时代云图 SHI DAI YUN TU

2019 专业硕士联考系列

经济类联考综合能力

题源探析经典1000题

—— 数学 ——

（解析分册）

主编：仲毅 朱杰

- 探究题源，层层筛选，总结各类题的解法
- 特设老师提示模块，详尽解析，轻松应试

适用专业

- 经济类联考（396科目）

金融/应用统计/税务/国际商务/保险/资产评估

中国政法大学出版社

时代云图 SHI DAI YUN TU

专业硕士联考系列

经济类联考综合能力

题源探析经典1000题

—数学—

（解析分册）

主编：仲毅 朱杰

中国政法大学出版社

2018·北京

图书在版编目（CIP）数据

经济类联考综合能力•题源探析经典 1000 题. 数学/仲毅，朱杰主编. —北京：中国政法大学出版社，2018.5
ISBN 978-7-5620-8263-7

Ⅰ.①经… Ⅱ.①仲… ②朱… Ⅲ.①高等数学—研究生—入学考试—习题集 Ⅳ.①G643-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 099932 号

出版者	中国政法大学出版社
地　　址	北京市海淀区西土城路 25 号
邮寄地址	北京 100088 信箱 8034 分箱　邮编 100088
网　　址	http://www.cuplpress.com（网络实名：中国政法大学出版社）
电　　话	010-58908285(总编室) 58908433（编辑部）58908334(邮购部)
承　　印	三河市文阁印刷有限公司
开　　本	787mm×1092mm　1/16
印　　张	20.75
字　　数	518 千字
版　　次	2018 年 5 月第 1 版
印　　次	2018 年 5 月第 1 次印刷
定　　价	59.80 元

目　录

第一章　极限与连续

第一节　单项选择题

1.【参考答案】D

【答案解析】对于 A,C,由收敛数列的子列的性质:若数列$\{x_n\}$收敛于 a,则其任意一个子列$\{x_{n_i}\}$也收敛,且极限为 a. 可知 A,C 正确.

对于 B,由数列极限的性质:若$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=a$,且$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,可知 B 正确.

对于 D,举反例,考查

$$x_n=\begin{cases}1, & n=3k,\\ 1, & n=3k+1,\\ 2, & n=3k+2,\end{cases}$$

其中 $k=1,2,\cdots$,易见$\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n}=1$,$\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n+1}=1$,$\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n+2}=2$,因此$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$不存在,即D不正确. 故选 D.

2.【参考答案】C

【答案解析】对照数列极限的定义:对任意给定的 $\varepsilon_1>0$,总存在正整数 N_1,当 $n>N_1$ 时,恒有 $|x_n-a|<\varepsilon_1$,则称数列$\{x_n\}$收敛于a. 仔细分析题设条件知命题的提法与定义相比要强些,但实质是等价的,由定义可知,对任意给定 $\varepsilon_1>0$,必定存在正整数 N_1,当 $n>N_1$ 时,总有 $|x_n-a|<\varepsilon_1$. 取 $\varepsilon_1=\dfrac{\varepsilon}{3}$,$N_1=N$. 故选 C.

3.【参考答案】D

【答案解析】极限的概念是描述在给定过程中函数(数列)变化的性态,数列极限存在与否与其前有限项的值无关,因此可以排除 A,B.

极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$为"$0\cdot\infty$"型极限,为未定型,可知应排除 C.

由排除法选 D.

4.【参考答案】D

【答案解析】由题设可知

$$\lim_{k\to\infty}x_{2k}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2k}=0,\lim_{k\to\infty}x_{2k-1}=\lim_{k\to\infty}\frac{(2k-1)^2+\sqrt{2k-1}}{2k-1}=\infty,$$

所以 x_n 不是无穷大量,不是无穷小量,也不是有界变量,是无界变量,故选 D.

