚度.

假设：(1)这本书每一张纸的厚度一样，设共有 M 张纸；

(2)测得整本书的厚度为 L(mm)；

(3)一张纸的厚度为 T(mm).

建立模型：$T=\dfrac{L}{M}$.

模型求解：将实际测得的数据直接代入模型即可求解.

生活中的这一简单问题，通过建立一个简单的数学模型，顺利得到了解决.但我们还需思考，这个模型是否已经完全符合实际情况，还有改进的空间吗？

改进模型，一般从假设入手，看假设是否合理，是否真正符合实际情况，其次看数据获取是否正确有效？一般情况下，封面的纸张会稍厚一些.另外，一个位置测得的书本厚度并不能真正反映整本书的厚度.我们从这两个方面来改进模型.

假设：(1)除两张封面外，这本书其他纸的厚度一样，设共有 M 张.

(2)每张封面的厚度相当于 2 张其他纸的厚度.

(3)为了更准确得到书本的厚度，测量了书本三个不同位置的厚度，分别为 L_1，L_2，L_3，单位：mm，取平均值作为书本的厚度.

(4)一张纸的厚度为 T(mm).

建立模型:$T=\frac{L_1+L_2+L_3}{3(M+4)}$.

模型求解:将测得的数据直接代入模型即可求解.

比较两个数据,判断哪个更加合理,思考其中的原因.

实战演练

1. 对于“问题探究”中提到的最短路径问题,如果物体在上、下两个半平面运动的速度不相等,又该建立怎样的模型来求解呢?

2. 树上有 N 只鸟,猎人开枪打死了 1 只,请问:树上还剩下几只鸟? 通过这一问题的探究,请你谈谈对数学建模的认识?

课外拓展

1. 简述什么是数学模型,什么是数学建模,利用互联网查找或查阅书籍来了解更多有关数学建模的基本知识.
2. 鸡兔同笼问题:今有鸡、兔共 8 只,足共 22 只,问:鸡、兔各几何?
3. 一个星级宾馆有 150 间客房,经过一段时间的经营实践,该宾馆的经理得到一些数据:如果每间客房定价为 160 元,住房率为 55%;定价为 140 元,住房率为 65%;定价为 120 元,住房率为 75%;定价为 100 元,住房率为 85%.欲使每天收入最高,问:每间客房的定价应该是多少元?

1.2 建模流程

问题探究

如图 1－2－1 所示，在某一海域，甲、乙两地相距 a 千米，船从甲地到乙地顺水航行需 t_1 小时，从乙地到甲地逆水航行需 t_2 小时，问：船速和水速各是多少？

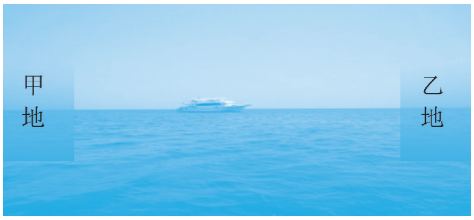

图 1－2－1

知识建构

分析：船的速度一般是指船在静水中的平均速度；船在水中航行的速度一般是由船的速度和水流的速度合成；船在顺水中的速度＝船的速度＋水流的速度，船在逆水中的速度＝船的速度－水流的速度；路程、速度、时间三者关系：路程＝速度×时间.

要解决这类“航行问题”，不仅需要了解上面这些运动学的基础知识，还可能涉及列方程、解方程组等相关数学知识；像这样在求解实际应用问题时，先做好相关知识的储备，这一过程在数学建模中一般称为模型准备.

假设：(1)船速、水速为常数，忽略船的长度，将船看成质点；

(2)天气晴好，风速忽略不计；

(3)船航行的方向与水流的方向在同一条直线上；

(4)船的速度为 x 千米/小时，水流的速度为 y 千米/小时.

像这样便于这一实际问题的解决，进行一些必要且合理的假设，这一过程一般称为**模型假设**.

