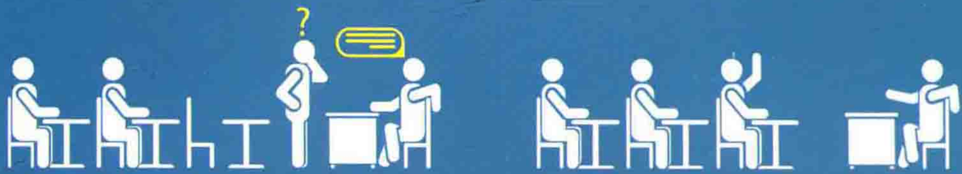
MPAcc MAud
MBA MLIS

会计硕士·审计硕士·图书
公共管理·工程管理·旅游管理

主编◎荣 易 马 燕

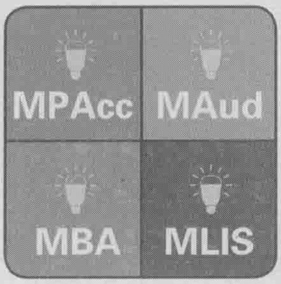


199管理类联考数学

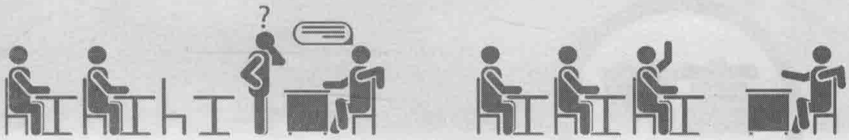
易课堂

- 直击考题题源 不是真题胜似真题
- 系统梳理考点 精炼总结概括
- 删除偏门考点 高度契合真题思路
- 让难题变简单 让考研变容易

中国政法大学出版社



会 图书情报 · 工商管理
公共管理 · 工程管理 · 旅游管理



199管理类联考数学

易课堂

主 编◎荣 易马 燕
副主编◎程龙娜 张亚男

中国政法大学出版社
2017 · 北京

图书在版编目（CIP）数据

199管理类联考数学易课堂/荣易，马燕主编.—北京：中国政法大学出版社，2017.10
ISBN 978-7-5620-7834-0

Ⅰ.①1…　Ⅱ.①荣…　②马…　Ⅲ.①高等数学－研究生－入学考试－自学参考资料　Ⅳ.①013

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第263557号

出版者	中国政法大学出版社
地　址	北京市海淀区西土城路25号
邮寄地址	北京100088信箱8034分箱　邮编100088
网　址	http://www.cuplpress.com（网络实名：中国政法大学出版社）
电　话	010-58908285(总编室)　58908433（编辑部）58908334(邮购部)
承　印	保定彩虹印刷有限公司
开　本	787mm×1092mm　1/16
印　张	20.5
字　数	481千字
版　次	2017年10月第1版
印　次	2017年10月第1次印刷
定　价	49.80元

前言

PREFACE

一 199 管理类联考特点

1. 考试内容简单

199 管理类联考是所有考研科目中考试内容最为简单的科目，这就为数学基础差、英语基础差、已工作数年的考生提供了读研再深造的机会，同时也使得基础好的考生可以不用花费太多精力即可考出不错的成绩.

2. 部分专业竞争激烈

199 管理类联考包含七大专业（会计硕士 MPAcc、审计硕士 Maud、工商管理 MBA、图书情报 MLIS、公共管理 MPA、工程管理 MEM、旅游管理 MTA），其中会计硕士 MPAcc、审计硕士 Maud 的竞争激烈，工商管理 MBA、图书情报 MLIS 也升温趋势明显，改变本科出身、升入名校并非易事.

二 关于专业课与跨专业

1. 199 管理类联考初试不考专业课与政治.

2. 工商管理 MBA、图书情报 MLIS、公共管理 MPA、工程管理 MEM 与旅游管理 MTA 这五个专业对专业课的要求相对较低，但是对于会计硕士 MPAcc、审计硕士 Maud 而言，专业课是复试成败的关键因素.

3. 关于是否应该跨专业考研是一个仁者见仁智者见智的问题，笔者认为跨专业考研是一次宝贵而又风险系数极高的改变专业背景的机会，要想跨专业成功必有断腕之决心与持之以恒之付出，否则跨专业考研请慎重.

三 备考规划

1. 基础较好的考生

建议从 9 月初开始备考，以 100 天备考周期为宜，长则无益，短则过紧. 9 月份将本书前九章（考点梳理、基础过关）完成，10 月份完成本书最后一部分（第十章名校冲刺），11 月份将本书做二遍，同时每周一套真题模拟训练，12 月份每周两套真题模拟训练，考前最后一天完成最后一套真题.