5.【参考答案】D

【答案解析】注意题设条件与夹逼准则不同,夹逼准则中条件为当 $|x|>M$时:(1)$\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$;(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)=A$,$\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=A$. 则$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.($\lim\limits_{x\to\infty}g(x)$与$\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)$都存在!)而本题条件为$\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$并不能保证$\lim\limits_{x\to\infty}g(x)$与$\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)$都存在. 例如 $g(x)=\sqrt{x^2+3}$,$\varphi(x)=\sqrt{x^2-1}$,$f(x)=\sqrt{x^2+1}$符合本题条件,但$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$不存在. 而取 $g(x)=\dfrac{1}{x+1}$,$\varphi(x)=\dfrac{1}{x+3}$,$f(x)=\dfrac{1}{x+2}$也符合本题条件,有$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$,故选 D.

6.【参考答案】C

【答案解析】当 $x \to 0$ 时,x 为无穷小量,$\sin \dfrac{1}{x}$ 为有界变量,由于无穷小量与有界变量之积仍为无穷小量,因此$\lim\limits_{x \to 0} x\sin \dfrac{1}{x} = 0$,可知 A 不正确.

当 $x \to \infty$ 时,$\dfrac{1}{x} \to 0$,因此$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x}\sin x = 0$. 可知 B 不正确.

由重要极限公式$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$,可知 D 不正确.

当 $x \to \infty$ 时,$\dfrac{1}{x} \to 0$,由重要极限公式可得:

$$\lim_{x \to \infty} x\sin \frac{1}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1.$$

可知 C 正确,故选 C.

7.【参考答案】D

【答案解析】由重要极限公式

$$\lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}, \lim_{x \to \infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \mathrm{e},$$

可知 A 不正确,B 不正确.

对于 C,$\lim\limits_{x \to \infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{-x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$,可知 C 不正确.

对于 D,$\lim\limits_{x \to \infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{-x} = \lim\limits_{x \to \infty}\left[1+\left(-\dfrac{1}{x}\right)\right]^{-x} = \mathrm{e}$,可知 D 正确.

故选 D.

【老师提示】$1 \sim 7$ 题都是考查极限的概念或性质,应该特别加以分析. 许多极限运算需依据概念或性质来完成.

8.【参考答案】B

【答案解析】由于极限值为一个确定的数值,因此可设$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = A$,于是

$$f(x) = x^2 + x - 2A.$$

两端同时取 $x \to 1$ 时的极限,有

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1}(x^2 + x - 2A) = 2 - 2A,$$

于是

$$A = 2 - 2A,$$

解得 $A = \dfrac{2}{3}$. 故选 B.

【老师提示】利用极限的概念或性质求极限是一种常见的解题技巧,考生应掌握并会运用. 本题具有代表性.

9.【参考答案】A

【答案解析】令 $x_n = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}$,当 $n = 2k$ 时,

$$\lim_{n \to \infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n} = \lim_{k \to \infty}\left(\frac{2k+1}{2k}\right)^{(-1)^{2k}} = \lim_{k \to \infty} \frac{2k+1}{2k} = 1;$$

当 $n=2k-1$ 时，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{2k-1+1}{2k-1}\right)^{(-1)^{2k-1}}=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{2k}{2k-1}\right)^{-1}=1.$$

可知 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k}=\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k-1}=1$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$，即

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=1.$$

故选 A.

【老师提示】本题利用数列极限的性质：若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}=A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$. 有些考生误认为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}$ 为重要极限形式，从而导致计算错误.

10.【参考答案】D

【答案解析】由于所求极限的函数为分式，且分母的极限与分子的极限都为零，因此不能利用极限的商的运算法则. 又由于其分子中含有根式，故可以先有理化再求极限.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x^2+x-6}&=\lim_{x\to2}\frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2)(x+3)(\sqrt{x+2}+2)}\\&=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{(x-2)(x+3)(\sqrt{x+2}+2)}=\frac{1}{20}.\end{aligned}$$

故选 D.

11.【参考答案】A

【答案解析】当 $x\to4$ 时，分子与分母的极限都为零，不能直接利用极限的商的运算法则. 又由于分子与分母中都含有根式，先有理化再求极限.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x+5}-3}{\sqrt{x}-2}&=\lim_{x\to4}\frac{(\sqrt{x+5}-3)(\sqrt{x+5}+3)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x+5}+3)}\\&=\lim_{x\to4}\frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)}=\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x+5}+3}=\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

故选 A.