构建模型：根据物理学的相关知识可得二元一次方程组如下：

$$\begin{cases}(x+y)\times t_1=a,\\(x-y)\times t_2=a.\end{cases}$$

像这样根据模型假设，建立相应的数学模型，这一过程一般称**模型构成**.

模型求解：解上述方程组得到
$$\begin{cases}x=\dfrac{a(t_1+t_2)}{2t_1t_2},\\y=\dfrac{a(t_2-t_1)}{2t_1t_2}.\end{cases}$$

像这样通过模型得出答案或分析出结果，这一过程一般称为**模型解析**.

上述“航行问题”中，所得结果符合实际，假设合理，所得到的模型正确，可解决类似航行问题和匀速直线运动类问题，这一过程一般称为**模型检验与应用**.

可见，用数学建模思想来解决实际问题的一般流程如下：

模型准备 ⟶ 模型假设 ⟶ 模型构成 ⟶ 模型解析 ⟶ 模型检验与应用

需要指出的是数学建模流程中的每个环节不必在每次建模问题中都要出现，且有时各环节之间没有明显的界线.因此，在数学建模中不必在形式上按部就班，只要反映出建模的特点即可.

例题讲解

例 如图 1－2－2 所示，一条东西走向的江面宽 k 米，游泳者从南岸的点 A 处出发游向北岸，试分析：游泳者渡江的最短时间多长？北岸接应游泳者的位置在哪？

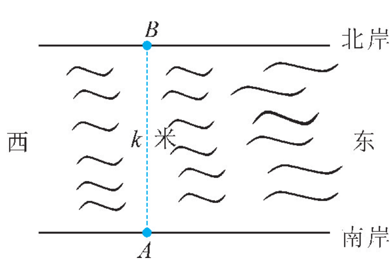

图 1－2－2

解 模型准备：(1)要了解运动学的基本常识：距离＝速度×时间；

(2)游泳路线与游泳者在静水中的游速、水速、风速等有关；

(3)为了简化问题，我们不考虑水速、风速.

模型假设：(1)水面平静，忽略风速和水流速度；

(2)把游泳者看成质点，其游泳速度为 v m/s，始终保持不变.要使渡江时间最短，则游速方向应由南向北，垂直对岸；

(3)不考虑其他因素对游泳者的影响，渡江时间为 t s.

模型构成：$t=\frac{k}{v}$.

模型解析：将实际数据代入即可求出结果，游泳者沿垂直对岸的方向渡江时间最短为 $\frac{k}{v}$ s，接应位置在点 A 正对的北岸点 B 处.

模型检验与应用：考虑到实际情况下，不能忽略风速、流速对路线的影响，模型可能与实际情况有出入，结果会有一定偏差.

考虑到风速和水流速度对游泳者的影响类似，而主要影响来自流速，为了简化问题，可忽略风速.考虑流速后，问题会涉及运动的合成与分解的知识.

模型假设：(1)忽略风速，水流速度为 u m/s，自西向东；

(2)把游泳者看成质点，其游泳速度为 v m/s，始终保持不变，要使渡江时间最短，方向应由南向北，垂直对岸；

(3)不考虑其他因素对游泳者的影响，渡江时间为 t s.

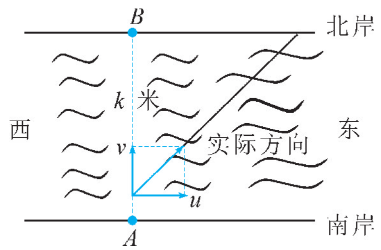

图 1－2－3

模型构成：

由运动的合成与分解的知识，如图 1－2－3 所示，可知：在南北方向上 $t=\frac{k}{v}$；

在东西方向上运动的距离为 $ut=\frac{ku}{v}$.

模型解析：游泳者的实际渡江路线仍是直线，但不是垂直对岸的方向.渡江最短时间为$\frac{k}{v}$ s，接应位置在点 A 正对的北岸点 B 处下游$\frac{ku}{v}$ m 处.