2. 基础较差的考生（包括工作数年的考生）

建议最晚从 7 月初（暑假）开始备考，并在 8 月底之前将本书的前九章（考点梳理、基础过关）精

做一遍，9月份完成本书最后一部分（第十章名校冲刺），10月将本书做第二遍，11月份将本书做第三遍，同时每周一套真题模拟训练，12月份每周两套真题模拟训练，考前最后一天完成最后一套真题.

四 本书特点

1. 本书选用真题极少，而是直击题源筛选题目，保证本书题目和真题思路高度契合的同时，又能将宝贵有限的真题留给考生做模拟考试用.

2. 删除偏、难、怪的冷门知识点. 199管理类联考数学的特点非常鲜明：简单即重要——越基础的考点越重要！希望各位考生万勿在一些偏、难、怪的冷门知识点上浪费太多精力，否则只会事倍功半甚至得不偿失.

3. 重要考点在本书中均用（√）标出，时间紧张的同学只备考这部分内容亦可.

荣易

目录

CONTENTS

序章 一　解题习惯篇—问题求解题 ………… 001

序章 二　新题型篇—条件充分性判断 ………… 004

第一章　算术 ………… 008

第一节　考点梳理 ………… 008

第二节　基础过关 ………… 015

第二章　代数式 ………… 021

第一节　考点梳理 ………… 021

第二节　基础过关 ………… 035

第三章　函数、方程和不等式 ………… 044

第一节　考点梳理 ………… 044

第二节　基础过关 ………… 060

第四章　应用题 ………… 071

第一节　考点梳理 ………… 071

第二节　基础过关 ………… 092

第五章　数列 ………… 107

第一节　考点梳理 ………… 107

第二节　基础过关 ………… 117

第六章　数据分析 ………… 125

第一节　考点梳理 1　排列与组合 ………… 125

第二节　考点梳理 2　概率 ………… 138

第三节 考点梳理3 统计初步 …… 144

第四节 基础过关 …… 146

第七章 平面几何 …… 159

第一节 考点梳理 …… 159

第二节 基础过关 …… 176

第八章 空间几何体 …… 190

第一节 考点梳理 …… 190

第二节 基础过关 …… 200

第九章 解析几何 …… 207

第一节 考点梳理 …… 207

第二节 基础过关 …… 221

第十章 名校冲刺 …… 227

名校冲刺1 算术 …… 227

名校冲刺2 代数式 …… 234

名校冲刺3 函数方程不等式 …… 243

名校冲刺4 应用题 …… 254

名校冲刺5 数列 …… 271

名校冲刺6 数据分析 …… 279

名校冲刺7 平面几何 …… 291

名校冲刺8 空间几何体 …… 309

名校冲刺9 解析几何 …… 315

解题习惯篇—问题求解题

(一)问题求解题是一种常规选择题,与其他数学考试中的选择题并无二致.每年真题中有15道,每题3分.由于199管理类联考非常重视解题速度,养成快速解题的做题习惯就尤为重要.但如果将这种解题习惯称之为“解题技巧”,笔者认为是欠妥的.

(二)良好的解题习惯分为两种情景:

1. **考试**:考试时以快为主,选出符合题意的选项即可,没必要也没时间深究;

2. **平时学习**:平时学习时首先以最快、最熟练的方法解题,然后还要再回头分析严格的推导步骤.

(三)选择题的快速解题习惯如下:(1)取特殊值;(2)选项代入题干验证.

切记:无论何时遇到难题都应先跳过,先易后难是解题的不二法则.

(四)实战演练

1.若 $a+b+c=0$,则 $a^3+a^2c-abc+b^2c+b^3$ 的值等于(　　)

(A)-2　　(B)-1　　(C)2　　(D)1　　(E)0

2.若数列$\{a_n\}$为等差数列,$a_p=q$,$a_q=p(p\neq q)$,则 a_{p+q} 的值等于(　　)

(A)$p+q$　　(B)$p-q$　　(C)0　　(D)$-(p+q)$　　(E)$\frac{p+q}{2}$

3.若方程 $x^2+px+q=0$ 的一个根是另一个根的2倍,则 p 和 q 应满足(　　)

(A)$p^2=4q$　　(B)$2p^2=9p$　　(C)$4p=9q^2$　　(D)$2p=3q^2$　　(E)$3p^2=2q^2$

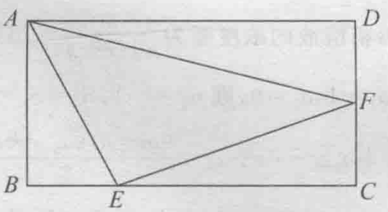
4.有浓度为30%的酒精若干,添加了一定数量的水之后浓度变为24%.如果再加入同样多的水,那么酒精溶液的浓度变为(　　)

