管理类硕士研究生考试指定教材

旅游管理MTA、工程管理MEM、公共管理MPA、图书情报MLIS适用

2020

# 全国硕士研究生入学考试管理类联考
# 数学标准教材

MPACC MBA MPA MAUD MTA MLIS MEM

王杰通◎编著

南京大学出版社

国家自然科学基金项目（项目编号：11471018）

2020

# 全国硕士研究生入学考试管理类联考数学标准教材

MPACC MBA MPA MAUD MTA MLIS MEM

王杰通 编著

本书试卷配有二维码，扫一扫可见真题讲解视频

南京大学出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

全国硕士研究生入学考试管理类联考数学标准教材 / 王杰通编著. — 南京 ：南京大学出版社，2019.2

ISBN 978-7-305-21627-5

Ⅰ. ①全… Ⅱ. ①王… Ⅲ. ①高等数学—研究生—入学考试—教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 017872 号

出版发行　南京大学出版社
社　　址　南京市汉口路 22 号　　　　邮　编　210093
出 版 人　金鑫荣

**书　　名　全国硕士研究生入学考试管理类联考数学标准教材**
编　　著　王杰通
责任编辑　田　甜　吴　汀　　　　编辑热线　025-83595840

照　　排　南京南琳图文制作有限公司
印　　刷　南京人民印刷厂有限责任公司
开　　本　787×1092　1/16　印张 25.5　字数 558 千
版　　次　2019 年 2 月第 1 版　2019 年 2 月第 1 次印刷
ISBN　978-7-305-21627-5
定　　价　60.00 元

网址：http://www.njupco.com
官方微博：http://weibo.com/njupco
官方微信号：njupress
销售咨询热线：(025) 83594756

---

# 目 录

# 绪 论

## 一、专业硕士发展概述

专业学位(professional degree),是相对于学术型学位(academic degree)而言的学位类型,其目的是培养具有扎实理论基础,并适应特定行业或职业实际工作需要的应用型高层次专门人才.专业学位与学术型学位处于同一层次,培养规格各有侧重,在培养目标上有明显差异.学术型学位按学科设立,其以学术研究为导向,偏重理论和研究,培养大学教师和科研机构的研究人员;而专业学位以专业实践为导向,重视实践和应用,培养在专业和专门技术上受到正规的、高水平训练的高层次人才.专业学位教育的突出特点是学术型与职业性紧密结合,获得专业学位的人,主要不是从事学术研究,而是从事具有明显职业背景的工作,如工程师、医师、教师、律师、会计师等.专业学位与学术型学位在培养目标上各自有明确的定位,因此,在教学方法、教学内容、授予学位的标准和要求等方面均有所不同.

我国自 1991 年开始实行专业学位教育制度以来,经过二十多年的建设,专业学位教育发展迅速,取得了显著成绩.到 2009 年,我国已设置了法律硕士,教育硕士、博士,工程硕士,建筑学学士、硕士,临床医学硕士、博士,工商管理硕士,农业推广硕士,兽医硕士、博士,公共管理硕士,口腔医学硕士、博士,公共卫生硕士,军事硕士,会计硕士,体育硕士,艺术硕士,风景园林硕士,汉语国际教育硕士,翻译硕士,社会工作硕士等 19 种专业学位,基本形成了以硕士学位为主,博士、硕士、学士三个学位层次并举的专业学位体系.截至 2008 年上半年,我国专业学位教育已累计招生 86.5 万人,其中学历教育招生 24.6 万人,占专业学位总体招生数的 28.4%;在职攻读招生 61.9 万人,占专业学位总体招生数的 71.6%.目前我国参与专业学位教育的院校有 431 个,占我国博、硕士学位授权单位总数的 60%.可以说,我国已经初步建立了具有中国特色的专业学位教育制度,为社会主义现代化建设培养了大量高层次、应用型专门人才.

由于在 1999 年以前,我国硕士研究生规模较小,而且主要是为教学科研岗位培养学术型人才,因此,当时的专业学位教育主要针对的是已经工作的在职人员,满足他们在职提高的要求.为此,国务院学位委员会开通了在职人员攻读专业学位教育的渠道,实施非全日制培养,大大满足了社会在职人员学习提高的愿望.近年来,随着我国经济社会的快速发展,职业分化愈来愈细,职业种类愈来愈多,技术含量愈来愈高,社会在管理、工程、建

筑、法律、财经、教育、农业等专业领域对高级专门人才的需求越来越强烈，专业学位教育所具有的职业性、复合性、应用性的特征也逐渐地为社会各界所认识；与此同时，从全日制硕士研究生的就业趋势来看，更大量的是走向社会实际领域. 因此，专业学位教育不仅仅要满足现有在职人员的需要，更重要的是要吸引优秀生源，面向应届本科毕业生，实施全日制学习方式，培养实践部门需要的应用型人才.