模型检验与应用：假设合理，模型较符合实际，可用来解决类似运动的合成与分解问题.

建模的一般流程：(1)模型准备；(2)模型假设；(3)模型构成；(4)模型解析；(5)模型检验与应用.在今后的数学建模过程中，要按照这五步的基本顺序落实各个环节，其中(1)和(5)这两个环节可以不重点展示，而中间三个环节须重点阐述.通过例题我们发现，模型假设对模型构成有直接影响，要重点加以体会.

实战演练

1.“牛吃草”问题：有一块草地，9 头牛 12 天可以把草吃完，8 头牛 16 天可以把草吃完.问：13 头牛多少天可以把草吃完？

解：设草每天的生长量为 a，每头牛每天的吃草量为 b，原有草量为 c，则

$$\begin{cases} c+12\times a=9\times b\times 12, \\ c+16\times a=8\times b\times 16, \end{cases}$$

化简方程组得 $a=5b$，$c=48b$.

所以，13 头牛使得草每天的减少量为 $13b-5b=8b$，可吃$\frac{c}{8b}=6$ 天.

答：13 头牛 6 天可以把草吃完.

这是传统应用题的解答过程，请你按照建模流程的五个环节来完整的书写建模过程.

2.在本节的例题中，如果进一步考虑到游泳者体力的衰减，假设游泳者的速度按照线性递减，模型又该如何改进呢？还能再进一步改进吗？

课外拓展

1. 在某一海域，甲、乙两地相距 600 千米，船从甲地到乙地顺水航行需 20 小时，从乙地到甲地逆水航行需 30 小时，问：船速和水速各是多少？请仿照教材样例，按照建模的五个基本环节来书写过程.
2. 生活中易拉罐随处可见，容积一定的易拉罐，如何设计才能使造价最少呢？
3. 利用互联网查找并阅读建模流程的相关知识——请说出数学建模的基本流程，并用自己的语言简述各环节的基本含义.

阅读材料

如果想对某个实际问题进行数学建模,通常要先了解该问题的实际背景和建模目的,尽量弄清要建模的问题属于哪一类学科的问题,可能需要用到哪些知识,然后学习或复习有关的知识,为接下来的数学建模做准备.这一过程称为模型准备.由于人们所掌握的专业知识是有限的,而实际问题往往是多样和复杂的,模型准备对做好数学建模问题是非常重要的.

一个实际问题会涉及很多因素,如果把涉及的所有因素都考虑到,既不可能也没必要,而且还会使问题复杂化导致建模失败.要想把实际问题变为数学问题还要对其进行必要合理的简化和假设,这一过程称为模型假设.在明确建模目的和掌握相关资料的基础上,去除一些次要因素.以主要矛盾为主来对该实际问题进行适当的简化并提出一些合理的假设可以为数学建模带来方便,使问题得到解决.一般地,所得建模的结果依赖于对应的模型假设,究竟模型假设到何种程度,要根据经验和具体问题决定.在整个建模过程中,模型假设可以在模型的不断修改中得到逐步的完善.

在模型假设的基础上,选择适当的数学工具并根据已知的知识和搜集的信息来描述变量之间的关系或其他数学结构(如数学公式、定理、算法等),这一过程称为模型构成.做模型构成时可以使用各种各样的数学理论和方法,但要注意的是在保证精度的条件下尽量用简单的数学方法是建模时要遵循的一个原则.要求学生对所有数学学科都精通是做不到的,但做到了解这些学科能解决哪一类问题和大体上怎样解决的方法对开阔思路是很有帮助的.此外,根据不同对象的一些相似性,借用某些学科中的数学模型,也是模型构成中经常使用的方法.模型构成是数学建模的核心.

在模型构成中建立的数学模型可以采用解方程、推理、图解、计算机模拟、定理证明等各种传统的和现代的数学方法对其进行求解,其中有些可以用计算机软件来做这些工作,这一过程称为模型解析.