(A)14%　　(B)16%　　(C)18%　　(D)20%　　(E)22%

5.在等差数列$\{a_n\}$中,若 $m>n$,$S_m=S_n$,那么 S_{m+n} 的值为(　　)

(A)0　　(B)mn　　(C)$m-n$　　(D)$m+n$　　(E)$2m-n$

6.已知矩形 $ABCD$ 的面积为16,三角形 ABE 的面积为2,三角形 ADF 的面积为4,那么三角形 AEF 的面积为(　　)



(A)6　　(B)6.4　　(C)7　　(D)7.2　　(E)8

7.一批学生划船,若乘大船,除一条船坐6人外,其余各条船均坐17人;若乘小船,除一条船坐2人外,其余各船均坐10人.已知这批学生人数超过100人,不到200人,则这批学生的具体人数为

(　　)人

(A)110　(B)126　(C)132　(D)142　(E)152

8. 已知 $a\in \mathbf{Z}$，关于 x 的方程 $a^2x^2-a(2a-1)x+a^2-a-2=0$ 正、负整数根各一个，则 a 等于(　　)

(A)0　(B)-1　(C)2　(D)1　(E)-2

9. 不等式 $\sqrt{2+x}\geqslant 4-x$ 的解为(　　)

(A)$x\geqslant 2$　(B)$x>2$　(C)$2\leqslant x\leqslant 4$　(D)$2<x<4$　(E)$x\leqslant 4$

10. 设 a,b,c 均为正数，若 $\frac{c}{a+b}<\frac{a}{b+c}<\frac{b}{c+a}$，则三个数的大小关系是(　　)

(A)$c<a<b$　(B)$b<c<a$　(C)$a<b<c$　(D)$c<b<a$　(E)$b<a<c$

(五)实战演练答案与解析

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
E	C	B	D	A	C	D	D	A	A

1. 【解析一】令 $a=b=c=0$，则 $a^3+a^2c-abc+b^2c+b^3=0$.

【解析二】$a^3+a^2c-abc+b^2c+b^3=(a^3+b^3)+(a^2c-abc+b^2c)$

$=(a+b)(a^2-ab+b^2)+c(a^2-ab+b^2)=(a^2-ab+b^2)(a+b+c)=0$.

2. 【解析一】令 $p=1,q=2$，则 $p+q=3,a_1=2,a_2=1\Rightarrow a_3=0$.

【解析二】$\because p\neq q,a_p-a_q=(p-q)d=q-p,\therefore d=-1,\therefore a_{p+q}=a_p+qd=q-q=0$.

3. 【解析一】令方程的两个根为 $x_1=1,x_2=2$，则 $x_1+x_2=-p,x_1x_2=q,\Rightarrow p=-3,q=2$，可快速排除 A,C,D,E 四个选项.

【解析二】$\because x_2=2x_1,x_1+x_2=-p,\therefore x_1=-\frac{p}{3},x_2=-\frac{2p}{3}$,

又 $\because x_1x_2=q,\therefore(-\frac{p}{3})(-\frac{2p}{3})=q,\therefore 2p^2=9q$.

4. 【解析一】令原溶液质量为 100g，设第一次加水 xg，则 $\frac{100\times 30\%}{100+x}=24\%\Rightarrow x=25$.

再加入同样多的水之后酒精溶液的浓度变为 $\frac{100\times 30\%}{100+x+x}=20\%$.

【解析二】设原溶液质量为 ag，设第一次加水 xg，则 $\frac{a\times 30\%}{a+x}=24\%\Rightarrow x=\frac{a}{4}$.

再加入同样多的水之后酒精溶液的浓度变为 $\frac{a\times 30\%}{a+x+x}=20\%$.

5. 【解析一】令 $m=2,n=1,a_1=1,a_2=0$，则 $a_3=-1,S_2=S_1=1,S_3=1+0+(-1)=0$.

【解析二】$\because S_m-S_n=a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_m=\frac{(m-n)(a_{n+1}+a_m)}{2}=0,\therefore a_{n+1}+a_m=0$.

$\because a_1+a_{m+n}=a_{n+1}+a_m,\therefore S_{m+n}=\frac{(m+n)(a_1+a_{m+n})}{2}=\frac{(m+n)(a_{n+1}+a_m)}{2}=0$.

6. 【解析一】令 $BC=8,AB=2$，则 $\because S_{\triangle ABE}=2,S_{\triangle ADF}=4,\therefore BE=2,DF=1$,

$\therefore EC=6,CF=1,\therefore S_{\triangle ECF}=3,\therefore S_{\triangle AEF}=16-2-4-3=7$.

