新版

万学教育 UNIVERSAL EDUCATION GROUP 海文考研

考研数学

高等数学高分解码

（认知篇）

主　编：丁勇
副主编：邬丽丽　张喜珠　郭啸龙

科学分解备考时间，合理规划复习进程
基础阶段重理论，夯实基础知识
强化阶段练题型，培养解题能力
循序渐进，轻松探求高分密码

中国政法大学出版社

新版

万学教育 UNIVERSAL EDUCATION GROUP 海文考研

考研数学
高等数学高分解码
（认知篇）

主　编：丁勇

副主编：邬丽丽　张喜珠　郭啸龙

中国政法大学出版社

2018・北京

图书在版编目（CIP）数据

考研数学高等数学高分解码/丁勇主编. —北京：中国政法大学出版社，2018.9
ISBN 978-7-5620-8570-6

Ⅰ.①考… Ⅱ.①丁… Ⅲ.①高等数学－研究生－入学考试－自学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 219368 号

出版者	中国政法大学出版社
地　址	北京市海淀区西土城路 25 号
邮寄地址	北京 100088 信箱 8034 分箱　邮编 100088
网　址	http://www.cuplpress.com（网络实名：中国政法大学出版社）
电　话	010-58908285（总编室）58908433（编辑部）58908334（邮购部）
承　印	三河市德利印刷有限公司
开　本	787mm×1092mm　1/16
印　张	30
字　数	450 千字
版　次	2018 年 9 月第 1 版
印　次	2018 年 9 月第 1 次印刷
定　价	69.80 元

前言

硕士研究生招生考试是具有选拔性质的较高水平考试，采用的是优胜劣汰的录取方式。为此，考试真题既要有难度又要有区分度，而考研数学试题这种特征尤为明显。本书作者辅导考研数学数十载，同样的辅导，既有大量学员达到140以上，也有少数低于70分，天壤之别缘由何在？是运气不好？是方法不对？为此我们需要探讨考研数学的得分之道，以下内容将为考生揭开考研数学高分的“神秘面纱”。

一、系统复习、夯实基础

研究生招生考试数学试题中，有80%左右的试题是直接考查“基本概念、基本理论和基本方法”，基本概念比如“导数、积分、间断点、渐近线的概念”等，基本理论比如“极限的保号性、”“等价无穷小替换定理”等，基本运算比如“求极限、求导、行列式的运算、求概率”等。有些年份甚至直接考查课本上的公式、定理的证明，比如2015年考研考查$(uv)'=u'v+uv'$的证明。

考生只要了解相应的概念，具备基本运算能力，就可以把相应试题做出来。但现实是很多考生不屑于复习这些基础知识，认为考研试题应该难度很大，所以常常找一些偏题、怪题进行训练，还自我感觉良好，如果万一考了，自己会做，别人不会做，就可以得高分。最后结果往往适得其反。所以在复习的基础阶段，一定要狠抓基础，全面复习。

当然重视基础，不是只是背诵课本上的基本概念、基本理论和基本方法，要做到不仅要知其然，还要知其所以然，同时还要掌握在考研试题中如何考查，命题方式有哪些，等等。

考研数学考查非常全面，所以只要是考试大纲要求的内容都要复习到，特别是在基础阶段，不能有所取舍，数学一试卷中每年有大量的低频考点，比如梯度、散度、曲面切平面、法线、傅里叶级数，等等，这些内容经常是五年或十年甚至更多更久才考一次，虽然试题难度不大，但是每年有大量考生在这些考点上失分，主要源于犯了机会主义错误，认为自己运气不会那么差刚好考到，最后悔之晚矣。

二、归纳题型、总结方法

如果把历年考研数学试题进行比较，并作深入细致的分析研究，再对照教育部制定的历年(考研)考试大纲，就会发现，虽说数学试题表述形式千变万化，但万变不离其宗。这个宗就是学科的核心内容，说得具体一点就是诸如高等数学求函数、数列极限、求极值、积分上限函数求导、证明不等式、计算二重积分、幂级数求和等；线性代数的解含参数的线性方程组、向量的线性相关性、矩阵的相似对角化；概率统计的求随机变量函数的分布、数值特征、矩估计、极大似然估计等典型题型。如果你不被试题五光十色的包装所迷惑，而能洞察其实质——题型，就有可能知道该用哪把钥匙去开门。

所以考生在复习的强化阶段，一定要系统总结每个章节有哪些常考的题型，这些题型有哪些解法，比如要证明数列极限存在，要想到用单调有界准则，出现常数不等式，要想到常数变易法，最后做到看到什么题型马上就有固定的解法。就像拍电视剧，男主角掉到山崖，一般都会挂到树上，一定会有一个世外高人救了他。