12.【参考答案】D

【答案解析】$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}$

$$\begin{aligned}&=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)}{x^2(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)}\\&=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})^2-4}{x^2(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)}=\lim_{x\to0}\frac{2\sqrt{1-x^2}-2}{x^2(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)}\\&=\lim_{x\to0}\frac{2(\sqrt{1-x^2}-1)(\sqrt{1-x^2}+1)}{x^2(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)(\sqrt{1-x^2}+1)}=-\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

故选 D.

13.【参考答案】D

【答案解析】当 $x\to1$ 时，分子与分母的极限皆为零，分子中含有根式，故先有理化再求极限.

原式 $=\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}\cdot\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{1-x}\cdot\cdots\cdot\dfrac{1-\sqrt[n]{x}}{1-x}\right)$

$$=\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1+\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{1+\sqrt[n]{x}+\sqrt[n]{x^2}+\cdots+\sqrt[n]{x^{n-1}}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n!}.$$

故选 D.

14.【参考答案】 B

【答案解析】 $x_n=\dfrac{1-\dfrac{1}{2}}{1-\dfrac{1}{2}}\cdot\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\dfrac{1}{4}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1+\dfrac{1}{2^{2^{n-1}}}\right)$

$$=2\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1+\frac{1}{2^{2^{n-1}}}\right)$$

$$=2\cdot\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{16}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1+\frac{1}{2^{2^{n-1}}}\right)$$

$$=2\cdot\left(1-\frac{1}{2^{2^n}}\right).$$

因此$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$,故选 B.

15.【参考答案】 B

【答案解析】 当 $x\to\infty$ 时,原式分子与分母的极限皆为 ∞,不能利用极限的四则运算法则. 首先分子、分母同乘$\dfrac{1}{x^3}$,得

$$原式=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{3}{x^3}\sin x}{2-\dfrac{3}{5x^3}\cos x}=\frac{1}{2}.$$

故选 B.

【老师提示】 这种运算技巧可以推广到数列极限中.

16.【参考答案】 D

【答案解析】 当 $n\to\infty$ 时,分子与分母的极限皆为 ∞,可以仿上题求解.

$$原式=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\dfrac{5}{n}\right)\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^3}{\left(2+\dfrac{3}{n}\right)^4}=\frac{1}{16}.$$

故选 D.

17.【参考答案】 A

【答案解析】 所给极限为“$\infty-\infty$”型,不能利用极限的四则运算法则,需先变形.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)\left(\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\dfrac{3}{\sqrt{n}}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}}}=2.$$

故选 A.

18.【参考答案】 B

【答案解析】 所给极限为"$\frac{\infty}{\infty}$"型，不能利用极限的四则运算法则，也不能利用洛必达法则求之. 通常对无穷大量运算的基本原则是转化为无穷小量运算.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}\overset{(*)}{=\!=}\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+x+1}{-x\sqrt{1+\frac{\sin x}{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+1+\frac{1}{x}}{-\sqrt{1+\frac{\sin x}{x^2}}}=1.$$

故选 B.

【老师提示】 在上述（*）处，将无穷大量的运算转化为无穷小量的运算.

若（*）处忽略了条件 $x\to-\infty$，得

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+x+1}{x\sqrt{1+\frac{\sin x}{x^2}}}=3,$$

导致计算结果错误. 当 $x\to-\infty$，且 $|x|$ 足够大时，$\sqrt{x^2}=|x|=-x$，这是解题的关键. 相当多的考生在此处出现错误，误答为 3.

19.【参考答案】 B

【答案解析】 设 $t=x-3$，则 $x=t+3$，由题设可得

$$f(t)=2(t+3)^2+(t+3)+2=2t^2+13t+23,$$

即

$$f(x)=2x^2+13x+23.$$

则

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+13x+23}{x^2}=2.$$

故选 B.

【老师提示】 极限公式：当 $a_0b_0\neq0$，m,k 为非负整数时，有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^k+a_1x^{k-1}+\cdots+a_k}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}\frac{a_0}{b_0}, & m=k,\\ 0, & m>k,\\ \infty, & m<k.\end{cases}$$

考生应熟记并会运用. 当 x 换为正整数 n 时，仍有相同的结论，如 16 题.