为适应我国当前社会经济形势对研究生教育结构转变的需要，国家教育部决定从2009年开始，除工商管理硕士(MBA)、公共管理硕士(MPA)、工程硕士的项目管理方向、公共卫生硕士、体育硕士的竞赛组织方向等管理类专业和少数目前不适宜应届毕业生就读的专业学位外，其他专业学位均面向应届毕业生招收专业学位研究生，实行全日制培养. 随着一系列政策的出台，全日制硕士研究生教育将逐渐从以培养学术型人才为主向以培养应用型人才为主转变，实现研究生教育结构的历史性转型和战略性调整. 而从专业学位招生和培养模式上，也逐步形成了较为完善的两种格局：一是吸引包括应届毕业生在内的考生，参加硕士生全国统一入学考试，采取全日制学习方式，培养实践部门需要的应用型人才；二是面向广大在职人员，参加非全日制硕士专业学位全国联考，采取非全日制学习方式，实现在职人员在职深造、终身学习的目的和愿望.

从世界研究生教育发展趋势和我国研究生教育发展的现实出发，专业学位研究生教育是今后一个时期国家大力扶持和积极引导的发展重点. 目前，随着体制、机制的进一步建立健全，专业学位研究生教育必然会迎来一个快速发展的春天，也必然会在全面推进我国社会主义现代化建设事业的进程中发挥越来越重要的积极作用.

**全日制硕士研究生专业学位类别及代码表**

| 序号 | 代码 | 学位类别 | 序号 | 代码 | 学位类别 | 序号 | 代码 | 学位类别 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0257 | 审计硕士 | 14 | 0951 | 农业推广硕士 | 27 | 1052 | 口腔医学硕士 |
| 2 | 1251 | 工商管理硕士 | 15 | 0551 | 艺术硕士 | 28 | 0554 | 出版硕士 |
| 3 | 1151 | 军事硕士 | 16 | 0254 | 国际商务硕士 | 29 | 0353 | 警务硕士 |
| 4 | 0953 | 风景园林硕士 | 17 | 1054 | 护理硕士 | 30 | 0251 | 金融硕士 |
| 5 | 0553 | 新闻传播硕士 | 18 | 0853 | 城市规划硕士 | 31 | 0352 | 社会工作硕士 |
| 6 | 0256 | 资产评估硕士 | 19 | 0452 | 体育硕士 | 32 | 1252 | 公共管理硕士 |
| 7 | 1056 | 中药学硕士 | 20 | 0253 | 税务硕士 | 33 | 1051 | 临床医学硕士 |
| 8 | 0952 | 兽医硕士 | 21 | 0252 | 应用统计硕士 | 34 | 0651 | 文物与博物馆硕士 |
| 9 | 0454 | 应用心理硕士 | 22 | 1254 | 旅游管理硕士 | 35 | 0451 | 教育硕士 |
| 10 | 1253 | 保险硕士 | 23 | 1053 | 公共卫生硕士 | 36 | 1253 | 会计硕士 |
| 11 | 0851 | 建筑学硕士 | 24 | 0852 | 工程硕士 | 37 | 0954 | 林业硕士 |
| 12 | 1256 | 工程管理硕士 | 25 | 0453 | 汉语国际教育硕士 | 38 | 0552 | 翻译硕士 |
| 13 | 1055 | 药学硕士 | 26 | 1255 | 图书情报硕士 | 39 | 0351 | 法律硕士 |

## 二、学术型硕士与专业型硕士的区别

二者都是采取全日制攻读的方式，其区别主要有两点：

培养目标不同：专业学位是培养在某一专业（或职业）领域具有坚实的基础理论和宽广的专业知识，具有较强的解决实际问题的能力，能够承担专业技术或管理工作，具有良好职业素养的高层次应用型专门人才. 学术型学位硕士研究生则主要是培养学术研究人才.

培养方式不同：专业学位课程设置以实际应用为导向，以职业需求为目标，以综合素养、应用知识与能力的提高为核心. 教学内容强调理论性与应用性课程的有机结合，突出案例分析和实践研究；教学过程重视运用团队学习、案例分析、现场研究、模拟训练等方法；注重培养学生研究实践问题的意识和能力. 在具体的学习过程中，要求有为期至少半年（应届本科毕业生实践教学时间原则上不少于 1 年）的实践环节. 而学术学位研究生的课程设置侧重于加强基础理论的学习，重点培养学生从事科学研究创新工作的能力和素质.