同时考研试题中有一些条件，有固定的结论，比如一般出现$f(b)-f(a)$要用拉格朗日中值定理；出现了高阶导数要用泰勒定理；出现$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$要用；出现了$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=1$要想到特征值的结论；等等。这些都是一些固定套路，虽然生活中要少一些套路，多一些诚意，但是考研试题中还是会有很多固定的解题思路，本书正文会给考生进行系统总结。

三、科学规划、戒骄戒躁

考研数学的复习是一个漫长、系统、宏伟的工程，年轻的考生不缺乏激情、不缺乏信心、不缺乏为了未来而奋斗的勇气，但是缺乏约束力，往往复习内容的多少和心情指数成正比，心情好多复习一点，心情

不好干脆就不复习了。这种三天打鱼，两天晒网的复习节奏，是不会修成正果的，要想拿下考研数学这座山头，需要考生制定一个合理的复习规划。要做一个科学的、可执行的学习计划，计划不能太过详细，有同学甚至规定早上 7 点起床，五分钟刷牙，一分钟洗脸，两分钟上厕所，这种计划不具有可操作性。

本书正是基于以上的考虑，分为认知篇和题型篇。

认知篇注重呈现考研数学的基本概念，基本理论和基本方法。

题型篇重在将考研数学中常见的题型进行归纳、总结，旨在认知篇的基础上帮助考生掌握常考题型，提高解题能力。

下面我根据多年参与考研辅导的经验，给考生制定一个学习计划的框架，具体的可以根据自身的特点自我调整。

一、基础阶段

1. 时间：Now—6 月

2. 目标：系统复习、夯实基础

通过基础阶段的复习，一方面打好基础，拿到考研数学的基础分，同时为后期强化阶段题型的复习打好基础

3. 用书：

(1)《考研数学高分解码》(认知篇)；(2)《考研数学基础必做 660 题》；

(3)《考研数学真题大解析》(珍藏版)。

二、强化阶段

1. 时间：7—9 月

2. 目标：归纳题型、总结方法

在这三个月里，要归纳考研数学常考题型，同时总结解题方法和解题技巧，最后要做到看到题就知道方法是什么。

3. 用书：

(1)《考研数学高分解码》(题型篇)；(2)《考研数学强化必做 660 题》。

三、冲刺阶段

1. 时间：10 月—考前

2. 目标：查漏补缺、实战演练

通过上一阶段的复习，考生对重要知识、常见题型的做题方法进行了归纳，接下来要通过真题和模拟题将这些知识和做题方法进行融会贯通的使用，同时通过做模拟题，一方面查漏补缺，看自己还有哪些地方不会，另一方面，要养成良好的做题习惯：限定时间和做题顺序等以培养应试技巧。

3. 用书：

(1)《考研数学真题大解析》(标准版)；(2)《考研数学最后成功 8 套题》。

特别提示 本书适合数学一、数学二、数学三及数农考生使用，对于仅针对数学一至三个别卷种适用的章节，书中分别以上标“①”、“②”、“③”表示，数农考生可参考数学三的适用范围。书中收入了部分考研真题，对真题，在题号后以“年份^{卷种}”的形式表示，如选自 2011 年数学一的真题表示为“2011^{①}”。本书中涉及的符号力求与教育部考试中心发布的最新大纲及使用最广泛的高校教材保持一致，便于读者识别。

数学知识要积累，对数学的理解更要有一个循序渐进的过程，对立志考研的读者要说：凡事预则立，不预则废。

限于水平，撰写中难免出现差错，殷切希望读者不吝赐教，多多指正。

编者

于北京

目录

第一章　函数　极限　连续

名师解码

本章概要

复习导语

高等数学的研究对象是函数，研究方法就是极限，这充分说明了本章内容的重要性. 函数、极限、连续都是高等数学的基础内容，学好本章对于学习高等数学是至关重要的. 这部分知识在考研真题中的命题形式通常是选择题或填空题，考查对于概念的理解；而更多的是作为基础知识在考研真题的综合题和应用题中体现. 求极限是研究生入学考试的一个重要题型，随着学习内容的不断深入，求极限的方法将会逐步多样化. 掌握求极限的方法是非常重要的，了解掌握最基本的求极限方法可为更深入的学习打下坚实的基础.