【解析二】$\because \frac{S_{\triangle ABE}}{S_{ABCD}}=\frac{1}{8},\frac{S_{\triangle ADF}}{S_{ABCD}}=\frac{1}{4},\therefore BE=\frac{1}{4}BC,DF=\frac{1}{2}CD,\therefore EC=\frac{3}{4}BC,$

$\therefore CF=\frac{1}{2}CD,\therefore S_{\triangle ECF}=\frac{1}{2}EC\times CF=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}BC\times\frac{1}{2}CD=\frac{3}{16}S_{ABCD}=3,\therefore S_{\triangle AEF}=7.$

7.【解析一】选项代入题干验证. 因为 $142\div17=8\cdots6,142\div10=14\cdots2$,所以答案为 D.

【解析二】设有 x 条大船坐满 17 人,有 y 条小船坐满 10 人,则

$17x+6=10y+2\Rightarrow17x+4=10y\Rightarrow17x+4$ 的个位数字为 $0\Rightarrow x$ 的个位数字为 8.

又因为这批学生人数超过 100 人,不到 200 人,所以验证可知 $x=8\Rightarrow17x+6=142$.

8.【解析一】选项代入题干验证. 当 $a=0$ 时,原方程化为 $-2=0$,不符合题意,排除.

当 $a=1$ 时,原方程化为 $x^2-x-2=0$,符合题意,所以答案为 D.

【解析二】$a^2x^2-a(2a-1)x+a^2-a-2=0\Rightarrow a^2x^2-a(2a-1)x+(a-2)(a+1)=0$

$\Rightarrow[ax-(a-2)][ax-(a+1)]=0\Rightarrow x_1=1-\frac{2}{a},x_2=1+\frac{1}{a}$. 又 $\because a,x_1,x_2\in\mathbf{Z},\therefore a$ 为 2 和 1 的公约数 ±1. 当 $a=-1$ 时,$x_2=0$,不符合题意,所以 $a=1$.

【解析三】设方程两根为 x_1,x_2,则 $x_1x_2=a^2-a-2<0\Rightarrow-1<a<2$,又 $\because a\in Z,a\neq0$,所以 $a=1$.

9.【解析一】结合选项取特殊值. 令 $x=0,2,7$,可快速得正确答案.

【解析二】$2+x\geqslant0\Rightarrow x\geqslant-2$.

当 $4-x<0$,即 $x>4$ 时不等式恒成立;

当 $4-x\geqslant0$,即 $x\leqslant4$ 时,$\sqrt{2+x}\geqslant4-x\Rightarrow2+x\geqslant(4-x)^2\Rightarrow2\leqslant x\leqslant7\Rightarrow2\leqslant x\leqslant4$.

综上可知不等式解集为 $x\geqslant2$.

10.【解析一】结合选项取特殊值. 先验证 A:令 $c=1,a=2,b=3$,则 $\frac{c}{a+b}=\frac{1}{5},\frac{a}{b+c}=\frac{1}{2},\frac{b}{c+a}=1$

$\Rightarrow\frac{c}{a+b}<\frac{a}{b+c}<\frac{b}{c+a}$. A 满足题意,所以答案为 A.

【解析二】$\frac{c}{a+b}<\frac{a}{b+c}<\frac{b}{c+a}\Rightarrow\frac{c}{a+b}+1<\frac{a}{b+c}+1<\frac{b}{c+a}+1\Rightarrow\frac{a+b+c}{a+b}<\frac{a+b+c}{b+c}<\frac{a+b+c}{c+a}$

$\Rightarrow\frac{1}{a+b}<\frac{1}{b+c}<\frac{1}{c+a}\Rightarrow a+b>b+c>c+a\Rightarrow c<a<b.$

新题型篇—条件充分性判断

条件充分性判断题是一种新型选择题，每年真题中有10道，每题3分，考生失分严重.

1. 命题要求：

二、条件充分性判断：第16～25小题，每小题3分，共30分. 要求判断每题给出的条件(1)和条件(2)能否充分支持题干所陈述的结论. A,B,C,D,E五个选项为判断结果，请选择一项符合试题要求的判断，在答题卡上将所选项的字母涂黑.

A. 条件(1)充分，但条件(2)不充分

B. 条件(2)充分，但条件(1)不充分

C. 条件(1)和(2)单独都不充分，但条件(1)和(2)联合起来充分

D. 条件(1)充分，条件(2)也充分

E. 条件(1)和(2)单独都不充分，条件(1)和(2)联合起来也不充分

2. 题型结构：

例1 方程 $y=ax+b$ 过第二象限. 题干(结论)

(1) $a=-1$, $b=1$; 条件(1)

(2) $a=1$, $b=-1$. 条件(2)

例2 已知 n 是一个整数，则 $\frac{n}{14}$ 是一个整数. 题干(已知+结论)

(1) $\frac{n}{7}$ 是一个整数； 条件(1)

(2) $\frac{3n}{2}$ 是一个整数. 条件(2)

3. 充分性：

(1)定义：如果当条件 p 成立时，结论 q 一定成立，则称条件 p 是结论 q 的充分条件.

