

◎ 著

温寒江 主编




中学 数学

两种思维结合学习论



「学习与思维」课题25年研究成果选集 ④ 中学卷

 教育科学出版社
Educational Science Publishing House

脑科学·思维·教育丛书

中学数学

两种思维结合学习论

马成瑞

◎ 著

教育科学出版社
· 北 京 ·

出版人 李 东
项目统筹 代周阳
责任编辑 郑 莉
版式设计 刘 莹 沈晓萌
责任校对 张 珍
责任印制 叶小峰

图书在版编目 (CIP) 数据

中学数学两种思维结合学习论 / 马成瑞著. —北京:
教育科学出版社, 2016. 11
(脑科学·思维·教育丛书)
ISBN 978-7-5191-0527-3

I. ①中… II. ①马… III. ①中学教学课—教学研究
IV. ①G633. 602

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 126860 号

脑科学·思维·教育丛书
中学数学两种思维结合学习论
ZHONGXUE SHUXUE LIANG ZHONG SIWEI JIEHE XUEXILUN

出版发行 教育科学出版社

社 址 北京·朝阳区安慧北里安园甲9号

市场部电话 010-64989009

邮 编 100101

编辑部电话 010-64981357

传 真 010-64891796

网 址 <http://www.esph.com.cn>

经 销 各地新华书店

制 作 北京金奥都图文制作中心

印 刷 保定市中华美凯印刷有限公司

开 本 165毫米×239毫米 16开

版 次 2016年11月第1版

印 张 23

印 次 2016年11月第1次印刷

字 数 305千

定 价 50.00元

如有印装质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换。

一项有战略意义的研究

全面实施素质教育是为了适应现代社会对人的素质的需要，也是为了适应现代社会中人的自身发展的需要。提出提高人的全面素质，当然是针对原有教育模式中存在的全面的地方，这些不全面的地方主要是指对培养人的创新精神和实践能力重视不够。因此，改革人才培养模式，加强对人的创新精神和实践能力的培养就成为实现全面素质教育的重要课题。

培养创新精神的关键是培养人的创新思维，而这一过程实际是开发人的潜能，特别是开发人的大脑潜能的过程。现代脑科学的研究已越来越被各国政府和科学家所重视，因为从某种意义上说，一个国家的综合国力取决于经济实力，经济实力取决于科技实力，科技实力取决于创新实力，创新实力取决于人才实力，而人才实力则取决于人脑功能的开发水平。因此，加强脑科学的研究以服务于人脑潜能的全面开发

就成为综合国力竞争的有战略意义的重点。

我国著名教育家温寒江同志，多年以来，以其深厚的教育理论素养和丰富的教育实践经验，根据脑科学研究成果指导了形象思维的研究与教育改革实验，并取得了重大进展。近几年，又将脑科学应用于基础教育中培养创新精神的理论与实践的研究，取得了可喜成果，这部丛书就是这一成果的展示。本丛书凝聚着许多优秀教育工作者进行的理论与实践探索的心血与智慧，无论对全面教育改革，还是学科教学论的发展，都会产生重要的影响。

我衷心希望，培养创新精神的研究会有助于教育的创新，会有助于从更深的层面上理解和实践全面素质教育的深刻内涵。

陶西平

2010年3月

一、教育的困惑

新中国成立 60 多年来，我国教育事业有了很大的发展，取得了巨大的成绩。但是，我们也看到，当前中小学课堂教学相当普遍地存在枯燥乏味、抽象难懂、死记硬背、高分低能的现象。教育还不能适应经济社会发展的形势，还不能适应国家对人才培养的要求。问题的症结在哪里？教育理论是否存在缺失？教学改革路在何方？对此，我们常常感到困惑。

二、脑科学的启示

20 世纪 70 年代末至 80 年代，是思想解放的年代。在对教育问题的思索中，有几件事情对我们的影响是深刻的。首先，《毛主席给陈毅同志谈诗的一封信》发表后，在毛主席肯定形象思维的鼓舞下，文艺界展开了新中国成立以来第三次关于形象思维的大讨论，

对形象思维在文艺中的作用，文艺界取得了比较一致的认识。其次，我国著名科学家钱学森，大力提倡形象思维，把形象思维作为人类思维的基本方式之一，并建议把形象思维作为思维科学研究的突破口。最后，美国心理学家斯佩里（R. Sperry）对裂脑人的实验研究，揭示了大脑两半球功能的不对称性和右半球的许多高级功能，获得了1981年诺贝尔生理学或医学奖。

裂脑人的实验结果表明，人们可以用语言（概念）来思维，也可以用非语言的表象来思维，从而打破了行为主义心理学研究行为而不研究意识（思维）的禁区，也打破了“只有唯心主义者……才能谈到没有语言的思维”（斯大林语）的神话，大大解放了人们的思想。