知识结构图

- 函数
  - 定义
    - 定义域
    - 对应法则
  - 性质
    - 奇偶性
    - 单调性
    - 周期性
    - 有界性
  - 初等函数
    - 基本初等函数
    - 复合函数、反函数
  - 其他 函数
    - 分段函数
    - 隐函数
    - 参数方程、极坐标表示的函数
- 极限
  - 定义
    - $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$
    - $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$
      - $x\to x_0^+$
      - $x\to x_0^-$
    - $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$
      - $x\to +\infty$
      - $x\to -\infty$
  - 性质
    - 唯一性
    - 有界性
    - 保号性
  - 极限存在准则
    - 单调有界准则
    - 夹逼准则
  - 两个重要极限
    - $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$
    - $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$
  - 无穷小
    - 定义
    - 性质、关系
    - 比较
    - 无穷大

$$\text{连续}\begin{cases}\text{定义}\begin{cases}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\\ \text{左右连续}\end{cases}\\ \text{初等函数的连续性——定义区间内连续}\\ \text{间断点}\begin{cases}\text{第一类间断点(左右极限存在)}\begin{cases}\text{可去间断点}\\ \text{跳跃间断点}\end{cases}\\ \text{第二类间断点(无穷间断点、振荡间断点等)}\end{cases}\\ \text{闭区间连续函数的性质}\begin{cases}\text{最值定理}\to\text{有界性定理}\\ \text{介值定理}\to\text{零值定理}\end{cases}\end{cases}$$

$$\text{关系:连续}\Rightarrow\text{极限}\Rightarrow\begin{cases}\text{有界}\\ \text{保号}\end{cases}$$

复习目标

1. 理解函数的概念,掌握函数的表示法,会建立应用问题的函数关系.

2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

3. 理解复合函数及分段函数的概念,了解反函数及隐函数的概念.

4. 掌握基本初等函数的性质及其图形,了解初等函数的概念.

5. 理解极限的概念,理解函数左极限与右极限的概念以及函数极限存在与左极限、右极限之间的关系[①②].

了解数列极限和函数极限(包括左极限与右极限)的概念[③].

6. 掌握极限的性质及四则运算法则[①②].

了解极限的性质,掌握极限的四则运算法则[③].

7. 掌握极限存在的两个准则,并会利用它们求极限,掌握利用两个重要极限求极限的方法[①②].

了解极限存在的两个准则,掌握利用两个重要极限求极限的方法[③].

8. 理解无穷小量、无穷大量的概念,掌握无穷小量的比较方法,会用等价无穷小量求极限.

9. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续),会判别函数间断点的类型.

10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性,理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理),并会应用这些性质.

考查要点详解

第一节　函数

一、函数的定义

1. **定义 1.1.1**　设 X,Y 是两个非空实数集,如果对于 X 中的任意一个数 x,按照对应法则 f,在 Y 中存在唯一的数 y,则称 f 为数集 X 到数集 Y 的函数,记作 $f:X\to Y$. 数 x 对应的数 y 称为 f 的函数值,记作 $y=f(x)$. 数集 X 称为函数的定义域(或记作 $D(f)$),函数值 y 的集合称为 f 的值域,记作 $R(f)$,即 $R(f)=\{y\mid y=f(x)\text{且}x\in D(f)\}$. 注意:$R(f)\subseteq Y$.

2. 函数定义的两个要素:定义域、对应法则.

函数的定义域主要掌握五种基本类型:

$$\frac{1}{y},y\neq 0;\quad \sqrt{y},y\geqslant 0;\quad \log_a y,y>0;\quad \arcsin y,\ |y|\leqslant 1;\quad \arccos y,\ |y|\leqslant 1.$$

【例 1.1.1】　求函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x-3}}+\arcsin\dfrac{x-1}{3}$ 的定义域.

【解】　由题设$\begin{cases}\sqrt{x^2-2x-3}\neq 0,\\ x^2-2x-3\geqslant 0,\\ \left|\dfrac{x-1}{3}\right|\leqslant 1,\end{cases}$ 解联立不等式$\begin{cases}(x+1)(x-3)>0,\\ |x-1|\leqslant 3\end{cases}$ 得函数的定义域为$[-2,-1)\cup(3,4]$.

评注

这是函数部分最基本的题型，此题中含有定义域的三种类型.

【例 1.1.2】　求函数 $f(x)=\dfrac{1}{\ln|x-1|}$的定义域.

【解】　由题设$\begin{cases}\ln|x-1|\neq 0\\ |x-1|>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|x-1|\neq 1,\\ x-1\neq 0,\end{cases}$ 得函数的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$.

评注

此题中含有定义域的两种类型.

【例 1.1.3】　设 $f\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)=2x-1(x\neq 2)$，当 $x\neq 1$ 时，求 $f\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$.

