义务教育初级中学课本（试用）

数学

第五册 A

浙江教育出版社

ISBN 7-5338-3311-2

义务教育初级中学课本(试用)

数　学

第五册　A

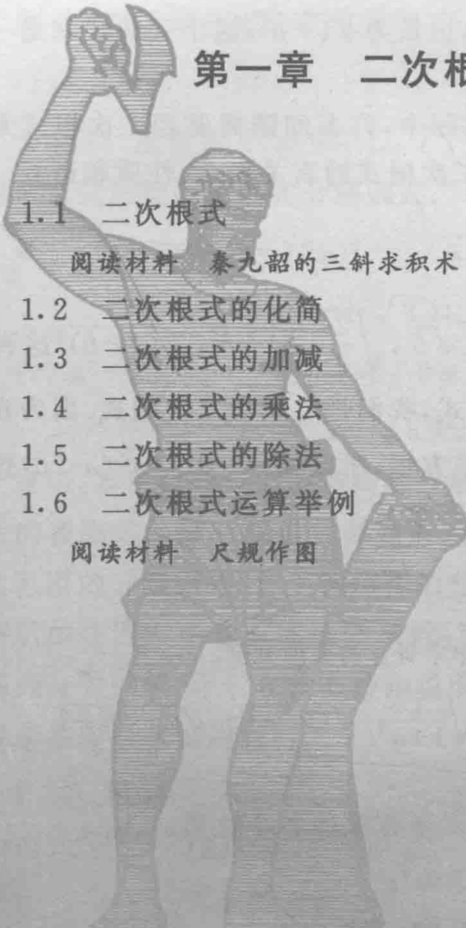
浙江教育出版社出版
浙江省出版公司重印

杭州富春印务有限公司印刷
浙 江 省 新 华 书 店 发 行
开本 850×1168　1/32　印张 5.125　字数 103 000
1999 年 5 月第 3 版　2004 年 3 月第 12 次印刷
ISBN 7-5338-3311-2/G·3281
定　价：5.15 元

批准文号：浙价商[2002]170 号　举报电话：12358
如发现印、装质量问题，请与本厂联系。电话：0571-64362059

目　　录

第一章　二次根式



$$\frac{AC}{AB}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=0.618\cdots$$

如果已知直角三角形的斜边长为1,一条直角边的长为a,那么另一条直角边长为$\sqrt{1-a^2}$,这个代数式就是一个二次根式.

在生活和生产实际中,许多问题需要用二次根式来解决.本章我们将学习二次根式的有关概念、性质和运算.

1.1 二次根式

像$\sqrt{a}$ $(a\geqslant 0)$,$\sqrt{5}$,$\sqrt{\frac{2}{3}}$,$\sqrt{4+b^2}$,$\sqrt{(a-b)^2}$这种表示算术平方根的代数式,我们把它叫做**二次根式**.因为在实数范围内,负数没有平方根,所以像$\sqrt{-3}$,$\sqrt{a}$ $(a<0)$这类式子在实数范围内没有意义.

练习

说出下列二次根式中字母a的取值范围:

$\sqrt{a-1}$;$\sqrt{1-a}$;$\sqrt{\frac{1}{1+a}}$;$\sqrt{(1-a)^2}$;$\sqrt{a^2-2a+3}$.

二次根式具有算术平方根的各个性质:

1. $(\sqrt{a})^2=a$ $(a\geqslant 0)$;

2. $\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a & (a\geqslant 0), \\ -a & (a<0); \end{cases}$

3. $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ $(a\geqslant 0, b\geqslant 0)$;

4. $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ $(a\geqslant 0, b>0)$.

这些性质是化简二次根式和进行计算的依据.

例 1 把下列各式分解因式：

(1)$4x^2-3$；　　(2)$a^2-2\sqrt{5}a+5$.

分析：　由性质 1，得 $3=(\sqrt{3})^2$，$5=(\sqrt{5})^2$. 这样就可以用公式法把以上两式分解因式.

解：(1) $4x^2-3=(2x)^2-(\sqrt{3})^2$

$$=(2x+\sqrt{3})(2x-\sqrt{3})；$$

(2) $a^2-2\sqrt{5}a+5=a^2-2\sqrt{5}a+(\sqrt{5})^2$

$$=(a-\sqrt{5})^2.$$

说明：本例以前我们所遇到的分解因式，原多项式和分解后的各因式的每一项系数都是有理数，我们称它是在有理数范围内分解因式. 像上例那样的分解因式，原多项式或分解后的各因式中含有无理数系数，我们就称它是在实数范围内分解因式. 今后在没有特别说明的情况下，分解因式都要求在实数范围内进行.