(2)充分性判定方法：

①反例法：只要能找到一个满足条件但推不出结论的例子，则该条件一定不充分. 举反例常用方法：特殊值法(0,1,−1等)、极端法(极大或极小、极端平等或极端不平等).

②代值验证：如果已知条件是简单的等量关系，则直接将其代入结论，如果结论成立则充分；如果结论不成立则不充分.

③子集判断：如果已知条件是结论的子集则充分(即 $p\subseteq q$)；否则不充分.

例3 判断以下条件能否推出结论

(1) $a>5 \xrightarrow{?} a>0$

(2) $x=1 \xrightarrow{?} x^2-1=0$

(3) $n+m=1 \xrightarrow{?} n=0, m=1$

(4)$a\geqslant 2\xrightarrow{?}(a-2)(a+1)>0$

(5)$a^2-3a+2=0\xrightarrow{?}a^4+a^3-7a^2-a+6=0$

(6)$x^2-4=0\xrightarrow{?}(x+1)(x-2)\geqslant 0$

(7)$x^2+y^2=1\xrightarrow{?}x+y\leqslant\frac{5}{4}$

(8)$m+n=4\xrightarrow{?}m\geqslant 2$ 或 $n\geqslant 2$

4. 选项设置：条件充分性判断属于选择题，每道题目的选项都相同，选项在试卷中只出现一次，要求考生必须记住每个选项，并且记住选项有助于猜答案.

选项	条件(1)	条件(2)	条件(1)、(2)联合
A	√	×	—
B	×	√	—
C	×	×	√
D	√	√	—
E	×	×	×

注 1:"√"表示条件充分，"×"表示条件不充分，"—"表示无需判断.

注 2:"条件(1)、(2)联合"指既满足条件(1)，又满足条件(2)的一个新条件，若两个条件都表示集合的话，此新条件则需要求两个集合的交集. 当交集是空集时，该条件肯定不充分.

5. 解题思路

自下而上	条件和结论都简单：直接自下而上判断充分性即可.
	条件复杂，结论简单：先将条件化简，再自下而上判断充分性.
	条件简单，结论复杂：先将结论化简，找其等价式，再自下而上判断充分性.

6. 蒙猜规律

(1)选 E 的题目偏少，绝大部分年份的 10 道考题中只有一道选 E;

(2)条件充分性判断的压轴题以选 C 居多;

(3)两条件互补型：当两条件各自都明显缺条件时，属于互补型，一般选 C 的可能性较大;

(4)两条件矛盾型：当两条件矛盾时无须联立，一般选 A、B 或 D;

(5)两条件等价型：当两条件为等价命题时，一般考虑选 D;

(6)两条件包含型：当两条件具备包含关系时，一般倾向于选择范围小的条件充分.

7. 实战演练

1. $x^2+bx+1=0$ 有两个不同的实数根.

(1)$b<-2$;　　(2)$b>2$.

2. 某商品经过八月份与九月份连续两次降价，售价由 m 元降到 n 元. 则该商品的售价平均每次下降 20%.

(1)$m-n=900$;　　(2)$m+n=4\ 100$.

3. 设$\{a_n\}$是等比数列，则 $a_2=2$.

(1)$a_1+a_3=5$;　　(2)$a_1a_3=4$.

4. 已知 a,b 是实数，则 $a>b$.

(1)$a>b^2$；　　(2)$a^2>b$.

5.已知某公司男员工的平均年龄和女员工的平均年龄，则能确定该公司员工的平均年龄.

(1)已知该公司员工的人数；　　(2)已知该公司男、女员工的人数之比.

6.不等式$(k+3)x^2-2(k+3)x+k-1<0$，对x的任意数值都成立.

(1)$k=0$；　　(2)$k=-3$.

7.数列$\{a_n\}$的前k项和$a_1+a_2+\cdots+a_k$与随后k项和$a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_{2k}$之比与$k$无关.

(1)$a_n=2n-1(n=1,2,\cdots)$；　　(2)$a_n=2n(n=1,2,\cdots)$.

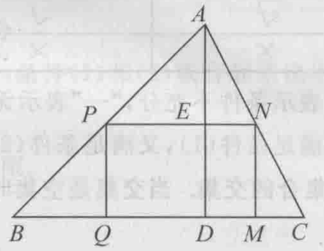
8.$\frac{c}{a+b}<\frac{a}{b+c}<\frac{b}{c+a}$.