20.【参考答案】 D

【答案解析】 由于

$$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\frac{x+x^3}{1+x^4}=\frac{x^2\left(\frac{1}{x}+x\right)}{x^2\left(\frac{1}{x^2}+x^2\right)}=\frac{\frac{1}{x}+x}{\left(\frac{1}{x}+x\right)^2-2},$$

因此

$$f(x)=\frac{x}{x^2-2},\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}\frac{x}{x^2-2}=1.$$

故选 D.

21.【参考答案】 B

【答案解析】 注意等价无穷小量公式，当 $x\to0^+$ 时，

$$e^{-\sqrt{x}}-1\sim-\sqrt{x},\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\sim\frac{x}{\sqrt{x}}=\sqrt{x},$$

$$\ln\sqrt{1+x}=\frac{1}{2}\ln(1+x)\sim\frac{1}{2}x,$$

$$\ln(1-\sqrt{x})\sim-\sqrt{x}.$$

故选 B.

【老师提示】 应熟记等价无穷小的几个常用公式：当 $x\to0$ 时，

$$\sin x\sim x,\tan x\sim x,\arcsin x\sim x,\arctan x\sim x,\ln(1+x)\sim x,$$

$$e^x-1\sim x,1-\cos x\sim\frac{x^2}{2},(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x\left(\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x\left(\alpha=\frac{1}{n}\text{时}\right)\right).$$

在极限运算中会经常使用这些公式，从而简化运算.

22.【参考答案】 D

【答案解析】 设 $t=\sin^2x$，则 $|\sin x|=\sin|x|=\sqrt{t}$，$|x|=\arcsin\sqrt{t}$.

因此 $f(\sin^2x)=\dfrac{x^2}{|\sin x|}$ 可化为 $f(t)=\dfrac{(\arcsin\sqrt{t})^2}{\sqrt{t}}$.

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(\arcsin\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}\cdot x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{x\sqrt{x}}=\infty,$$

又
$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{(\arcsin\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{x}}=0,$$

即当 $x\to0$ 时，$f(x)$ 为无穷小量. 因此可知当 $x\to0$ 时，$f(x)$ 为 x 的低阶无穷小量，故选 D.

【老师提示】 判定当 $x\to0$ 时，$f(x)$ 为无穷小量是不可缺少的一步.

23.【参考答案】 C

【答案解析】 当 $x\to0$ 时，x^2 为无穷小量，$\sin\dfrac{1}{x}$ 为有界变量，因此 $\lim\limits_{x\to0}x^2\sin\dfrac{1}{x}$ 为无穷小量.

又
$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

因此
$$\lim_{x\to0}\left(x^2\sin\frac{1}{x}+\frac{\sin x}{x}\right)=1.$$

故选 C.

24.【参考答案】 C

【答案解析】 所给极限为“$\dfrac{0}{0}$”型，不能直接利用极限的四则运算法则. 首先进行等价无穷小代换，再分组，可简化运算.

$$\lim_{x\to0}\frac{5\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(2+\cos x)\ln(1+x)}=\lim_{x\to0}\frac{1}{2+\cos x}\cdot\frac{5\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{x}$$
$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\left(\frac{5\sin x}{x}+x\cos\frac{1}{x}\right)=\frac{5}{3}.$$

故选 C.

25.【参考答案】A

【答案解析】当 $x\to 1$ 时，$x^2-5x+4\to 0$，因此

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x^2-5x+4)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-5x+4}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-4}{x+1}=-\frac{3}{2}.$$

故选 A.

26.【参考答案】D

【答案解析】当 $x\to\infty$ 时，$\frac{3x^2}{x^3+x^2}$ 为无穷小量，因此

$$\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{3x^2}{x^3+x^2}=\lim_{x\to\infty}x\cdot\frac{3x^2}{x^3+x^2}=3.$$

故选 D.

27.【参考答案】C

【答案解析】$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\tan x}-e^{\sin x}}{x^a}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\sin x}\cdot\frac{e^{\tan x-\sin x}-1}{x^a}$

$$=\lim_{x\to 0}e^{\sin x}\cdot\frac{\tan x-\sin x}{x^a}$$

$$=\lim_{x\to 0}e^{\sin x}\cdot\sin x\cdot\frac{\frac{1}{\cos x}-1}{x^a}$$

$$=\lim_{x\to 0}e^{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^{a-1}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^{a-1}}.$$

由题意，知该极限应为不等于零的常数，因此 $a-1=2$，得 $a=3$. 故选 C.