【解】　令$\dfrac{x+1}{x-2}=t$，则 $x=\dfrac{1+2t}{t-1}$，所以 $f(t)=\dfrac{3+3t}{t-1}$，$f\left(\dfrac{1}{x-1}\right)=\dfrac{3x}{2-x}(x\neq 1,x\neq 2)$.

评注

$y=f(x)$ 或 $u=f(v)$ 都表示函数 f，这说明函数用什么变量表示都可以，这也可以称为函数的变量无关性.

【例 1.1.4】　设 $2f(x)+3f(1-x)=x^2+1$，求 $f(x)$.

【解】　由题设$\begin{cases}2f(x)+3f(1-x)=x^2+1,\\ 2f(1-x)+3f(x)=(1-x)^2+1,\end{cases}$ 消去 $f(1-x)$即可得到 $f(x)=\dfrac{1}{5}(x^2-6x+4)$.

评注

此题利用了函数的变量无关性.

二、函数的性质

1. 奇偶性

定义 1.1.2　设函数 f 的定义域 $D(f)$关于原点对称，$\forall x\in D(f)$，若 $f(-x)=-f(x)$，则称 f 为奇函数；若 $f(-x)=f(x)$，则称 f 为偶函数.

【例 1.1.5】　判断函数 $f(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})(a>0,a\neq 1)$的奇偶性.

【解】　显然，函数 $f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$，且 $f(x)+f(-x)=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})+\log_a(-x+\sqrt{x^2+1})=\log_a 1=0$，所以 $f(x)$为奇函数.

评注

考生应当熟记一些特殊的奇函数.除此题的形式之外，还有 $\ln\dfrac{1-x}{1+x}$和$\dfrac{a^x-1}{a^x+1}$.

2. 单调性

定义 1.1.3　设函数 f 的定义域为区间 I，$\forall x_1,x_2\in I$，$x_1<x_2$，若 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$），则称 f 为单调增加（或减少）函数.

注意:若不等号$<$(或$>$)改为$\leqslant$(或$\geqslant$),则称 f 为单调不减(或单调不增)函数.

【例 1.1.6】 证明函数 $f(x)=\arctan x$ 在$(-\infty,+\infty)$内单调增加.

【证明】 当 $x_1<0,x_2>0$ 时,显然 $f(x_2)\geqslant f(x_1)$;当 x_1,x_2 同号且 $x_1<x_2$ 时,由于 $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}$,所以 $\arctan x_2-\arctan x_1=\arctan\dfrac{x_2-x_1}{1+x_1\cdot x_2}>0$,故函数单调增加.

评 注

在本书第二章引入导数概念后,考生可以用导数来讨论函数的单调性,可使问题更为简单.

3. 周期性

定义 1.1.4 设函数 f 的定义域为区间 I,若存在非零实数 $T\in\mathbf{R}$,使得 $x+T\in I$,且 $f(x+T)=f(x)$,则称 f 为周期函数,T 为函数 f 的周期.

注意:一般情况下,把最小正周期(如果存在的话)简称为函数的周期.

例如:$y=\sin x,\cos x$ 的周期是 2π,$y=\tan x,\cot x$ 的周期是 π. 而周期函数不一定有最小正周期,如常数函数 $y=c$.

4. 有界性

定义 1.1.5 设函数 $f(x)$的定义域为 $D(f)$,如果存在 $M>0$,使得 $\forall x\in D(f)$,有$|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $f(x)$有界.

如果存在 M,使得 $\forall x\in D(f)$,有 $f(x)\leqslant M$,则称函数 $f(x)$有上界;如果存在 m,使得 $\forall x\in D(f)$,有 $f(x)\geqslant m$,则称函数 $f(x)$有下界.

函数 $f(x)$有界的充要条件是函数 $f(x)$既有上界又有下界.

评 注

函数的有界性很重要,是函数性质中的难点. 本书第一章的极限和函数连续性中都将介绍相关函数的有界性.

常见的有界函数:$|\sin x|\leqslant 1$,$|\cos x|\leqslant 1$,$|\arctan x|<\dfrac{\pi}{2}$.

函数无界的定义:$\forall M>0$,$\exists x_0\in D(f)$,使得$|f(x_0)|>M$.

三、常考函数

1. 基本初等函数与初等函数

(1) 常数函数

$y=c,x\in\mathbf{R}$.

(2) 幂函数

$y=x^{\alpha}$,α 为非零常数. 所有幂函数的图形都经过点$(1,1)$.

当 α 为正整数时,定义域为 $\mathbf{R}$;当 α 为负整数时,定义域为非零实数.