斯佩里的裂脑人实验和钱学森的倡导，使我们对教学改革思索，聚焦到脑科学、思维、教育这三者的结合上来，以脑科学的新成果为依据，探索一条教学改革的新路。

脑科学和教育科学是两个不同领域的学科，脑科学成果在教育中的应用，要找到结合点或切入点。我们选择的切入点是“思维”。因为思维既是脑科学的重点研究内容，又是学习科学的核心。思维是这两个学科最大的共同点。这样，我们的课题就直接把脑科学关于思维、表象、记忆、语言学习等重要研究成果，同中小学的各科教学、同人的全面发展联系起来。

我们的课题是北京市哲学社会科学“八五”、“九五”、“十五”、“十一五”规划重点课题。“八五”课题名称为“开发右脑，发展形象思维的教学实验与研究”，“九五”、“十五”为“发展形象思维的理论研究与教学实验”，“十一五”为“学习中思维的全面、协

调和可持续发展研究”，总称为“学习与思维”。1998年春，我们荣幸地向李岚清副总理汇报课题研究的进展和阶段成果，李岚清副总理对课题研究的充分肯定和重视，使课题组全体成员受到莫大的鼓舞。

三、时代·问题·目标

(一)问题

马克思说：问题就是公开的、无畏的、左右一切个人的时代声音。

我们正处在建设富强民主、文明和谐的社会主义现代化国家，实现中华民族伟大复兴的时代。我们又处在人的思维方式、社会媒体深刻变革的时代。

处在这样一个伟大的时代，我们怎样把握教育的问题？当前教育存在的问题是什么？在课题开始时，我们并不十分清楚。其原因正如古诗所说，“不识庐山真面目，只缘身在此山中”。随着研究的深入，特别是“十一五”期间，在科学发展观的指导下，我们开展学习过程中思维全面、协调、可持续发展的研究，对当前教育存在的主要问题感到清晰了。概括起来，可以从教学实践和学习理论两个方面来说。

在实践上，课堂教学相当普遍地存在四种现象：枯燥乏味，抽象难懂，死记硬背，高分低能。

在理论上，可以从以下四个方面进行阐述：

(1)从学习与发展的内涵来说，人的全面发展（德、智、体、美）内在联系的机制是什么？为什么说科学与艺术是相通的？

(2)从学习与发展的顺序来说，学习从已知到未

知，新旧知识(技能)内在联系的机制是什么?(目前国外有多种学习迁移理论，但没有统一的学习迁移理论)

(3)从学习与发展的层次来说，技能、能力、创新能力内在联系的机制是什么?能否培养中小学生的创新能力?

(4)从学习与媒体的关系来说，当代信息技术迅速发展，信息技术(网络、多媒体)如何同学科教学整合?

这四个问题是教育理论的基础性问题。这几个问题解决了，学习的其他一些重要问题，如认识活动与身心发展、知识的理解、学习的效率、学习可持续发展等问题，也就比较容易解决了。

我们的研究表明，上述当前教育存在的问题，其根源在于忽视思维或思维的片面性。

(二)目标

课题研究有以下三个目标:

(1)全面发展思维;

(2)教会每一个学生，使学习可持续发展;

(3)培养能力、创新能力，让青少年智力得到最佳发展。

四、教学必须深入改革

20多年来，课题研究以马克思主义认识论和科学发展观为指导，以脑科学的新成果为依据，全面发展思维，深入教学改革，探索一条教学改革的新路——教学改革的回归与创新。

所谓“回归”，我们认为，当前教学的改革，应从各种忽视思维、脱离思维的学习理论及其影响中，回

到学习的基本命题即学习与思维上来。正如温家宝同志所指出的：“教学改革还要回到学、思、知、行这四个方面的结合，就是学思要联系，知行要统一。”所谓“创新”，就是学习落实科学发展观，以思维的全面、协调、可持续发展为核心，走学习可持续发展、最佳发展的创新之路。

五、改革的思路、方法与成果

我们研究的思路是：在学习过程中，开发大脑潜能(开发右脑)—发展形象思维—思维的全面发展—思维的全面协调可持续发展—学习的可持续发展。通过发展思维，把教育与脑科学有机地结合起来。

我们研究的基本方法是：理论结合实践，我们采取边研究边总结的方法，把理论研究和教改实验结合起来。理论研究的成果为教学实验提供依据，学校改革实践又检验与丰富了理论研究的成果。