例 2 化简：

(1) $\sqrt{2^{10}}$；　(2) $\sqrt{a^4}$；　(3) $\sqrt{1-2a+a^2}$ $(a>1)$.

解：(1) $\sqrt{2^{10}}=\sqrt{(2^5)^2}=2^5$；　　（二次根式性质 2）

(2) $\because$　$a^2\geqslant 0$，

$\therefore$　$\sqrt{a^4}=\sqrt{(a^2)^2}=a^2$；　　（根据什么？）

(3) $\sqrt{1-2a+a^2}=\sqrt{(1-a)^2}=|1-a|$.

$\because$　$a>1$，

$\therefore \quad 1-a<0,$

$$\therefore \quad \sqrt{1-2a+a^2}=|1-a|$$
$$=-(1-a)=a-1.$$

说明:把被开方式中能开尽的因式用它的算术平方根代替移到根号外面时,可先写成绝对值的形式,然后化去绝对值符号.

练　习

1. 分别说出使下列各式成立的 a 的取值范围:

(1) $(-\sqrt{a})^2=a$;　　(2) $\sqrt{(-a)^2}=-a$;

(3) $\sqrt{(a-2)^2}=2-a$.

2. 化简:

(1) $\sqrt{3^6}$;　　(2) $\sqrt{x^6}$ $(x\leqslant 0)$;

(3) $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$;　　(4) $\sqrt{(a+3)^2}$ $(a<-3)$.

3. 分解因式:x^4-4.

想一想

甲、乙两人计算当 $a=-1.5$ 时 $a-\sqrt{(a+1)^2}$ 的值,得到下列两种不同的答案,哪个正确?

甲的解答是　$a-\sqrt{(a+1)^2}=a-(a+1)=-1$;

乙的解答是　$a-\sqrt{(a+1)^2}=a+(a+1)=2a+1$
$$=2\times(-1.5)+1=-2.$$

秦九韶的三斜求积术

我国南宋时期的数学家秦九韶(约1202～1261),在数学的整数论、高次方程等方面都取得了重大成就,被国外数学史家称为“他那个民族,他那个时代,而且确实也是所有时代最伟大的数学家之一.”秦九韶在他所著的《数书九章》第五卷中记述了“三斜求积术”.“三斜求积”即已知三角形的三边长,求它的面积.将三斜求积术用现代数学形式表达出来就得到如下公式:

$S=\sqrt{\frac{1}{4}\left[a^2b^2-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)^2\right]}$ (其中 a,b,c 是三角形三边的长,S 是三角形的面积).

运用因式分解,我们还能把公式变得简单易记:

$$S=\sqrt{\frac{a+b+c}{2}\left(\frac{a+b+c}{2}-a\right)\left(\frac{a+b+c}{2}-b\right)\left(\frac{a+b+c}{2}-c\right)}.$$

令 $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$,即三角形周长的一半,得

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

古希腊人也发现了这个公式,现在人们都以古希腊数学家海伦的名字命名,把它叫做海伦公式.

1.2　二次根式的化简

为了说明问题方便,从本节起我们约定,如果没有特别

说明，根号内的字母都表示正数. 先看一例：

化简下列二次根式：

(1) $\sqrt{4a}$；　　(2) $\sqrt{a^3b}$；　　(3) $\sqrt{\frac{b}{2a}}$.

解：(1) $\sqrt{4a}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{a}$　　(二次根式性质 3)

$=2\sqrt{a}$；

(2) $\sqrt{a^3b}=\sqrt{a^2\cdot ab}=\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{ab}=a\sqrt{ab}$；

(3) $\sqrt{\frac{b}{2a}}=\sqrt{\frac{2ab}{(2a)^2}}=\frac{1}{2a}\sqrt{2ab}$.　　(二次根式性质 4)

从上例可以看到，在二次根式化简时，如果被开方式中有因式开得尽方，可用它的算术平方根代替移到根号外面；如果被开方数中含有分母，应化去分母. 经这样化简后得到的二次根式就是**最简二次根式**.

练 习

下列各式哪些是最简二次根式，哪些不是？

$\sqrt{5a}$，　$\sqrt{8a}$，　$\sqrt{\frac{c}{9}}$，　$\sqrt{a^2+b^2}$，　$\sqrt{a^3}$.