(3) 指数函数

$y=a^x,x\in\mathbf{R}$(其中 $a>0$ 且 $a\neq 1$),经过点$(0,1)$.

(4) 对数函数

$y=\log_a x,x>0$(其中 $a>0$ 且 $a\neq 1$),经过点$(1,0)$.

(5) 三角函数

$y=\sin x$; $y=\cos x$; $y=\tan x$; $y=\cot x$; $y=\sec x$; $y=\csc x$.

(6) 反三角函数

$y=\arcsin x$; $y=\arccos x$; $y=\arctan x$; $y=\operatorname{arccot} x$.

评注

掌握基本初等函数的定义域、性质及其图形非常重要.

初等函数是由常数和基本初等函数经过有限次四则运算及有限次复合后能用一个公式表示的函数.

2. 复合函数

定义 1.1.6　设函数 $y=f(u),u\in U,u=g(x),x\in X$. 如果当 x 在 $X^*\subseteq X$ 中取值时，相应的 u 值在 U 中，那么称 y 为 x 的复合函数，记作 $f\circ g$，即 $f\circ g(x)=f[g(x)]$.

评注

复合函数在函数内容中很重要，也是一个难点，需要考生重点掌握.

【例 1.1.7】　设函数 $f(x)$ 的定义域是 $[-1,1]$，求 $f(x+a)+f(x-a)(a>0)$ 的定义域.

【解】　函数 $f(x+a)$ 的定义域是 $[-1-a,1-a]$，函数 $f(x-a)$ 的定义域是 $[-1+a,1+a]$.

当 $0<a<1$ 时，所求的定义域是 $[-1+a,1-a]$；当 $a>1$ 时，所求的定义域是空集；当 $a=1$ 时，定义域为 $\{0\}$.

3. 反函数

定义 1.1.7　设函数 $f(x)$ 的定义域为 $D(f)$，值域为 $R(f)$. 如果对于每一个 $y\in R(f)$，存在唯一的 $x\in D(f)$ 使得 $f(x)=y$，则得到一个函数 $x=f^{-1}(y)$，称 f^{-1} 为函数 f 的反函数，记作 f^{-1}.

注意：反函数的定义域、值域分别是原函数的值域、定义域.

反函数常用 $y=f^{-1}(x)$ 表示，此时反函数的图形与原函数的图形关于直线 $y=x$ 对称.

4. 隐函数

设有方程 $F(x,y)=0$，当 x 在某区间内任取一值，若总有满足该方程的唯一的值 y 存在，则称由方程 $F(x,y)=0$ 在上述区间内确定了一个隐函数 $y=y(x)$.

5. 分段函数

用两个或两个以上公式表示的函数称为分段函数，分段函数一般来说不是初等函数，但也有例外，例如 $|x|=\sqrt{x^2}$，前者表示分段函数而后者为初等函数.

在考研数学中，初等函数通常有相应的公式，而分段函数一般需要根据定义加以讨论.

6. 幂指函数

设 $f(x)>0$，称 $y=[f(x)]^{g(x)}$ 为由 $f(x),g(x)$ 构成的幂指函数. 根据反函数的性质 $a^b=e^{\ln a^b}=e^{b\ln a}$，可得 $y=[f(x)]^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$. 所以幂指函数本质上属于复合函数.

7. 参数方程确定的函数①②

设 $x=\varphi(t),y=\psi(t)$，则称 $\begin{cases}x=\varphi(t),\\y=\psi(t)\end{cases}$ 为由参数方程确定的函数，其中 t 为参数.

【例 1.1.8】　设函数 $f(x)=\begin{cases}2x, & x\leqslant 0\\0, & x>0\end{cases}$，$\varphi(x)=x^2-1$，求 $f[\varphi(x)]$.

【解】　$f[\varphi(x)]=\begin{cases}2\varphi(x), & \varphi(x)\leqslant 0,\\0, & \varphi(x)>0\end{cases}=\begin{cases}2(x^2-1), & |x|\leqslant 1,\\0, & |x|>1.\end{cases}$

【例 1.1.9】　设函数 $f(x)=\begin{cases}2^x, & x>1,\\2x, & x\leqslant 1,\end{cases}$　$g(x)=\begin{cases}\sin x, & x>0,\\x^2, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 求 $f[g(x)]$.

【解】　当 $x<-1$ 时，$g(x)=x^2>1$；当 $x\geqslant -1$ 时，$g(x)\leqslant 1$，所以 $f[g(x)]=\begin{cases}2^{x^2}, & x<-1,\\2x^2, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\2\sin x, & x>0.\end{cases}$

评注

两个分别包含两段的分段函数复合后,不一定是四段的分段函数.