(1)$0<c<a<b$；　　(2)$0<a<b<c$.

9.$x>y$.

(1)$x^2>y$；　　(2)$\sqrt{x}>y$.

10.如图所示，$\triangle ABC$的高$|AD|=80$，$|BC|=120$，则矩形$PQMN$的面积为2 400.



(1)$|QM|=60$；　　(2)$|MN|=40$.

答案与解析

例1 条件(1)直线$y=-x+1$过第二象限，充分.

条件(2)直线$y=x-1$不过第二象限，不充分. 答案A

例2 条件(1)反例$n=7$，不充分. 条件(2)反例$n=2$，不充分.

两条件联立：n既是7的倍数，又是2的倍数，所以$\frac{n}{14}$是一个整数，充分. 答案C.

例3

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
√	√	×	×	√	√	×	√

实战演练

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	C	E	C	B	B	A	A	C	D

1.$\because x^2+bx+1=0$有两个不同的根$\Leftrightarrow b<-2$或$b>2$，$\therefore$两条件都充分.

2.条件(1)：反例$m=900$，$n=0$，不充分. 条件(2)：$m=4\ 100$，$n=0$，不充分.

两条件联立：$\begin{cases}m-n=900\\m+n=4\ 100\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=2\ 500\\n=1\ 600\end{cases}$. 设该商品的售价平均每次下降$x$，则$m(1-x)^2=n$

$\Rightarrow x=20\%$，充分.

3.条件(1):反例 $a_1=1,a_3=4\Rightarrow a_2=\pm2$,不充分.

条件(2):反例 $a_1=1,a_3=4\Rightarrow a_2=\pm2$,不充分.

两条件联立反例 $a_1=1,a_3=4\Rightarrow a_2=\pm2$,不充分.

4.条件(1):反例 $a=\frac{1}{3},b=\frac{1}{2}$,不充分.条件(2):反例 $a=-2,b=1$ 不充分.

两条件联立:当 $b\leqslant0$ 时,$\because a>b^2\geqslant0,\therefore a>b$;

当 $b>0$ 时,$\because\begin{cases}a>b^2\\a^2>b\end{cases}\Rightarrow a^2+a>b^2+b\Rightarrow(a-b)[(a+b)+1]>0$,

又 $\because a>b^2>0,b>0\Rightarrow a+b+1>0,\therefore a-b>0\Rightarrow a>b$,充分.

5.条件(1):公司员工平均年龄随男女人数变化而变化,无法确定,不充分.

条件(2):男、女员工平均年龄记为 α,β;男、女员工人数之比记为 $a:b$.

设男、女员工分别为 ka,kb,则该公司员工的平均年龄为 $\frac{ka\cdot\alpha+kb\cdot\beta}{ka+kb}=\frac{a\alpha+b\beta}{a+b}$,充分.

6.条件(1):$k=0$ 时,原式化为 $3x^2-6x-1<0$,抛物线开口向上,不充分.

条件(2):$k=-3$ 时,原式化为 $-4<0$ 恒成立,充分.

7.条件(1):$a_n-a_{n-1}=(2n-1)-[2(n-1)-1]=2\Rightarrow\{a_n\}$ 是首项为1,公差为2的等差数列.

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_{2k}}=\frac{\frac{k(a_1+a_k)}{2}}{\frac{k(a_{k+1}+a_{2k})}{2}}=\frac{a_1+a_k}{a_{k+1}+a_{2k}}=\frac{2a_1+(k-1)d}{2a_1+(3k-1)d}=\frac{k}{3k}=\frac{1}{3}$$,充分.

条件(2):$a_1=2,a_2=4,a_3=6,a_4=8\Rightarrow\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{a_1+a_2}{a_3+a_4}$,不充分.

8.当 a,b,c 皆大于0时,$\frac{c}{a+b}<\frac{a}{b+c}<\frac{b}{c+a}\Leftrightarrow\frac{c}{a+b}+1<\frac{a}{b+c}+1<\frac{b}{c+a}+1$

$\Leftrightarrow\frac{a+b+c}{a+b}<\frac{a+b+c}{b+c}<\frac{a+b+c}{c+a}\Leftrightarrow\frac{1}{a+b}<\frac{1}{b+c}<\frac{1}{c+a}\Leftrightarrow a+b>b+c>c+a\Leftrightarrow c<a<b$.

所以条件(1)充分;条件(2)不充分,反例 $a=1,b=2,c=3$.

9.条件(1):反例 $x=-2,y=1$,不充分.条件(2):反例 $x=\frac{1}{4},y=\frac{1}{3}$,不充分.