## 三、管理类专业硕士初试简介

为了适应国家经济建设和社会发展对高层次应用人才的需求，增强研究生教育服务经济社会发展的能力，2009 年教育部决定，研究生培养分为：学术型和专业型两类，MBA 纳入专业学位系列，从 2010 年开始，我国将工商管理（MBA）、公共管理（MPA）、会计（MPACC）专业学位研究生招生初试的试题合并，统称为“管理类专业硕士学位入学考试”. 鉴于取得的巨大成功，2011 年将此考试模式扩大至旅游管理（MTA）、工程管理（MEM）、图书情报（MLIS）专业硕士，2012 年继续扩大规模，又增加审计硕士（MAUD）.

初试分为英语和综合，英语满分 100 分，综合满分为 200 分，初试总分 300.

| 科目 | 数学 | 逻辑 | 写作 | 204—英语 2 |
|---|---|---|---|---|
| 分值 | 75 分 | 60 分 | 65 分 | 100 分 |
| 题量 | 15 个问题求解＋10 个充分性判断（选择题），合计 25 个题，每题 3 分 | 30 个五选一的选择题（每题 2 分） | 1. 论证有效性分析（600 字）占 30 分<br>2. 论说文（700 字）占 35 分 | 完形（10），阅读（40），翻译（15），新题型（10），作文（25），共占 100 分，无听力 |
| 考试时间 | 60 分钟 | 50 分钟 | 60 分钟 | 3 小时 |
| 单题用时 | 2.4 分钟/题 | 1 分 40 秒/个 | 2.8 秒/字 | / |

## 四、什么是充分性判断题目

所有充分性判断题的 A、B、C、D、E 五个选项所规定的含义，均以下列呈述为准，即

A. 条件(1)充分，但条件(2)不充分；

B. 条件(2)充分，但条件(1)不充分；

C. 条件(1)和(2)单独都不充分，但条件(1)和(2)联合起来充分；

D. 条件(1)充分，条件(2)也充分；

E. 条件(1)和(2)单独都不充分，条件(1)和(2)联合起来也不充分.

**1. 什么是充分性?**

如果命题 $p$ 和命题 $q$ 是相互独立的，对于满足命题 $p$ 的每一种情况都满足 $q$，无一例外，我们称命题 $p$ 对命题 $q$ 是充分的，记为 $p \Rightarrow q$.

判断充分性常用方法：利用集合的包含关系，逻辑推理(定理，公式，定义，概念，真命题，性质)，演绎推理(计算的形式)，反证法.

**2. 什么是不充分?**

如果命题 $p$ 和命题 $q$ 是相互独立的，存在满足命题 $p$ 的某一种情况不满足 $q$，以偏概全，我们称命题 $p$ 对命题 $q$ 是不充分的.

判断不充分性常用几种方法：利用集合的不包含关系，逻辑推理(不满足某些定理，公式，定义，概念，真命题，性质)，找反例，信息量不全.

**3. 总体策略**

(1) **分析法**：特点是题干中结论长，文字较多!

从题干中结论出发结合题干中的条件把题干中结论等价转化成数学语言，执果索因，往条件上去靠拢，然后看哪个条件适合，根据规则选出答案即可!

**例如** 设 $a,b$ 是实数，则关于 $x$ 的二次方程 $(a^2+1)x^2+2(a+b)x+b^2+1=0$ 具有重根.

(1) $a,1,b$ 等差　　　　(2) $a,1,b$ 等比

**【答案】** B

**【解析】** 根据题干，$(a^2+1)x^2+2(a+b)x+b^2+1=0$ 具有重根等价于 $\Delta=0$，所以选 B.

(2) **综合法**：特点是题干中结论短，清晰明了!

从题目中所给的条件 1)或条件 2)出发，执因索果直接推导题干中所陈述的结论! 然后进行判断，根据规则选出来即可!