第二节　极限

一、极限的定义

1. 数列极限的定义

定义 1.2.1　已知数列$\{x_n\}$及数 a,如果对于任意给定的正数 ε,存在正整数 N,使得对于一切满足 $n>N$ 的 x_n,有$|x_n-a|<\varepsilon$,则称数 a 为数列$\{x_n\}$当 n 趋于无穷大时的极限,记作$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. 数列极限的定义又称为"$\varepsilon-N$"定义,可简记为:

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a:\quad \forall\,\varepsilon>0,\exists\, N,\forall\, n:n>N\Rightarrow|x_n-a|<\varepsilon.$$

评注

由于 n 为自然数,必为正数,所以 $n\to+\infty$ 有时简化为 $n\to\infty$.

用极限的定义来证明极限存在难度比较大,在考研真题中从未出现过. 数学一、二的考生对极限的定义进行一般了解即可. 极限的定义对数学三的考生基本不作考试要求.

2. 函数极限的定义

定义 1.2.2　设函数 $f(x)$在$|x|$大于某一正数时有定义,A 为实数,如果对于任意给定的正数 ε,总存在正数 X,使得对于一切满足$|x|>X$ 的 $f(x)$,有$|f(x)-A|<\varepsilon$,则称数 A 为函数 $f(x)$当 $x\to\infty$时的极限,记作$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$. 这称为函数极限的"$\varepsilon-X$"定义,可简记为:

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A:\quad \forall\,\varepsilon>0,\exists\, X,\forall\, x:|x|>X\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon.$$

定义 1.2.3　设函数 $f(x)$在点 x_0 的一个去心邻域 $\mathring{U}(x_0)$内有定义,A 为实数,如果对于任意给定的正数 ε,总存在正数 δ,使得对于一切满足 $0<|x-x_0|<\delta$ 的 $f(x)$,有$|f(x)-A|<\varepsilon$,则称数 A 为函数 $f(x)$当 $x\to x_0$ 时的极限,记作$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$. 这称为函数极限的"$\varepsilon-\delta$"定义,可简记为:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A:\quad \forall\,\varepsilon>0,\exists\,\delta>0,\forall\, x:0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon.$$

注意:点 x_0 的一个去心 δ 邻域表示为 $\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x\,|\,0<|x-x_0|<\delta\}$,而点 x_0 的一个去心邻域 $\mathring{U}(x_0)$表示不考虑邻域的半径.

二、单侧极限与左右极限

1. 单侧极限

函数 $f(x)$当 $x\to\infty$时的极限可分别定义为单侧极限,即 $x\to+\infty$时的极限和 $x\to-\infty$时的极限.

定义 1.2.4　$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A:\forall\,\varepsilon>0,\exists\, X,\forall\, x:x>X\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon.$

定义 1.2.5　$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A:\forall\,\varepsilon>0,\exists\, X,\forall\, x:x<-X\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon.$

定理 1.2.1　$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A.$

2. 左右极限

函数 $f(x)$当 $x\to x_0$ 时的极限可分别定义为左、右极限,即 $x\to x_0^-$ 时的极限和 $x\to x_0^+$ 时的极限.

定义 1.2.6　**右极限**　$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A:\forall\,\varepsilon>0,\exists\,\delta>0,\forall\, x:x_0<x<x_0+\delta\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon$. 右极限也可记作 $f(x_0^+)$或 $f(x_0+0)$.

定义 1.2.7　**左极限**　$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A:\forall\,\varepsilon>0,\exists\,\delta>0,\forall\, x:x_0-\delta<x<x_0\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon$. 左极限也可记作 $f(x_0^-)$或 $f(x_0-0)$.

定理 1.2.2 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$.

评注

通常对于两种基本类型的函数(分段函数和带有绝对值的函数),考生要能想到需要考虑单侧极限与左右极限. 而对于两种特殊类型的函数$\left(a^{\infty},\arctan\infty\text{或 }a^{\frac{1}{0}},\arctan\frac{1}{0}\right)$,此处$\frac{1}{0}$表示$\frac{1}{x}$,$x\to 0$,考生往往会因忽略造成错误,一定要特别注意.

【例 1.2.1】 求下列函数在指定点的左右极限,并判断函数在该点极限是否存在.

(1) $f(x)=\begin{cases}x+2, & x\leqslant 2,\\ \dfrac{1}{x-2}, & x>2,\end{cases}$ $x_0=2$;

(2) $f(x)=\arctan\dfrac{1}{x-1}$, $x_0=1$;

(3) $f(x)=\dfrac{1-e^{\frac{1}{x-1}}}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}$, $x_0=1$.