两条件联立:首先由条件(2)知 $x\geqslant0$.

又因为当 $0<x<1$ 时,$x>x^2>y$;当 $x>1$ 时,$x>\sqrt{x}>y$;当 $x=0,1$ 时,$x=x^2>y$;

所以 $x>y$,联立充分.

10.$\begin{cases}\triangle APN\backsim\triangle ABC\\\triangle BPQ\backsim\triangle BAD\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{|PN|}{|BC|}=\frac{|AP|}{|AB|}\\\frac{|PQ|}{|AD|}=\frac{|BP|}{|BA|}\end{cases}\Rightarrow\frac{|PN|}{|BC|}+\frac{|PQ|}{|AD|}=\frac{|AP|}{|AB|}+\frac{|BP|}{|BA|}=1$

$\Rightarrow\frac{|QM|}{120}+\frac{|MN|}{80}=1$.

条件(1):$\because|QM|=60,\therefore|MN|=40,\therefore$ 矩形 $PQMN$ 的面积为2 400,充分.

条件(2):$\because|MN|=40,\therefore|QM|=60,\therefore$ 矩形 $PQMN$ 的面积为2 400,充分.

第一章 算 术

第一节 考点梳理

一、实数的概念与运算

- 实数
  - 有理数
    - 整数
      - 正整数 } 自然数
      - 0 } 自然数
      - 负整数
    - 分数
      - 有限小数：$1.2,-0.5,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{5}$
      - 无限循环小数：$0.\dot{3},0.\dot{2}\dot{3},\frac{1}{6},\frac{1}{9}$
  - 无理数—无限不循环小数：$\pi,\sqrt{2},e,\lg 5$

1.任何一个有理数都可以写成$\frac{q}{p}$的形式；且$\frac{q}{p}$一定为有理数(其中 p,q 均为整数，且 $p\neq 0$).

【例 1】m 是一个整数.

(1)若 $m=\frac{q}{p}$，其中 p 和 q 为非零整数，且 $\log_2 3m$ 是一个整数；

(2)若 $m=\frac{q}{p}$，其中 p 和 q 为非零整数，且$\frac{2m+4}{m+1}$是一个整数.

【解析】$m=\frac{q}{p}\Rightarrow m$ 是一个有理数$\Rightarrow m$ 是整数或分数.

条件(1)：设 $\log_2 3m=n$，则 $3m=2^n\Rightarrow m=\frac{2^n}{3}$，$\therefore m$ 一定是一个分数，反例 $m=\frac{2}{3}$.

条件(2)：$\frac{2m+4}{m+1}=\frac{2(m+1)+2}{m+1}=2+\frac{2}{m+1}$，易得反例 $m=-\frac{1}{2}$.

两条件联立也不充分，因为由条件(1)知 m 一定是分数. 答案 E

2.有理数与无理数的四则运算

(1)有理数＋－×÷有理数＝有理数

(2)无理数＋－×÷无理数＝有理数或无理数

(3)非 0 有理数＋－×÷无理数＝无理数

特殊：有理数 0×÷无理数＝有理数 0，得如下推论：

若 a,b 为有理数，α 为无理数，且 $a\alpha=b$，则 $a=b=0$.(√)

【例 2】若 x,y 都是有理数，且满足方程$\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{3}\right)x+\left(\frac{1}{3}+\frac{\pi}{2}\right)y-4-\pi=0$，则 $x-y$ 的值等于( )

(A)12 (B)-6 (C)6 (D)18 (E)20

【解析】$\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{3}\right)x+\left(\frac{1}{3}+\frac{\pi}{2}\right)y-4-\pi=0\Rightarrow\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}-4\right)+\pi\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{2}-1\right)=0$，由上述结论可得$\begin{cases}\frac{x}{2}+\frac{y}{3}-4=0\\ \frac{x}{3}+\frac{y}{2}-1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x+2y-24=0\\ 2x+3y-6=0\end{cases}$，两方程做差得 $x-y-18=0$. 答案 D

【例 3】已知 a 是无理数，$a(a+1)$ 是有理数，那么在 a^2，$(a-1)(a+2)$，$(a+1)^2$，$a^2(a+1)$ 四个数字中，有(　　)个是无理数.

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)4　　(E)0

【解析】$a^2=a(a+1)-a$ 是无理数；$(a-1)(a+2)=a^2+a-2=a(a+1)-2$ 是有理数；$(a+1)^2=a^2+2a+1=a(a+1)+a+1$ 是无理数；$a(a+1)\neq0$，$\therefore a^2(a+1)=a\times a(a+1)$是无理数. 答案 C

二、整数的概念与运算

1. 整除：当整数 a 除以非零整数 b，商为整数且无余数时，则称 a 能被 b 整除或 b 能整除 a.