28.【参考答案】C

【答案解析】对于 A，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\arcsin x}{\sqrt{x}}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x\sqrt{x}}=\infty$，可知应排除 A.

对于 B，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，可知 $x\to 0$ 时，$\frac{\sin x}{x}$ 不是无穷小量，应排除 B.

对于 C，

$$\lim_{x\to 0}(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})=0,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=1.$$

可知当 $x\to 0$ 时，$\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$ 与 x 为等价无穷小量，故选 C.

对于 D，当 $x\to 0$ 时，$x\sin\frac{1}{x}$ 为无穷小量，但是 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在，这表明当 $x\to 0$ 时，无穷小量 $x\sin\frac{1}{x}$ 的阶不能与 x 的阶进行比较，因此排除 D.

29.【参考答案】 D

【答案解析】 取点列 $x_n=\dfrac{1}{n\pi}$，则变量值为

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{n\pi}\right)^2}\cdot\sin\frac{1}{\frac{1}{n\pi}}=(n\pi)^2\sin(n\pi)=0,$$

此时变量值为点列 $0,0,\cdots,0,\cdots$.

取点列 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$，则变量值为

$$\frac{1}{\left[\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\right]^2}\cdot\sin\frac{1}{\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}}=\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)^2,$$

此时变量值$\left\{\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)^2\right\}$为无界点列.

综上可知，当 $x\to 0$ 时，变量$\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$ 是无界变量，但不是无穷大量，故选 D.

30.【参考答案】 D

【答案解析】 由于$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2}=4.$

而当 $x\to 2^+$ 时，$\dfrac{1}{x-2}\to+\infty$，$e^{\frac{1}{x-2}}\to+\infty$.

当 $x\to 2^-$ 时，$\dfrac{1}{x-2}\to-\infty$，$e^{\frac{1}{x-2}}\to 0$.

可知$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}e^{\frac{1}{x-2}}$ 不存在，也不为 ∞. 故选 D.

31.【参考答案】 D

【答案解析】 当 $x\to+\infty$ 时，$e^x\to+\infty$，因此

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3+e^x}{2-e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(\frac{3}{e^x}+1\right)}{e^x\left(\frac{2}{e^x}-1\right)}=-1.$$

当 $x\to-\infty$ 时，$e^x\to 0$，因此

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3+e^x}{2-e^x}=\frac{3}{2}.$$

故选 D.

【老师提示】 30，31 题都需考虑两个单边极限，否则必定会出现错误.

32.【参考答案】 B

【答案解析】 需先求出 $f(x)+g(x)$ 的表达式.

$$f(x)+g(x)=\begin{cases}2e^{-x}+b, & x<0,\\ a+b, & 0\leqslant x<1,\\ a+\sin x, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

显然点 $x=0$，$x=1$ 为 $f(x)+g(x)$ 的分段点，在分段点两侧函数表达式不同，应考虑左极限与右极限.

$$\lim_{x\to0^-}[f(x)+g(x)]=\lim_{x\to0^-}(2e^{-x}+b)=2+b,$$

$$\lim_{x\to0^+}[f(x)+g(x)]=\lim_{x\to0^+}(a+b)=a+b.$$

由于 $f(x)+g(x)$ 在点 $x=0$ 处有极限,因此 $a+b=2+b$,可知 $a=2$.

$$\lim_{x\to1^-}[f(x)+g(x)]=\lim_{x\to1^-}(a+b)=a+b,$$

$$\lim_{x\to1^+}[f(x)+g(x)]=\lim_{x\to1^+}(a+\sin x)=a+\sin 1.$$

由于 $f(x)+g(x)$ 在点 $x=1$ 处有极限,因此 $a+b=a+\sin 1$,可知 $b=\sin 1$.
故选 B.

33.【参考答案】 D

【答案解析】 点 $x=0$ 为 $f(x)$ 的分段点,在分段点两侧函数表达式不同,应利用左极限与右极限判定.