20多年的研究与实验取得了丰硕的成果。

(1) 我们在理论结合实践下，用中国的学术话语，解决并回答了当前教育存在的上述问题，完成了课题研究的目标。

(2) 编辑出版了40多本理论研究与教学实验的成果，其中有总课题出版的专著、论文集31本，实验学校出版的专著、校本教材12种。

《脑科学·思维·教育丛书》是从上述课题成果中精选出来的研究成果。

课题的研究工作得到了中央和北京市教育部门的领导，得到了北京市社科联、北京市哲学社会科学规

划办公室、北京教育学院、北京市教育学会的关心和大力支持。清华大学美术学院教授、博士生导师史习平先生听闻“学习与思维”课题 25 年研究成果选集出版在即，特为此治印祝贺。在此，谨对为本课题的研究、实验、出版给予关心、支持和帮助的领导、专家、学者和有关工作人员致以衷心的感谢！

本丛书由北京市社会科学理论著作出版基金资助出版。

温寒江

2014 年 12 月

第一章 乐学数学	···001
第一节 数学是思维的科学	···002
第二节 数学教学中的形象思维	···005
第三节 使学生乐学数学	···016
第二章 教书育人	···034
第一节 数学教学中的教育工作	···035
第二节 天职·源泉·使命	···045
第三节 在教科研实践中学习成长	···058
第三章 思维与数学概念教学	···068
第一节 抽象思维的特点	···068
第二节 思维与数学概念教学	···078
第四章 抽象思维与中学代数教学	···095
第一节 集合：迟到的主角	···095
第二节 函数：概念的更新	···098
第三节 方程：“万能”的方法	···110
第五章 形象思维与立体几何教学	···118
第一节 形象思维的特点	···118
第二节 立体几何的入门教学	···125

第三节	立体几何的结构与空间想象能力训练	…136
第四节	空间想象能力的培养	…147
第六章	两种思维与解析几何	…172
第一节	笛卡尔的贡献——“数学中的转折点”	…172
第二节	最重要的概念——“曲线与方程”	…177
第三节	运算方法——“完美的辩证思维”	…185
第七章	思维方法与数学教学	…190
第一节	抽象思维的一般方法与数学教学	…190
第二节	形象思维的一般方法与数学教学	…212
第三节	数学思维的特殊方法	…227
第八章	数学复习课的教学	…240
第一节	记忆与迁移	…241
第二节	三角函数等知识的整理	…243
第三节	平面几何的复习	…263
第四节	数列的整理与复习	…275
第九章	数学能力的培养	…288
第一节	技能、能力与思维	…289
第二节	数学问题的审读和判断能力	…295
第三节	数学能力培养的核心思维训练	…302
第十章	创新能力的培养	…312
第一节	创新能力	…312
第二节	创新能力的培养	…328

创新是一个民族的灵魂，是一个国家兴旺发达的不竭的动力。数学是思维的科学，数学教学要为创造而教。温寒江老师牵头的“学习与思维”课题，是从基础教育的实践中来，既有前瞻性又有现实性。

作为第一线的教师，我们每天都在和社会的无价之宝——年青的一代打交道，教师的信念、智慧、意志、情感，无时无刻不在对青少年产生潜移默化的影响。在我 50 年的教师生涯中，有几件事对我触动很大。之一，寓言故事。30 多年前，人民教育出版社的袁明德老师曾给我讲了一个“气球问路”的故事，说几个坐热气球旅行的人迷路了，降低高度后正好地上有一个人，于是向他问路：“喂，这是什么地方？”这人想了想回答：“喂，你们迷路了。”热气球上的人由此断言，“这人是学数学的”，理由有三：一是学数学的人会思考，此人想了一下，说明会思考；二是答案完全正确，他们确实迷路了；三是答案一点用处也没有。数学是让人聪明之学，被编故事的人说成一点用处也没有，我心里很不是滋味。之二，“毁”人不倦。约 30 年前，杨澜为征求中央电视台某教育栏目内容而召开了座谈会。会上某著名大学教授发言说，中小学现在“不知怎么回事”，大家都在“毁”人不倦。还怕误会，特别说明不是教诲的“诲”，而是摧毁的“毁”。我当时在场，很想解释说中小学教师多么辛苦，但已发过言不好再说而忍下了。之三，大胆“胡话”。20 多年前，我担任年级组长，在学生按学号轮流记、大家随意看的班日志上，