【解】 (1) $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=4$, $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\infty$,所以函数在 $x_0=2$ 处极限不存在.

(2) $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=-\dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\dfrac{\pi}{2}$,所以函数在 $x_0=1$ 处极限不存在.

(3) $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=-1$,所以函数在 $x_0=1$ 处极限不存在.

评注

函数极限必须区分正负无穷大的两种常见形式及其变化形式:

当 $a>1$ 时,$a^{+\infty}=+\infty$, $a^{-\infty}=0$, $\lim\limits_{x\to 0^+}a^{\frac{1}{x}}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-}a^{\frac{1}{x}}=0$.

$\arctan(+\infty)=\dfrac{\pi}{2}$, $\arctan(-\infty)=-\dfrac{\pi}{2}$, $\arctan\dfrac{1}{0^+}=\dfrac{\pi}{2}$, $\arctan\dfrac{1}{0^-}=-\dfrac{\pi}{2}$.

三、极限的性质及四则运算法则

1. 极限的性质

定理 1.2.3 (唯一性) 如果数列或函数的极限存在,则极限值唯一.

定理 1.2.4 (数列的有界性) 如果数列的极限存在,则数列有界.

定理 1.2.5 (函数的局部有界性)

若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,则 $\exists M>0$, $\exists\delta>0$,当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 时,$|f(x)|\leqslant M$.

若$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$,则 $\exists M>0$, $\exists X>0$,当$|x|>X$ 时,$|f(x)|\leqslant M$.

定理 1.2.6 (数列的保号性)

若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ 且 $A>0(A<0)$,则 $\exists N$,当 $n>N$ 时,$x_n>0(<0)$.

定理 1.2.7 (函数的局部保号性)

(1)若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 且 $A>0$(或 $A<0$),则 $\exists\delta>0$,当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$时,$f(x)>0$(或 $f(x)<0$).

(2)若$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 且 $A>0$(或 $A<0$),则 $\exists X>0$,当$|x|>X$ 时,$f(x)>0$(或 $f(x)<0$).

评注

极限的性质都可以用极限的定义加以证明. 数学一、二的考生可自行尝试证明,数学三的考生不需要掌握证明.

【例 1.2.2】 设 $f(x)$在 $x=0$ 处连续,且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=1$,则(　　).

(A) $\exists U(0,\delta)$,使得 $\forall x\in U(0,\delta)$,有 $f(x)>0$. (B) $f(0)<0$.

(C) $\exists \mathring{U}(0,\delta)$,使得 $\forall x\in \mathring{U}(0,\delta)$,有 $f(x)>0$. (D) $f(0)>0$.

【答案】(C).

评注

保号性是极限性质中的难点,考生需注意局部保号性,此题选(C).

注意:函数连续时,$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1\Rightarrow f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}\cdot x=0$.

2.极限运算法则

(1)**定理 1.2.8 (四则运算)** 设 $\lim u=A,\lim v=B$,则

$$\lim(u\pm v)=A\pm B,\ \lim(u\cdot v)=A\cdot B,\ \lim\frac{u}{v}=\frac{A}{B}(B\neq0).$$

【例 1.2.3】 求极限 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2+x-2}$.

【解】 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2+x-2}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x+3)-4}{(x-1)(x+2)(\sqrt{x+3}+2)}=\dfrac{1}{12}$.

评注

遇到“$\dfrac{0}{0}$”型的未定式极限时,先消去零因子,再应用极限的四则运算法则.

【例 1.2.4】 设极限 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+ax+b}{x^2+2x-3}=-2$,求常数 a,b 的值.

分析:分母极限为零时,如果分式的极限存在,则分子的极限必定为零,即:如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=c$(存在)且 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$,则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}\cdot g(x)=0$. 本题中 $\lim\limits_{x\to1}(x^2+ax+b)=0$ 或 $1+a+b=0$ 对解决问题没有直接作用,利用初等数学结论:x^2+ax+b 在 $x=1$ 时为零,则 x^2+ax+b 含有 $x-1$ 的因子,此时可设 $x^2+ax+b=(x-1)(x+c)$.

【解】 设 $x^2+ax+b=(x-1)(x+c)$,则由 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x+c)}{(x-1)(x+3)}=-2$ 得 $c=-9$,所以 $a=-10,b=9$.

评注

在学习本书第二章后,考生可结合求极限的洛必达法则使计算简化.

【例 1.2.5】 设极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x-\sqrt{ax^2+bx+1})=-2$,求常数 a,b 的值.