**例如** (2014 年 10 月)$m^2-n^2$ 是 4 的倍数.

(1) $m,n$ 都是奇数　　　　(2) $m$ 是偶数，$n$ 是大于 2 的质数

**【答案】** A

**【解析】** 对于(1)$m^2-n^2=(m+n)(m-n)$是 4 的倍数，对于(2)$n$ 是奇数，$m^2-n^2=(m+n)(m-n)$是奇数，显然不充分，所以选 A.

## 199—管理类联考数学考点与题型清单

1. 质数与合数　2. 奇数与偶数　3. 循环小数化分数　4. 绝对值　5. 比与比例　6. 平均值定理　7. 等比定理与合比定理　8. 整除　9. 取整函数　10. 最大公约数与最小公倍数　11. 有理数与无理数　12. 集合包含关系判断充分性　13. 反证法判断充分性　14. 裂项求和　15. 成本利润售价计算　16. 股票买卖　17. 称量问题　18. 增长率与下降率　19. 平均增长率(复利)　20. 整体代入法解应用题　21. 盈亏模型　22. 分期付款(等额本金和等额本息)　23. 统一比例技巧　24. 数字遗传技巧　25. 反比例函数　26. 调配问题　27. 最值问题　28. 非负性求最值问题　29. 因式定理　30. 余式定理　31. 一次因式验根法　32. 二项式定理　33. 待定系数法　34. 双十字相乘法　35. 乘法公式考法汇总　36. 表达式化简汇总　37. 效率特值法　38. 交替工作问题　39. 牛吃草问题　40. $v_1 \cdot v_2 = \frac{s \cdot \Delta V}{\Delta T}$　41. 最优分配　42. 抽屉原理(Ⅰ)　43. 调和平均数　44. 还原问题　45. 柯西不等式　46. 同余定理　47. 带余除法定理　48. 龟兔赛跑　49. 相遇问题型　50. 追及问题　51. 行船流水问题汇总　52. 过桥问题汇总　53. 稀释,蒸发,加浓问题　54. 浓度混合　55. 十字交叉法　56. 溶液置换问题　57. 等量蒸发问题　58. 等量交换问题　59. 浓度混合公式的应用汇总　60. 植树问题　61. 年龄问题(同步增长与差值恒定)　62. 分段计费问题(电费,水费,邮费,话费,个人所得税,销售提成的算法,技巧:构造一次函数求解)　63. 集合问题　64. 不定的方程问题(范围,整除,奇偶,尾数)　65. 与数列结合的应用题　66. 与方程组结合的应用题　67. 线性规划(几何与应用题)　68. 抽屉原理(Ⅱ)　69. 二次函数求最值与应用题结合　70. 均值定理与应用题结合　71. 周期性问题　72. 循环赛问题　73. 指数函数与对数函数　74. 二次函数(图像,性质,对称轴,顶点坐标,开口方向,配方求最值)　75. 一元二次方程根的判别式　76. 根的分布问题(四种经典情形和几种非经典情形)　77. 整数根与有理根　78. 恒成立问题　79. 公共根问题　80. 韦达定理　81. 二次不等式与二次方程关系　82. 二次函数的复合函数　83. 超越方程的解法(换元法)　84. 二次函数加绝对值　85. 分式方程排除增根　86. 分式不等式　87. 无理不等式解法　88. 含绝对值不等式　89. 高次不等式(穿线法)　90. 不等式基本性质　91. 等差数列的基本公式和结论　92. 等差数列的重要性质　93. 万能公式　94. 递推公式法汇总(五种模型)　95. 等比数列基本公式和结论　96. 无穷递缩等比数列求和公式　97. 数列中的最值问题　98. 三角形三边关系、三角关系和边角关系　99. 三角形面积公式(5个)　100. 相似与全等　101. 直角三角形　102. 等边三角形　103. 燕尾定理　104. 鸟头定理　105. 同底等高定理角平分线定理　106. 割补法汇总　107. 面积差求面积　108. 平移旋转轴对称　109. 扇形面积和弧长计算　110. 圆的定理　111. 梯形相关知识　112. 平行四边形性质　113. 矩形和菱形性质　114. 一般四边形性质(面积关系,中点四