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{\sin bx}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{bx}{x}=b,$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

当 $b=e$ 时,$\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 存在,且 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=e$.

由于极限值与函数在该点有无定义无关,因此 a 可以取任意值. 故选 D.

【老师提示】 极限描述了在给定过程中函数变化的性态,它与函数在该点有无定义无关. 忽略这一点必定会出现错误.

34.【参考答案】 B

【答案解析】 点 $x=0$ 为 $f(x)$ 的分段点,在分段点两侧 $f(x)$ 表达式不同,应分左极限、右极限来考虑.

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{e^{\tan x}-1}{\sin\frac{x}{4}}=\lim_{x\to0^-}\frac{\tan x}{\frac{x}{4}}=\lim_{x\to0^-}\frac{x}{\frac{x}{4}}=4,$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}(1+ax)^{\frac{1}{x}}=e^a.$$

由于 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 存在,有 $e^a=4$,从而 $a=\ln 4$. 故选 B.

35.【参考答案】 C

【答案解析】 点 $x=0$ 为 $f(x)$ 的分段点,在分段点两侧 $f(x)$ 表达式不同,应分左极限、右极限考虑.

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^-}\left[\frac{a\left(1+\frac{x}{a}\right)}{a\left(1-\frac{x}{a}\right)}\right]^{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{x}}}{\left(1-\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{x}}}=\frac{\lim\limits_{x\to0^-}\left(1+\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{x}}}{\lim\limits_{x\to0^-}\left(1-\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{x}}}=\frac{e^{\frac{1}{a}}}{e^{\frac{-1}{a}}}=e^{\frac{2}{a}}.$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}(x^2-2x+e)=e.$$

由于 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 存在,则 $e^{\frac{2}{a}}=e$,可得 $a=2$. 故选 C.

【老师提示】 读者可以验证有下列规律:

$$\lim_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{b}{x}+c}=e^{ab}.$$

以后可以用作公式,简化运算.

相仿

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx+c}=e^{ab}.$$

如:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1+\frac{3}{x}}{1-\frac{2}{x}}\right]^{2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x}}{\left(1-\frac{2}{x}\right)^{2x}}=\frac{e^{6}}{e^{-4}}=e^{10}.$$

36.【参考答案】 D

【答案解析】 设 $t=x-1$,则 $x=t+1$. 可得

$$f(t)=\begin{cases}t+2, & t\leqslant -1,\\ (t+1)\sin\frac{1}{t+1}, & t>-1,\end{cases}\text{故 } f(x)=\begin{cases}x+2, & x\leqslant -1,\\ (x+1)\sin\frac{1}{x+1}, & x>-1.\end{cases}$$

$$\lim_{x\to -1^-}f(x)=\lim_{x\to -1^-}(x+2)=1,$$

$$\lim_{x\to -1^+}f(x)=\lim_{x\to -1^+}(x+1)\sin\frac{1}{x+1}.$$

当 $x\to -1^+$ 时,$x+1$ 为无穷小量,$\sin\frac{1}{x+1}$ 为有界变量,可知 $\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=0$.

即当 $x\to -1$ 时,$f(x)$ 的左极限与右极限都存在,但两者不相等,因此当 $x\to -1$ 时,$f(x)$ 的极限不存在. 故选 D.

37.【参考答案】 A

【答案解析】 当 $n\to\infty$ 时,$\cos\frac{2}{n}\to 1$,$e^{\frac{1}{n}}\to 1$,$\sin\frac{1}{n}\sim\frac{1}{n}$. 则

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n\sin\frac{1}{n}\cdot e^{\frac{1}{n}}}{3+\cos\frac{2}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot\frac{1}{n}}{3+1}=\frac{1}{4}.$$

故选 A.

【老师提示】 等价无穷小量代换对数列的情形也适用.

38.【参考答案】 B

【答案解析】 由于 $\ln x$ 在定义域内为连续函数,因此

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left[\frac{n-3na+1}{n(1-3a)}\right]^{n}=\ln\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{n(1-3a)}\right]^{n}=\ln e^{\frac{1}{1-3a}}=\frac{1}{1-3a}.$$

故选 B.