【解】 $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x-\sqrt{ax^2+bx+1})=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{9x^2-(ax^2+bx+1)}{3x+\sqrt{ax^2+bx+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(9-a)x^2-bx-1}{3x+\sqrt{ax^2+bx+1}}=-2$,由于极限存在且分母的最高次数是一次,所以分子的最高次数也应该是一次的,故 $a=9$,比较最高次项的系数得 $\dfrac{-b}{3+3}=-2\Rightarrow b=12$.

评注

遇到“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型的未定式极限时,可直接比较分子、分母的最高次数,最高次数相同时分子、分母最高次项的系数之比即为极限.

常用结论 1 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a_0x^k+a_1x^{k-1}+\cdots+a_{k-1}x+a_k}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & k=m,\\ 0, & k<m,\\ \infty, & k>m.\end{cases}$

常用结论 2 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_0n^k+a_1n^{k-1}+\cdots+a_{k-1}n+a_k}{b_0n^m+b_1n^{m-1}+\cdots+b_{m-1}n+b_m}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & k=m,\\ 0, & k<m,\\ \infty, & k>m.\end{cases}$

【例 1.2.6】 求极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-3}-x+5}{\sqrt{x^2+2x+3}}$.

【解】 此题是"$\dfrac{\infty}{\infty}$"型的极限，但应该注意到 $x\to-\infty$. 当 $x<0$ 时，最高次数 $\sqrt{x^2}=-x$，$\sqrt{4x^2}=-2x$，即

原式$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x\sqrt{1-\dfrac{3}{4x^2}}-x+5}{-x\sqrt{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2\sqrt{1-\dfrac{3}{4x^2}}-1+\dfrac{5}{x}}{-\sqrt{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}}}=3.$

(2)**定理 1.2.9（复合运算）** 设 $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=b$，$\lim\limits_{u\to b}f(u)=A$，且当 $x\in\mathring{U}(a,\delta)$ 时，$\varphi(x)\neq b$，则 $\lim\limits_{x\to a}f[\varphi(x)]=A$.

【例 1.2.7】 求极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\ln x\,(x_0>0)$.

【解】 由于 $\lim\limits_{x\to 1}\ln x=0$，当 $x\to x_0$ 时，令 $u=\dfrac{x}{x_0}\to 1$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}(\ln x-\ln x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\ln\dfrac{x}{x_0}=\lim\limits_{u\to 1}\ln u=0$，故 $\lim\limits_{x\to x_0}\ln x=\ln x_0$.

注意：可用"$\varepsilon-\delta$"定义证明 $\lim\limits_{x\to 1}\ln x=0$（一般不作考试要求，此处略）.

四、极限存在的两个准则

1. 准则一：单调有界数列必有极限

评 注

"单调有界数列必有极限"这一准则通常作为高等数学的公理，由它引入重要极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$，而运用这个准则证明一些递推数列的极限是高等数学的难点，考生在基础复习阶段简单了解即可.

【例 1.2.8】(2008[①②]) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界，$\{x_n\}$ 为数列，则下列命题正确的是（ ）.

(A) 若 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛. (B) 若 $\{x_n\}$ 单调，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛.
(C) 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛，则 $\{x_n\}$ 收敛. (D) 若 $\{f(x_n)\}$ 单调，则 $\{x_n\}$ 收敛.

【答案】 (B).

【解】 若 $\{x_n\}$ 单调，则 $\{f(x_n)\}$ 也单调（单调函数的复合函数也是单调函数）且有界，所以 $\{f(x_n)\}$ 收敛，应选 (B).

【例 1.2.9】 设 $x_1=10$，$x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}\ (n=1,2,\cdots)$，试证数列 $\{x_n\}$ 极限存在，并求此极限.

【解析】 用单调有界准则. 由题设显然有 $x_n>0$，数列 $\{x_n\}$ 有下界. 现用归纳法证明 $\{x_n\}$ 单调递减. 因为 $x_2=\sqrt{6+x_1}=\sqrt{6+10}=4<x_1$. 设 $x_n<x_{n-1}$，则 $x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}<\sqrt{6+x_{n-1}}=x_n$，因此，$\{x_n\}$ 单调递减. 由单调有界准则，所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$ 存在. 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$，$(a\geqslant 0)$，在恒等式 $x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$ 两边取极限，即 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{6+x_n}$，得 $a=\sqrt{6+a}$，解之得 $a=3$，$a=-2$（舍去）.

评 注

证明数列单调的另一种常用方法：证明 $x_{n+1}-x_n=f(x_n)-x_n\geqslant 0$（或 $\leqslant 0$）.