例 1　把下列二次根式化简：

(1) $\sqrt{27a^3b^2}$；　　(2) $\sqrt{\frac{b^2}{8a^3}}$；　　(3) $\sqrt{\frac{a+5}{a-5}}$ $(a>5)$.

解：(1) $\sqrt{27a^3b^2}=\sqrt{3^2a^2b^2\cdot 3a}=3ab\sqrt{3a}$；

(2) $\sqrt{\frac{b^2}{8a^3}}=\sqrt{\frac{b^2\cdot 2a}{8a^3\cdot 2a}}=\frac{b}{4a^2}\sqrt{2a}$；

(3) $\sqrt{\frac{a+5}{a-5}}=\sqrt{\frac{(a+5)(a-5)}{(a-5)^2}}=\frac{1}{|a-5|}\sqrt{a^2-25}.$

$\because\ a>5,$

$\therefore\ a-5>0,$

$\therefore\ \sqrt{\frac{a+5}{a-5}}=\frac{1}{|a-5|}\sqrt{a^2-25}=\frac{1}{a-5}\sqrt{a^2-25}.$

例 2 化简：

(1) $\frac{10}{a}\sqrt{0.1a^3b^3}$；　　(2) $-\frac{y}{x}\sqrt{\frac{x^2}{y}}$ $(x<0)$.

解： (1) $\frac{10}{a}\sqrt{0.1a^3b^3}=\frac{10}{a}\cdot\sqrt{\frac{a^3b^3}{10}}=\frac{10}{a}\sqrt{\frac{10a^3b^3}{10^2}}$

$$=\frac{10}{a}\cdot\frac{ab}{10}\sqrt{10ab}=b\sqrt{10ab};$$

(2) $\because\ x<0,$

$\therefore\ -\frac{y}{x}\sqrt{\frac{x^2}{y}}=-\frac{y}{x}\sqrt{\frac{x^2y}{y^2}}=-\frac{y}{x}\cdot\frac{|x|}{y}\sqrt{y}$

$$=-\frac{y}{x}\cdot\frac{-x}{y}\sqrt{y}=\sqrt{y}.$$

练　习

1. 下列二次根式中，哪些是最简二次根式，哪些不是？如果不是，把它化成最简二次根式.

(1) $\sqrt{45}$；　　(2) $\sqrt{17}$；　　(3) $\sqrt{\frac{1}{2}}$；

(4) $\sqrt{7a^7}$；　　(5) $\sqrt{\frac{b}{3a}}$；　　(6) $\sqrt{a-7}$ $(a\geqslant 7)$；

(7) $\sqrt{3x^4y}$；　　(8) $\sqrt{\frac{1}{a+6}}$.

2. 化简：

(1) $x^2\sqrt{\dfrac{1}{8x^3}}$；　　(2) $\dfrac{1}{a-b}\sqrt{(a-b)^2b}$ $(b>a)$；

(3) $x\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{x^2}}$.

想一想

下列化简是否正确？如果不正确，应怎样改正？

1. $2\sqrt{\dfrac{1}{2}}=\sqrt{2^2\times\dfrac{1}{2}}=\sqrt{2}$.

2. $a\sqrt{\dfrac{1}{|a|}}=\sqrt{a^2\times\dfrac{1}{|a|}}=\sqrt{a}$ $(a<0)$.

1.3　二次根式的加减

先看一例.

计算：(1) $\sqrt{32}-\dfrac{1}{2}\sqrt{8}+\sqrt{\dfrac{1}{2}}$；　(2) $\sqrt{4a^3b}-a\sqrt{ab}$.

解：(1) $\sqrt{32}-\dfrac{1}{2}\sqrt{8}+\sqrt{\dfrac{1}{2}}$

$$=4\sqrt{2}-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$=(4-1+\frac{1}{2})\sqrt{2}=\frac{7}{2}\sqrt{2};$$

(2) 先把 $\sqrt{4a^3b}$ 化简，再计算.

$$\sqrt{4a^3b}-a\sqrt{ab}=2a\sqrt{ab}-a\sqrt{ab}$$

$$=(2a-a)\sqrt{ab}=a\sqrt{ab}.$$

从上例看到，二次根式的加减可以归结为：

1. 先把各二次根式化简成最简二次根式；

2. 把被开方式相同的最简二次根式像合并同类项那样进行合并.

例 1　计算：

(1) $(3\sqrt{27}-6\sqrt{\frac{1}{2}})-(8\sqrt{0.125}-6\sqrt{\frac{1}{12}})$；

(2) $\frac{1}{3}\sqrt{9x}-4\sqrt{\frac{x}{4}}+2x\sqrt{\frac{1}{x}}$.