【老师提示】 本题利用了连续函数的性质:设 $y=f[g(x)]$ 为复合函数,由 $y=f(u)$ 与 $u=g(x)$ 复合而成,若 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$ 存在,而 $y=f(u)$ 在 $u=u_0$ 处连续,则有

$$\lim_{x\to x_0}f[g(x)]=f[\lim_{x\to x_0}g(x)]=f(u_0).$$

该性质是求极限的常用方法.

39.【参考答案】 A

【答案解析】 由于 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ax-x\cos x}{\ln(1+x^3)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(a-\cos x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{x^2}=b$,且分母的极限

为零,则必定有分子的极限为零,即

$$\lim_{x\to0}(a-\cos x)=a-1=0,$$

从而得 $a=1$,因此有

$$b=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

故选 A.

【老师提示】本题为极限的反问题. 当分式的极限存在(非零)且分母(或分子)极限为零时,其分子(或分母)的极限必定为零.

40.【参考答案】D

【答案解析】由于在点 $x=0$ 两侧 $f(x)$ 表达式不同,应分左极限、右极限来讨论.

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}(1+3x)^{\frac{1}{2x}}=e^{\frac{3}{2}},$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin bx}{x}=b.$$

由于 $f(0)=a+1$,仅当 $a+1=e^{\frac{3}{2}}=b$ 时,即当 $a=e^{\frac{3}{2}}-1,b=e^{\frac{3}{2}}$ 时,$f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续.

故选 D.

41.【参考答案】D

【答案解析】点 $x=0$ 为 $f(x)$ 的分段点,在 $x=0$ 两侧 $f(x)$ 的表达式不同. 应考查 $f(x)$ 的左极限与右极限.

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}(4+x^2)=4,$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{a\sin x}{x}=a.$$

可知当 $a=4$ 时,$\lim\limits_{x\to0}f(x)=4$,又 $f(0)=4$. 进而可知,当 $a=4$ 时,$x=0$ 为 $f(x)$ 的连续点.

当 $a\neq4$ 时,$x=0$ 为 $f(x)$ 的间断点,且为第一类间断点.

故选 D.

42.【参考答案】A

【答案解析】由题设,点 $x=-1$ 与 $x=1$ 为 $f(x)$ 的分段点,在$(-\infty,-1)$,$(-1,1)$,$(1,+\infty)$内 $f(x)$ 都是初等函数,皆为连续函数. 只需考查 $f(x)$ 在 $x=-1$ 与 $x=1$ 处的连续性.

$$\lim_{x\to-1^-}f(x)=\lim_{x\to-1^-}(-2)=-2,$$

$$\lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{x\to-1^+}(x^2+ax+b)=1-a+b.$$

若 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处连续,则应有 $1-a+b=-2$,即

$$a-b=3. \qquad ①$$

又

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}(x^2+ax+b)=1+a+b,$$

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}2=2.$$

当 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续时,应有 $1+a+b=2$,即

$$a+b=1. \qquad ②$$

联立①②得方程组
$$\begin{cases} a-b=3, \\ a+b=1, \end{cases}$$
解得 $a=2, b=-1$. 故选 A.

【老师提示】本题利用了“一切初等函数在其定义区间内都是连续的”这一重要结论.

43.【参考答案】 A

【答案解析】点 $x=0$ 为 $f(x)$ 的分段点，考查 $f(x)$ 在某点处的连续性的判定.
$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(a+bx)=a,$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin bx}{x}=b.$$
由于 $f(0)=2$，可知，当 $a=2, b=2$ 时，$f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续. 故选 A.

44.【参考答案】 D

【答案解析】由于
$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}(a+bx^2)=a+b,$$
$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}\ln(b+x+x^2)=\ln b.$$
由于 $f(-1)=1$，可知当 $a+b=\ln b=1$，即 $a=1-\mathrm{e}, b=\mathrm{e}$ 时，$f(x)$ 在点 $x=-1$ 处连续. 故选 D.