边形性质，等方四边形，四边形燕尾定理） 115. 动点问题和坐标系 116. 定比分点坐标公式（中点坐标公式） 117. 斜率 118. 直线方程四种方式 119. 圆方程 120. 直线与直线位置关系（平行，重合，相交、垂直的判断） 121. 直线与圆的位置关系 122. 快速求切线（切点在圆上和圆外） 123. 对称点求法 124. 直线系和曲线系列 125. 圆和圆的位置关系 126. 解析几何中的最值问题归纳 127. 两圆公共弦方程求法 128. 到角公式与夹角公式 129. 点到直线距离公式 130. 两点间距离公式与两平行线之间距离公式 131. 点与圆以及直线的位置关系 132. 乘法原理与加法原理 133. 排列与组合的概念 134. 排列数与组合数的性质 135. 打包问题 136. 插孔问题 137. 隔板法 138. 分房 139. 圆排 140. 错排 141. 分类与分步 142. 分组问题 143. 定序 144. 数字问题 145. 染色公式 146. 穷举相关题型 147. 一次取球概率 148. 有放回与无放回概率求法 149. 概率中的分房模型 150. 概率中的分组模型 151. 概率中的穷举 152. 独立事件的公式法 153. 对立事件分类法（与互斥结合） 154. 独立事件的对立面法 155. 几何概型 156. 伯努力模型（① $n$ 次独立重复实验中恰好发生 $k$ 次；② 直到 $n$ 次独立重复实验，才发生 $k$ 次；③ 直到 $n$ 次才首次发生；④ $n$ 次独立重复实验中至少发生 $k$ 次） 157. 平均数众数与中位数 158. 方差、极差、标准差的计算方法 159. 直方图与饼图 160. 长方体（表面积，体积，体对角线，棱长之和） 161. 圆柱（圆柱体积，表面积，侧面展开） 162. 棱柱 163. 球体（表面积公式，体积公式） 164. 空间几何体的组合考法

# 第一章　实数　平均值　绝对值

**【大纲考点】**

1. 无理数与有理数的运算性质；
2. 循环小数化为分数的方法；
3. 质数与合数的性质；
4. 奇数和偶数；
5. 数字的整除特征和取整函数；
6. 绝对值的定义和性质；
7. 比的性质和等比定理以及正比与反比的概念；
8. 平均值和平均值定理；
9. 最小公倍数和最大公约数的计算和应用.

## 一、基本概念

**1. 数的概念与性质**

**自然数 N**:0,1,2,3…

**整数 Z**:…,−2,−1,0,1,2,…

**分数**:将单位 1 平均分成若干份,表示这样一份或几份的数叫作分数.

**百分数**:表示一个数是另外一个数的百分之几的数叫作百分数,通常用“%”表示.

**倍数、约数**:当 $a$ 能被 $b$ 整除时,称 $a$ 是 $b$ 的倍数,$b$ 是 $a$ 的约数.

**质数**:如果大于 1 的正整数,只能被 1 和本身整除(只有 1 和其本身两个约数),那么这个正整数叫作质数(质数也称素数).

**合数**:一个正整数除了能被 1 和其本身整除以外,还能被其他的正整数整除,这样的正整数叫作合数.

**质数与合数的性质**:

(1) 质数与合数都在正整数的范围,且有无数个.

(2) 2 是唯一的既是质数又是偶数的整数,即是唯一的偶质数. 大于 2 的质数必为奇数. 质数中只有一个偶数 2,最小的质数为 2.

(3) 若质数 $p$ 是 $a \cdot b$ 的约数,则 $p$ 是 $a$ 的约数或者 $p$ 是 $b$ 的约数.

(4) 若正整数 $a,b$ 的积是质数 $p$，则必有 $a=p$ 或 $b=p$.

(5) 1既不是质数也不是合数.

(6) 若果两个质数的和或差是奇数，那么其中必有一个数是2，如果两个质数的积是偶数，则其中也必有一个是2.

(7) 最小的合数是4，任何合数都可以写成几个质数的积，能写成几个质数的积的正整数就是合数.

(8) 正因子定理：若 $A$ 是合数，且 $A=a_1^{m_1}\cdot a_2^{m_2}\cdot\cdots\cdot a_s^{m_s}$，其中 $a_i$ 为不同质数，$m_i$ 为不同自然数. $i=1,2,3,\cdots,s$，则 $A$ 一定有 $(m_1+1)(m_2+1)\cdots(m_s+1)$ 个正因数.

**互质数**：公约数只有1的两个数称为互质数.

**奇数**：不能被2整除的整数叫奇数，如 $-1,1,3,\cdots$ 记为 $2n+1$（$n$ 是整数）.

**偶数**：能被2整除的整数叫偶数，如 $-2,0,2,4,\cdots$ 记为 $2n$（$n$ 是整数）.

**运算性质**：奇数±奇数=偶数，奇数±偶数=奇数，偶数±偶数=偶数，
奇数×奇数=奇数，奇数×偶数=偶数，偶数×偶数=偶数.

**重要结论**：(1) 有限个偶数数相加是偶数，偶数个奇数相加是偶数.
(2) 奇数个奇数相加是奇数，有限个奇数相乘是奇数.
(3) 两个相邻整数必为一奇一偶.
(4) 两个自然数相加为奇数必定一奇一偶，两个自然数相加是偶数必然同奇或者同偶.