把模型解析得到的结果与实际情况对比,以检验其合理和有效性,检验后获取的正确模型对研究的实际问题给出预报或对类

似实际问题进行分析、解释,以供决策者参考称为模型检验与应用.其主要是检验假设的合理性,模型所得结论是否与实践相符,有无实际指导价值等.模型检验对建模的成败是很重要的,如果检验结果不符合实际,应该修改补充假设或改换其他数学方法重新做模型构成.模型应用则是建模的最主要的目的.

章测试

一、填空题

1. 数学建模流程一般包含五个基本环节,分别是模型准备、________、________、________、模型检验与应用.
2. 数学建模的几个基本环节中,对模型构成有最直接影响的是________.

二、解答题

3. A 港到 B 港相距 392 千米,从两港同时各开出一艘轮船相对而行,从 A 港开出的轮船每小时航行 28 千米,从 B 港开出的轮船每小时航行 21 千米,经过几小时两船相遇?

   解:设经过 x 小时,两船相遇,依题意得 $28x+21x=392$,解得 $x=8$.

   答:经过 8 小时两船相遇.

   上述解答过程是按照传统方法进行的,请你按照数学建模的五个基本环节详细地来书写建模过程.
4. 有一块草地,10 头牛 20 天可以把草吃完,15 头牛 10 天可以把草吃完.问:多少头牛 5 天可以把草吃完?
5. 今有鸡兔同笼,上有 11 头,下有 32 足,问:鸡兔各几何?
6. 某学校旁边有一个十字路口,学生希望通过对十字路口红绿灯开设时间及车流量的调查,来分析该路口的红绿灯点亮的时间设置是否合理.于是同学们分组观察,得到的数据如下:东西方向绿灯即南北方向红灯的时间为 49 s;南北方向绿灯即东西方向红灯的时间为 39 s,所以红绿灯变换一个周期的时间为 88 s.在红绿灯变换的一个周期内,相应的车流量:东西方向平均 30 辆,南北方向平均 24 辆.请通过建立适当的数学模型来加以分析说明.

第 2 章 函数模型及应用

第 1 章介绍了数学建模的有关概念，数学建模的形式是多样的，可以是几何图形，也可以是方程式、函数的解析式等.当数学模型的形式是函数时，称之为函数模型.函数模型的表现形式也是多样的，如解析式、图象、表格等.

函数是描述客观世界变化规律的基本数学模型，不同的变化规律需要用不同的函数模型来描述.在学习了函数的概念、函数的性质、基本初等函数模型后，我们知道它们可以用来刻画现实世界中不同的变化规律.那么面对一个实际问题，应如何选择相应的函数模型来解决它呢？本章将介绍常见函数模型以及应用，感受建立函数模型的过程和方法，从而用函数模型来解决实际问题.

2.1 一次函数与二次函数模型

问题探究

某 DVD 光盘销售部每天的房租、人员工资等固定成本为 300 元，每张 DVD 光盘的进价是 6 元，销售单价与日销售量的关系如表 2－1－1 所示.

表 2－1－1

销售单价（元）	7	8	9	10	11	12	13
日均销售量（张）	480	440	400	360	320	280	240

请根据以上数据做出分析，试建立日均销售量与销售单价的函数模型，以及销售单价与日均销售利润的函数模型.

知识建构

在中学数学教学中，最常见的函数模型是一次函数与二次函

数模型，这两种函数模型在我们的日常生活中应用十分广泛.

当人们在社会生活中从事买卖特别是消费活动时，若其中涉及变量的线性依存关系，则可建立一次函数模型来解决问题.一次函数模型，即 $y=kx+b$，其增长特点是随 x 直线上升(自变量的系数大于0)或直线下降(自变量的系数小于0).对于这样的问题，在构建一次函数模型时主要是借助一次函数图象的单调性来解决实际问题.

当研究的问题涉及面积、产量及利润等方面时，通常都涉及两变量函数之间的二次函数关系，需要利用二次函数模型 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 来进行求解，此时可以通过对函数配方得到 $y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$，并且结合具体的函数图象来分析函数的单调性，最后找出相关规律让问题得以解决.