解：(1) ∵　$8\sqrt{0.125}=8\sqrt{\frac{1}{8}}=8\sqrt{\frac{2}{8\times 2}}=2\sqrt{2}$，

∴　$原式=(9\sqrt{3}-3\sqrt{2})-(2\sqrt{2}-\sqrt{3})$

$$=9\sqrt{3}-3\sqrt{2}-2\sqrt{2}+\sqrt{3}$$

$$=10\sqrt{3}-5\sqrt{2}；$$

(2) $原式=\sqrt{x}-2\sqrt{x}+2\sqrt{x}=\sqrt{x}$.

例 2　计算：$\sqrt{\frac{x^2+9}{3x}+2}+\sqrt{\frac{x^2+9}{3x}-2}$ $(x>3)$.

解：$原式=\sqrt{\frac{x^2+6x+9}{3x}}+\sqrt{\frac{x^2-6x+9}{3x}}$

$$=\sqrt{\frac{(x+3)^2\cdot 3x}{(3x)^2}}+\sqrt{\frac{(x-3)^2\cdot 3x}{(3x)^2}}$$

$$=\frac{x+3}{3x}\sqrt{3x}+\frac{x-3}{3x}\sqrt{3x}$$

$$=(\frac{x+3}{3x}+\frac{x-3}{3x})\sqrt{3x}=\frac{2}{3}\sqrt{3x}.$$

练 习

计算：

1. $\sqrt{28}+9\sqrt{112}$.　　　2. $\sqrt{12}+\sqrt{\frac{1}{27}}-\sqrt{\frac{1}{3}}$.

3. $x\sqrt{\frac{1}{x}}+\sqrt{4y}-\frac{\sqrt{x}}{2}+y\sqrt{\frac{1}{y}}$.

4. $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\ (b^2>4ac)$.

5. $\frac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\frac{3}{4}(\sqrt{2}-\sqrt{27})$.

6. $(4b\sqrt{\frac{a}{b}}+\frac{2}{a}\sqrt{a^3b})-(3a\sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt{9ab})$.

想一想

下列计算哪些正确，哪些不正确？

1. $\sqrt{3}+\sqrt{2}=\sqrt{5}$.
2. $a+\sqrt{b}=a\sqrt{b}$.
3. $\sqrt{a}-\sqrt{b}=\sqrt{a-b}$.
4. $a\sqrt{a}+b\sqrt{a}=(a+b)\sqrt{a}$.
5. $\frac{1}{3}\sqrt{3a}-\frac{1}{2}\sqrt{2a}=\sqrt{a}-\sqrt{a}=0$.

1.4　二次根式的乘法

先看一例.

用电子计算器计算：$\sqrt{130}\cdot\sqrt{0.2}$(结果保留四个有效数字).

由二次根式性质 3，得　$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$，因此我们

可以这样来计算：

$$\sqrt{130}\cdot\sqrt{0.2}=\sqrt{130\times0.2}=\sqrt{26}=5.09901\cdots$$
$$\approx5.099.$$

从上例可以看到，**二次根式相乘，仍得二次根式，被开方数的积作为积的被开方数.**

例 1 计算：

(1) $\sqrt{60}\cdot\sqrt{\frac{5}{6}}$；　　(2) $a\sqrt{\frac{3bc}{a}}\cdot2\sqrt{\frac{2ac}{b}}$.

解： (1) $\sqrt{60}\cdot\sqrt{\frac{5}{6}}=\sqrt{60\times\frac{5}{6}}$

$$=\sqrt{50}=5\sqrt{2};$$

(2) $a\sqrt{\frac{3bc}{a}}\cdot2\sqrt{\frac{2ac}{b}}=2a\sqrt{\frac{3bc}{a}\cdot\frac{2ac}{b}}$

$$=2a\sqrt{6c^2}=2\sqrt{6}\,ac.$$

注意 运算结果中含有的二次根式，一般要化成最简二次根式.

例 2 计算：

(1) $\left(\sqrt{\frac{3}{8}}-3\sqrt{3}\right)\sqrt{6}$；

(2) $(2-\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})$；

(3) $(2\sqrt{x}-\sqrt{y})(2\sqrt{x}+\sqrt{y})$.