**2. 有理数与无理数**

有理数是“数与代数”领域中的重要内容之一，在现实生活中有广泛的应用，是继续学习实数、代数式、方程、不等式、直角坐标系、函数、统计等数学内容以及相关学科知识的基础. 数学上，**有理数**是一个整数 $a$ 和一个正整数 $b$ 的比，例如3/8，记为 $\frac{a}{b}$，0也是有理数. 有理数是整数和分数的集合，整数也可看作分母为1的分数. 有理数的小数部分是有限或为无限循环的. 不是有理数的实数称为无理数，即无理数的小数部分是无限不循环的数.

(1) 实数包括有理数和无理数；有理数包括整数和分数.

(2) 有理数的本质是有限小数和无限循环小数；无理数的本质是无限不循环小数.

(3) 有理数+有理数=有理数；有理数+无理数=无理数；有理数×有理数=有理数；有理数×无理数=待定；无理数×无理数=待定，无理数+无理数=待定.

**性质**：若 $a,b,c,d$ 是有理数，$\sqrt{c}$，$\sqrt{d}$ 是无理数，且满足 $a+\sqrt{c}=b+\sqrt{d}$，则 $a=b,c=d$.

**推论**：若 $a,b,c$ 是有理数，$\sqrt{c}$ 是无理数，且满足 $a+b\sqrt{c}=0$，则 $a=b=0$.

**3. 数字的整除特征**

(1) 如果 $a,b$ 能被 $c$ 整除，则他们的和差也能被 $c$ 整除.

(2) 如果 $b,c$ 的乘积能整除 $a$，则 $b$ 能整除 $a$，$c$ 也能整除 $a$.

(3) 如果 $b,c$ 分别都能整除 $a$，且 $b,c$ 互质，则 $b,c$ 的乘积能整除 $a$.

(4) 如果 $a$ 能整除 $b$，$b$ 能整除 $c$，则 $a$ 能整除 $c$.

(5) 常见数字的整除特征：

**能被 2 整除的数**：个位上的数能被 2 整除(偶数都能被 2 整除)，那么这个数能被 2 整除.

**能被 3 整除的数**：各个数位上的数字和能被 3 整除，那么这个数能被 3 整除.

**能被 4 整除的数**：个位和十位所组成的两位数能被 4 整除，那么这个数能被 4 整除.

**能被 5 整除的数**：个位上的数都能被 5 整除(即个位为 0 或 5)那么这个数能被 5 整除.

**能被 6 整除的数**：如果一个数既能被 2 整除又能被 3 整除，那么这个数能被 6 整除.

**能被 7 整除的数**：若一个整数的个位数字截去，再从余下的数中，减去个位数的 2 倍，如果差是 7 的倍数，则原数能被 7 整除(割尾法).

**能被 8 整除的数**：百位、十位和个位所组成的三位数能被 8 整除，那么这个数能被 8 整除.

**能被 9 整除的数**：各个数位上的数字和能被 9 整除，那么这个数能被 9 整除.

**能被 10 整除的数**：个位数为零.

**能被 11 整除的数**：奇数位(从左往右数)上的数字和与偶数位上的数字和之差(大数减小数)能被 11 整除，则该数就能被 11 整除.

**能被 12 整除的数**：若一个整数能被 3 和 4 整除，则这个数能被 12 整除.

(6) **重要结论**：连续 $k$ 个自然数相乘一定是 $k!$ 的倍数.

(7) **同余定理**：若 $m=k_1a+r=k_2b+r=k_3c+r$，则 $m=k[a,b,c]+r$，其中$[a,b,c]$代表三个数的最小公倍数.

(8) **带余除法定理**：对于任意的正整数 $m,n$ 都唯一地存在另外两个整数 $q$ 与 $r$ 与之对应，使得 $m=qn+r$，其中 $m$ 为被除数，$n$ 为除数，$q$ 为商，$r$ 为余数，$0\leqslant r<n$.

**注意**：此定理又称为余数定理.

**4. 比和比例的概念**

**比**：两个数相除，又称为这两个数的比，即 $a:b=a/b$，其中 $a$ 叫作比的前项，$b$ 叫作比的后项. 相除所得商叫作比值，记做 $a:b=a/b=k$. 在实际应用中，常将比值表示成百分数，称为百分比.

**比例**：相等的比称为比例，记作 $a:b=c:d$ 或$a/b=c/d$. 其中 $a$ 和 $d$ 称为比例外项，$b$ 和$c$ 称为比例内项. 当 $a:b=b:c$ 时，称 $b$ 为$a$ 和$c$ 的比例中项，显然当 $a,b,c$ 均为正数时，$b$ 是$a$ 和$c$ 的几何均值.