45.【参考答案】 B

【答案解析】设 $t=x-1$，则 $x=t+1$，由 $f(x-1)$ 的表达式可得
$$f(t)=\begin{cases} t+3, & t<-1, \\ 2, & t=-1, \\ (t+1)\sin\dfrac{1}{t+1}, & t>-1, \end{cases}$$
从而
$$f(x)=\begin{cases} x+3, & x<-1, \\ 2, & x=-1, \\ (x+1)\sin\dfrac{1}{x+1}, & x>-1. \end{cases}$$
由
$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}(x+3)=2,$$
$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}(x+1)\sin\frac{1}{x+1}=0,$$
$$f(-1)=2.$$
可知 $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=f(-1)$，即 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处左连续；

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)\neq f(-1)$，即 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处不右连续.

因此 $x=-1$ 为 $f(x)$ 的间断点. 故选 B.

46.【参考答案】 B

【答案解析】当 $x=-1$ 与 $x=1$ 时，$f(x)$ 没有定义. 这两个点是 $f(x)$ 的间断点.
$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{x^2-x}{x^2-1}=\lim_{x\to -1}\frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\infty,$$
$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{1}{2}.$$
可知 $x=-1$ 为 $f(x)$ 的无穷间断点，$x=1$ 为 $f(x)$ 的可去间断点. 故选 B.

47.【参考答案】C

【答案解析】由 $f(x)$ 在 $x=-2,x=2$ 处没有定义,可知 $x=-2$ 与 $x=2$ 为 $f(x)$ 的两个间断点.由

$$\lim_{x\to -2} f(x)=\lim_{x\to -2}\frac{(x^2+x-2)\sin(x-2)}{x^2-4}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-1)\sin(x-2)}{(x-2)(x+2)}$$
$$=\lim_{x\to -2}\frac{(x-1)\sin(x-2)}{x-2}=-\frac{3}{4}\sin 4,$$
$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2+x-2)\sin(x-2)}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)\sin(x-2)}{x-2}=1,$$

可知 $x=-2$ 与 $x=2$ 都为 $f(x)$ 的第一类间断点.故选 C.

48.【参考答案】D

【答案解析】所给问题为函数 $g(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性及间断点的类型判定问题.

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^a)\cdot\sin x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{a+1}}{x^2}=\lim_{x\to 0} x^{a-1},$$

又由 $g(0)=0$,可知:

当 $a>1$ 时,$\lim\limits_{x\to 0} g(x)=g(0)$,此时 $g(x)$ 在 $x=0$ 处连续;

当 $a=1$ 时,$\lim\limits_{x\to 0} g(x)=1$,此时 $g(x)$ 在 $x=0$ 处间断,$x=0$ 为 $g(x)$ 的第一类间断点;

当 $a<1$ 时,$\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ 不存在,此时 $g(x)$ 在 $x=0$ 处间断,$x=0$ 为 $g(x)$ 的第二类间断点.

综上可知,$g(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性与 a 的取值有关.故应选 D.

49.【参考答案】D

【答案解析】所给问题为判定函数 $f(x)$ 的间断点.由于 $f(x)$ 以极限的形式给出,因此应该先求出 $f(x)$ 的表达式.由题设,得

$$f(x)=\begin{cases}0, & |x|>1,\\ 1-x, & |x|<1,\\ 1, & x=-1,\\ 0, & x=1,\end{cases}$$

可知 $f(x)$ 为分段函数,分段点为 $x=-1,x=1$.画出草图易知 $x=-1$ 为其唯一间断点.故选 D.

50.【参考答案】A

【答案解析】由于 $f(x)$ 在 $x_1=1,x_2=3$ 处没有定义,当 $x\neq 1,x\neq 3$ 时,$f(x)$ 为初等函数且为连续函数.又由

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x\sin(x-3)}{(x-1)(x-3)^2}=\infty,\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{x\sin(x-3)}{(x-1)(x-3)^2}=\infty,$$
$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin(x-3)}{(x-1)(x-3)^2}=0,\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{x\sin(x-3)}{(x-1)(x-3)^2}=\frac{-\sin 4}{32},$$

可知 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 内为有界函数,故选 A.

【老师提示】若 $y=f(x)$ 为闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必定有界.若 $y=f(x)$ 为开区间 (a,b) 内的连续函数,且 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 都存在,则 $f(x)$ 在 (a,b) 内必定有界.