解： (1) $\left(\sqrt{\frac{3}{8}}-3\sqrt{3}\right)\sqrt{6}$

$$=\sqrt{\frac{3}{8}}\cdot\sqrt{6}-3\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}$$

$$=\sqrt{\frac{3}{8}\times 6}-3\sqrt{3\times 6}=\frac{3}{2}-9\sqrt{2};$$

(2) $(2-\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})=6+4\sqrt{2}-3\sqrt{2}-4$

$$=2+\sqrt{2};$$

(3) $(2\sqrt{x}-\sqrt{y})(2\sqrt{x}+\sqrt{y})$

$$=(2\sqrt{x})^2-(\sqrt{y})^2=4x-y.$$

上面这类运算与整式的乘法类似. 当二次根式的乘法适用乘法公式时,我们可以运用乘法公式进行计算.

练 习

1. 计算:

(1) $\sqrt{11}\cdot\sqrt{2}$; (2) $2\sqrt{0.1}\cdot 5\sqrt{20}$;

(3) $\sqrt{\frac{4}{5}}\cdot(-\sqrt{125})$; (4) $\sqrt{6x}\cdot 2\sqrt{2x}$;

(5) $\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}}\cdot\frac{b}{a}\sqrt{\frac{a}{b}}$; (6) $\sqrt{\frac{a}{2b}}\cdot(-2\sqrt{ab})\cdot 3\sqrt{b}$.

2. 计算:

(1) $(\sqrt{12}-3\sqrt{75})\cdot\sqrt{3}$;

(2) $(\sqrt{2}+2\sqrt{12}-\sqrt{6})\cdot 2\sqrt{3}$;

(3) $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}-2\sqrt{3}\right)\left(3\sqrt{5}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$;

(4) $(2\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})$;

(5) $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2$.

想一想

求一元二次方程 $x^2+3x+1=0$ 的两根,并计算两根的和与两

根的积. 看一看,这个和与积与方程的一次项与常数项有什么关系?再换一个二次项系数为 1 的一元二次方程试一试,你能发现其中有什么规律吗?

1.5 二次根式的除法

先看一例.

计算:$\sqrt{45}\div\sqrt{5}$.

由二次根式性质 4,$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$,

$$\therefore\quad \sqrt{45}\div\sqrt{5}=\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{45}{5}}=\sqrt{9}=3.$$

从上例可以看到,**二次根式相除,仍得二次根式,被开方数相除所得的商作为商的被开方数**.

例 1 (1)$\sqrt{1\frac{2}{3}}\div\sqrt{\frac{5}{9}}$;

(2) $4\sqrt{6a^3}\div2\sqrt{\frac{a}{3}}$.[1]

解: (1)$\sqrt{1\frac{2}{3}}\div\sqrt{\frac{5}{9}}=\sqrt{\frac{5}{3}\div\frac{5}{9}}$

$$=\sqrt{\frac{5}{3}\times\frac{9}{5}}=\sqrt{3}.$$

(2) $4\sqrt{6a^3}\div2\sqrt{\frac{a}{3}}=2\sqrt{6a^3\div\frac{a}{3}}$

[1] 类似于单项式相除,二次根式相除,如$(4\sqrt{6a^3})\div(2\sqrt{\frac{a}{3}})$,$(x\sqrt{x})\div(\frac{x}{x-1}\sqrt{x^3})$等,其中的括号通常省略.

$$=2\sqrt{6a^3\cdot\frac{3}{a}}=2\sqrt{18a^2}=6\sqrt{2}a.$$

二次根式的除法运算，还可以通过化去分母中的根号的方法来进行. 例如，计算 $\sqrt{5}\div\sqrt{2}$，先将 $\sqrt{5}\div\sqrt{2}$ 写成 $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$，然后把分子和分母都乘以 $\sqrt{2}$，化去分母中的根号，

即
$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}}{(\sqrt{2})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{10}.$$

把分母中的根号化去，叫做**分母有理化**. 分母有理化时，一般是把分子和分母都乘以同一个不等于零的适当代数式，使分母不含根号.

例 2 计算：

(1) $\frac{6}{\sqrt{20}}$；　　(2) $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$（精确到 0.1）；

(3) $\frac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}$.

解： (1) $\frac{6}{\sqrt{20}}=\frac{6}{2\sqrt{5}}=\frac{6\cdot\sqrt{5}}{2\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}=\frac{3}{5}\sqrt{5}$；

(2) $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})}$

$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2-3}=-(\sqrt{2}+\sqrt{3})$

$\approx-(1.41+1.73)=-3.14\approx-3.1$；