**正比**：若 $y=kx$($k$ 不为零)，则称 $y$ 与 $x$ 成正比，$k$ 称为比例系数.

并不是 $x$ 和 $y$ 同时增大或减小才称为正比. 比如当 $k<10$ 时，$x$ 增大时，$y$ 反而减小.

**反比**：若 $y=k/x$($k$ 不为零)，则称 $y$ 与 $x$ 成反比，$k$ 为比例系数.

**几个重要关系**：

原值 $a \xrightarrow{\text{增长了 } p\%}$ 现值 $a(1+p\%)$.

原值 $a \xrightarrow{\text{减少了 } p\%}$ 现值 $a(1-p\%)$.

甲比乙大 $p\% \Leftrightarrow \frac{\text{甲}-\text{乙}}{\text{乙}}=p\%$.

甲是乙的 $p\% \Leftrightarrow \text{甲}=\text{乙}\cdot p\%$.

**注意:** 甲比乙大 $p\%$ 不等于乙比甲小 $p\%$,不要混淆.先减小 $p\%$,再增加 $p\%$ 并不能等于原数值.

**比例的基本性质:**

(1) $a:b=c:d$ 等价于 $ad=bc$.

(2) $a:b=c:d$ 等价于 $b:a=d:c$ 等价于 $b:d=a:c$ 等价于 $d:b=c:a$.

**重要定理:**

(1) 更比定理: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{c}=\frac{b}{d}$.

(2) 反比定理: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{b}{a}=\frac{d}{c}$.

(3) 合比定理: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$.

(4) 分比定理: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$.

(5) 等比定理: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{a+c+e}{b+d+f}$.

**增减性变化关系($a,b,m>0$):**

若 $\frac{a}{b}>1$,则 $\frac{a+m}{b+m}<\frac{a}{b}$,反之不一定成立;

若 $0<\frac{a}{b}<1$,则 $\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}$,反之不一定成立.

**5. 绝对值**

(1) **绝对值的性质:**

① 非负性: $|a|\geqslant 0$

② 对称性: $|a|=|-a|$

③ 等价性: $\sqrt{a^2}=|a|$, $|a|^2=a^2$

④ 自比性: $-|a|\leqslant a\leqslant |a|$,推广: $\frac{|x|}{x}=\frac{x}{|x|}=\begin{cases}1, x>0,\\ -1, x<0.\end{cases}$

(2) **三角不等式:** $||a|-|b||\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|$

(3) 掌握绝对值的几何意义:碗底函数,楼梯函数,大 $Z$ 函数的图像,头肩底函数,零点,最值得求法,单调性.

**碗底函数:** $|x-a|+|x-b|$ 最小值为 $|b-a|$.

**楼梯函数:** $|x-a|-|x-b|$ 最大值为 $|b-a|$,最小值为 $-|b-a|$.

**头肩底函数:** $|x-a|+|x-b|+|x-c|$ 最小值为 $f(b)(a<b<c)$.

**6. 算术平均数与几何平均数**

**算术平均数**：对于 $n$ 个实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的算术平均值 $\overline{x}=\dfrac{x_1+x_2+\cdots x_n}{n}$.

**几何平均值**：对于 $n$ 个正实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的几何平均值 $G=\sqrt[n]{x_1,x_2,\cdots x_n}$.

**平均值定理**：对于 $n$ 个正实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，总有 $\dfrac{x_1+x_2+\cdots x_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n}$（当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 等号成立），也即 $\left(\dfrac{x_1+x_2+\cdots x_n}{n}\right)^n\geqslant x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n$（当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 等号成立）.

**均值定理口诀**：一正，二定，三相等.

(1) 对于 $n$ 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，如果乘积有定值，和有最小值. 此时，当 $n$ 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 差异越小，和越小，当 $n$ 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 差异越大，和越大.

(2) 对于 $n$ 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，如果和有定值，乘积有最大值. 当 $n$ 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 差异越小，乘积越大，当 $n$ 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 差异越大，乘积越小.

**二元平均值定理**（$a>0,b>0$）：

$\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$，当 $a=b$ 时取等号；$\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2\geqslant ab$，当 $a=b$ 时取等号.

$\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\geqslant 2$，当 $a=b$ 时候取等号；$x+\dfrac{1}{x}\geqslant 2$，当 $x=1$ 时取等号.

**三元平均值定理**（$a>0,b>0,c>0$）：

$\dfrac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$，当 $a=b=c$ 时取等号；$\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^3\geqslant abc$ 当 $a=b=c$ 时取等号.