读到题为“课堂杂感——大胆的胡话”的短文如下：“外语课，念单词念课文，古板的模式；xxx、xx、xx，老师的心肝。政治课，讲台上有老师讲课感性的语言，讲台下有同学写作业理性的行为。语文课，老师正口干舌燥地给51名聋哑学生上课。”我校校风民主，学生不聋不哑，什么话都敢说。这篇短文中没谈到数学，但在高三学生的班日志中，我读到过“数学把人搞得焦头烂额，苦不堪言”等感受。身为教师，心有所动所思。之四，“今”日留言。10多年前，参加本课题第一轮研究的学生，在班日志中为给自己的老师以鼓励，写道：“老师以其特有的清悦嗓音，驱逐了同学们下午第一节课的恹恹睡意，大家凝神细听每字、每句及每一回音，深深体会每一个符号的意义。一双妙手，巧解学生心中疑窦；一番有条不紊、错落有致的讲解，真是娓娓动听。同学们在从迷惑不解到茅塞顿开的过程中，又一次汲取了博大精深的数学学科中妙绝天下的解题思路。”这些感受，促使我下了要研究数学教学，做不辜负学生期望的教师的决心。

第一节 数学是思维的科学

21世纪，数学学科的基础性与开拓性愈显重要。数学教育的四个中心议题可以是：什么是数学？为什么教（学）数学？教（学）哪些数学？如何教（学）数学？作为一名数学教育工作者，我们首先要思考的问题是什么是数学。

一、见智见仁的看法

对于什么是数学的认识，随着时代的前进而不断发展变化，并且由于观察角度的不同而智者见智、仁者见仁。这里列举具代表性



的一些认识如下:

纯数学的对象是现实世界的空间形式和数量关系 (恩格斯);

数学是上帝用来书写宇宙的文字 (伽利略);

数学是锻炼思维的体操 (加里宁);

数学就是符号加逻辑 (罗素);

数学是蕴藏智慧的宝库,是培养人优秀思维品质的乐园;

数学是一项造福于人类的伟大智力工程,是一门十分古老的科学,又是一门充满青春活力的科学,还是创造者的乐园;

数学是一门自然科学,数和形是数学的两大支柱,它具有高度的抽象性、严密的逻辑性和应用的广泛性等三大特征;

数学是一门科学,是一种反映客观现实的模式科学,是描述模式的语言。

二、数学教学与思维发展

学习过程的本质是什么?学习是一连串的认识运动,是一种人的身心和谐发展的过程。看书、听讲、做题、复习,是由旧知识到新知识,由知之不多到知之较多,由知到用的过程。问题—思考—解答,就是学习过程的本质。没有问题,没有思考,就没有学习的矛盾运动,就没有真正的学习。我们的课题组认为,长期的学习过程可以分为基本过程和发展过程两个阶段,前者是后者的基础,后者是前者的延续。学习过程有三要素:思维、技能和知识,其中思维是核心。思维、技能、知识是能力、情感、意志发展的基础,抓“三基”就抓住了学习的纲。

数学是思维的科学,她能启迪、培养、发展人的思维,她在思维的深度、广度、系统性等方面优于别的学科。数学课程标准指

出，数学是培养公民素质的基础课程，是学习其他课程和进一步学习的基础，并为学生的终身发展，形成科学的世界观、价值观奠定基础。

数学教学中发展思维的意义主要有以下四点。

(1) 发展思维，抓基础，抓共性。数学像一棵大树，思维是它的主干，优质教育=坚实基础+创新发展。

(2) 发展思维，学习概括与抽象。数学有四种本领：以简驭繁，如欧氏几何中的公理化体系；审同辨异，如从 $x^2 + y^2 = z^2$ ，毕达哥拉斯看到面积关系，费马看到不定方程，笛卡尔看到二次曲面；判美析理，如刘徽割圆术；欣赏鉴别，如无图无公式的狄里赫勒函数等。数学学习，对提高全民族素质具有重要意义。

(3) 发展思维，培养能力。技能是连接客观现实世界和人的主观精神世界的中介和桥梁，是主体连接客体的内化与外化有效的活动方式体系，而一系列技能的高水平综合就构成能力。通过恰当的思维训练，可以使技能提高为能力。在教学实践中我们认识到，会不会用知识和怎样用知识，是学生有没有能力和能力高低的重要标志，而“用”的前提是学会思维。

(4) 发展思维，促进有效教学。提升课堂教学的有效性，是深化课程改革的关键和基本要求，而“有效性”的衡量标准是学生思维、身心的全面发展。教学设计中思维的红线贯穿始终，思维从疑问开始，思维的发展与深化需要启发与激励。我们期待的教学是因势利导、循循善诱、智慧欢乐、教学相长，并愿为此而努力探索。

三、怎样学好中学数学

21 世纪，我国进行了新一轮的课程改革，提出一切以学生的发展为本。对传统中学数学的内容，如代数、平面几何、三角函数、立体几何、解析几何等，我校师生从思维发展、学习通法、数学思想等方面，曾概括出学好中学数学必须过“六关”，会“六法”，领