在一次函数与二次函数模型的构建及实际应用中，要注意函数的定义域是区间型还是整点型.

例题讲解

例 以探究的问题为例，来分析一次函数与二次函数模型的实际应用.

(1)请根据条件中的数据做出分析，试建立日均销售量与销售单价的函数模型，并写出此函数的定义域；

(2)试建立销售单价与日均销售利润的函数模型，并根据你所建立的函数模型指出销售单价定为多少时，才能使日均销售利润最大？最大销售利润是多少？

模型假设：

(1)假设销售单价为小数时的变化规律与整数时保持一致.

(2)假设销售单价为 x(元)，日均销售量为 $P(x)$(张)，日均销售利润为 y(元).

模型建立与求解：

(1)根据表2-1-1分析得到，销售单价每增加1元，日均销售量就减少40张.日均销售量与销售单价之间呈线性关系，因此满足一次函数模型，即 $P(x)=kx+b$，任意选取表2-1-1中的两组数据代入可求得 $k=-40$，$b=760$，则 $P(x)=-40x+760$.

小贴士

也可做出以销售单价 x 为自变量，日均销售量 $P(x)$ 为因变量的函数图象，观察发现是一条直线，从而得到满足一次函数模型.

由$\begin{cases}x>0,\\-40x+760>0,\end{cases}$得 $0<x<19$.

所以,日均销售量 $P(x)$与销售单价 x 的函数模型为

$$P(x)=-40x+760, x\in(0,19).$$

(2)考虑日均销售利润=(销售单价-单个进价)×日均销售量-固定成本.则 $y=(x-6)(-40x+760)-300$.

可以发现,销售单价与日均销售利润之间满足二次函数模型.

通过配方得到 $y=-40\left(x-\frac{25}{2}\right)^2+1390$. 当 $x=12.5$ 时,y 取得最大值 1390.

故销售单价定为 12.5 元时,就可使日均销售利润最大,最大为 1390 元.

点评:利用二次函数模型求最值时,应特别注意取得最值时的自变量与实际意义是否相符.

实战演练

1. 商场销售某一品牌的羊毛衫,购买人数 n 是羊毛衫标价 x 的一次函数模型,标价越高,购买人数越少.已知标价为每件 300 元时,无人购买;标价为每件 225 元时,购买人数为 75 人.若这种羊毛衫的成本价是 100 元/件,商场以高于成本价的相同价格(标价)出售.试建立一个函数模型,使得商场要获取最大利润时,羊毛衫的标价应定为每件多少元?

2. 用长度为 24 m 的材料围成一矩形场地,并且中间加两道隔墙.请你建立合适的函数模型,使得该矩形场地的面积最大,问:此时隔墙的长度为多少?

课外拓展

1. 为了保护环境，发展低碳经济，某单位在国家科研部门的支持下，进行技术攻关，采用了新工艺，把二氧化碳转化为一种可利用的化工产品.已知该单位每月的处理量最少为 400 吨，最多为 600 吨，月处理成本 y（元）与月处理量 x（吨）之间的函数模型可表示为 $y=\frac{1}{2}x^2-200x+80000$，且每处理 1 吨二氧化碳得到价值为 100 元的可利用化工产品.试建立每月利润的函数模型，并根据你所建立的函数模型分析该单位每月能否获利.如果能获利，求出每月最大利润；如果不能获利，则需要国家每月至少补贴多少元才能使该单位不亏损？
2. 某企业生产一种机器的固定成本（即固定投入）为 0.6 万元，但每生产 100 台时，又需可变成本（即另增加投入）0.25 万元，市场对该机器的需求量为 1000 台，销售收入（单位：万元）函数模型为 $R(x)=5x-\frac{1}{2}x^2(0\leqslant x\leqslant 10)$，其中 x 是产品的数量（单位：百台），请你建立利润 $f(x)$ 关于产量 x 的函数模型.