$\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{b}+\dfrac{a}{c}\geqslant 3$，当 $a=b=c$ 时候取等号；$2x+\dfrac{1}{x^2}\geqslant 3$，当 $x=1$ 时取等号.

**7. 化循环小数为分数的方法**

**纯小数**：整数部分是零的小数，例如 0.807、0.99、0.015 都是纯小数，纯小数小于 1.

**混小数**：整数部分不是 0 的小数为“混小数”，或称为“带小数”. 例如，1.234.

**纯循环小数**：循环节从十分位开始的小数.

**混循环小数**：循环节不从十分位开始的小数.

**纯循环小数化分数公式**：$0.\dot{a}b\dot{c}=\dfrac{abc}{999}$；$0.\dot{a}bc\dot{d}=\dfrac{abcd}{9999}$；$0.a\dot{b}\dot{c}=\dfrac{abc-a}{990}$；$0.ab\dot{c}=\dfrac{abc-ab}{900}$.

**混循环小数化分数法则**：分母——小数点后面有几位循环节分母上就先写几个 9，剩下的数位用 0 来补充；分子——用所有的小数数位减去不循环的部分作为分子.

**8. 最大公约数**

最大公约数也称最大公因数、最大公因子，指两个或多个整数共有约数中最大的一个. $a,b$ 的最大公约数记为 $(a,b)$，同样地，$a,b,c$ 的最大公约数记为 $(a,b,c)$，多个整数的最大公约数也有同样的记号. 求最大公约数有多种方法，常见的有质因数分解法、短除法. 与最大公约数相对应的概念是最小公倍数，$a,b$ 的最小公倍数记为 $[a,b]$.

**性质**：$a,b$ 是任意两个正整数则有：

(1) $a,b$ 的所有公倍数就是$[a,b]$的所有倍数，即若 $a|d,b|d$，$\Rightarrow [a,b]|d$.

(2) $(a,b)[a,b]=ab$；$\left(\frac{a}{(a,b)},\frac{b}{(a,b)}\right)=1$.

(3) 如果 $a=(a,b)k_1,b=(a,b)k_2$，则$(k_1,k_2)=1$，且$[a,b]=(a,b)k_1k_2$.

**9. 取整函数**

整数部分的表示方法：$[x]$表示 $x$ 的整数部分，即不超过 $x$ 的最大整数.

**注意**：任何实数都可以取整.

**性质(1)**　一个整数的整数部分是它本身；

**性质(2)**　$n\in\mathbf{Z},x\in\mathbf{R}$，则有$[x+n]=n+[x]$；

**性质(3)**　对任意 $x\in\mathbf{R}$，均有 $x-1<[x]\leqslant x<[x]+1$.

**性质(4)**　对任意 $x\in\mathbf{R}$，$[x]+[-x]=\begin{cases}0, & x\in\mathbf{Z},\\ -1, & x\notin\mathbf{Z}.\end{cases}$

## 二、本章题型汇总

**【题型 1】　奇数与偶数的运算性质**

1. $M$ 是一个奇数，$N$ 是一个偶数，下面________的值一定是奇数.　(　　)

A. $4M+3N$　B. $3M+2N$　C. $2M+7N$　D. $2(M+N)$　E. $MN$

**【答案】**　B

**【解析】**　本题考查奇数和偶数的运算性质，奇数乘以奇数还是奇数，偶数乘以奇数是偶数，奇数加上奇数是偶数，奇数加上偶数是奇数，所以选 B.

**注意**：本题也可以采取特值法，如 $M=3,N=5$.

2. $a,m$ 均是正整数，且$(a-m+1)(a+m+1)=8$，则 $a$ 是多少？　(　　)

A. 2　B. 4　C. 6　D. 8　E. 7

**【答案】**　A

**【解析】**　由于$(a-m+1)+(a+m+1)=2a+2$ 为偶数，所以 $a-m+1$ 和 $a+m+1$ 同时为奇数或者同时为偶数，又因为 $a,m$ 都是正整数，则$\begin{cases}a-m+1=2\\ a+m+1=4\end{cases}$，所以 $a=2$.

**注意**：若两个自然数相加是偶数，则这两个自然一定同奇或同偶.

3. 某市举办小学生数学竞赛，共 30 道试题，评分标准是基础分 15 分，答对一题给 5 分，不答一题给 1 分，答错一题倒扣 1 分，如果 199 人参赛，问参赛的同学的总得分一定是　(　　)

A. 奇数　B. 偶数　C. 合数　D. 质数　E. 无法判断

**【答案】**　A

**【解析】**　如每一人全做对可得 $15+5\times30=165$，即总分是奇数，若错一题要从中扣