2. 约数、倍数（√）：当 a 能被 b 整除或 b 能整除 a 时，称 a 是 b 的倍数，b 是 a 的约数. 例如 2 的约数为 ±1，±2. 零能被任何非零整数整除.

如果一个整数同时是几个整数的约数(倍数)，称这个整数为它们的公约数(公倍数).

3. 短除法求最大公约数和最小公倍数

$$\begin{array}{r|ll} a_1 & m_1 & n_1 \\ \hline a_2 & m_2 & n_2 \\ \hline a_3 & m_3 & n_3 \\ \hline \cdots & & \\ a_p & m_p & n_p \\ \hline & Q_1 & Q_2 \end{array}\qquad\begin{array}{r|ll} 2 & 24 & 30 \\ \hline 3 & 12 & 15 \\ \hline & 4 & 5 \end{array}$$

m_1，n_1 的最大公约数为 $a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_p$；最小公倍数为 $a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_p\times Q_1\times Q_2$；

(1)Q_1，Q_2 互质；

(2)两个正整数的最大公约数与最小公倍数之积等于这两个数之积，即$(a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_p)\times(a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_p\times Q_1\times Q_2)=m_1n_1$；

(3)多个数求最小公倍数要除到两两互质，例如

$$\begin{array}{r|lll} 2 & 4 & 6 & 8 \\ \hline 2 & 2 & 3 & 4 \\ \hline & 1 & 3 & 2 \end{array}$$

4，6，8 的最大公约数为 2；4，6，8 的最小公倍数为 $2\times2\times1\times3\times2=24$.

4. 从 1 到 N 的自然数中，能被 a 和 b 整除的数字个数为：(√)

$n=\left[\frac{N}{a\text{ 与 }b\text{ 的最小公倍数}}\right]$；($[n]$表示不大于 n 的最大整数)

从 1 到 N 的自然数中，能被 a 或 b 整除的数字个数为：(√)

$n=\left[\frac{N}{a}\right]+\left[\frac{N}{b}\right]-\left[\frac{N}{a\text{与}b\text{的最小公倍数}}\right]$.

【例 4】四个互不相等的整数 a,b,c,d,其积为 9,则其和为(　　)

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)4　　(E)0

【解析】$abcd=9$,所以 a,b,c,d 都是 9 的约数. 9 的约数有 $\pm1,\pm3,\pm9$,而 a,b,c,d 之中不可能有 ±9(否则其积不可能为 9),所以这四个数为 $\pm1,\pm3$,其和为 0. 答案 E

【例 5】n 是 5 的倍数.

(1)$\frac{2n}{10}\in\mathbf{Z}$;　(2)$\frac{7n}{5}\in\mathbf{Z}$.

【解析】条件(1):$\frac{2n}{10}\in\mathbf{Z}$,即 $\frac{n}{5}\in\mathbf{Z}$,可记 $n=5k(k\in\mathbf{Z})$,所以 n 是 5 的倍数,充分.

条件(2):反例 $n=\frac{5}{7}$,不充分. 答案 A

【例 6】两个正整数的最大公约数是 6,最小公倍数是 144,满足条件的正整数有(　　)对.

(A)0　　(B)1　　(C)2　　(D)3　　(E)4

【解析】设这两个数分别为 $6a,6b$,则:

$$\begin{array}{r|ll} 6 & 6a & 6b \\ \hline & a & b \end{array}$$

$6ab=144\Rightarrow ab=24=1\times24=3\times8$,此时这两个正整数分别为 $6a=6,6b=144$,或 $6a=18$,$6b=48$. 答案 C

【例 7】一块长方形草地,长 120 米,宽 90 米,现在在它的四周种树,要求四个角都种树,且相邻两棵树之间的距离都相等,则至少要种(　　)棵树.

(A)14　　(B)18　　(C)10　　(D)42　　(E)140

【解析】由题可知要使得种的树少,即求 120 与 90 的最大公约数,可知为 30,因此至少要种 $(120+90)\times2\div30=14$(棵). 答案 A

【例 8】从 1 至 100 的自然数中,能被 2 或 3 整除的自然数有(　　)个

(A)84　　(B)83　　(C)16　　(D)67　　(E)68

【解析】$n=\left[\frac{100}{2}\right]+\left[\frac{100}{3}\right]-\left[\frac{100}{6}\right]=50+33-16=67$. 答案 D

4. 质数、合数 (√):质数又称素数,指大于 1 的整数中,只有 1 和其本身两个正约数的数.

合数指大于 1 的整数中,除了 1 和其本身之外还有其他正约数的数.

(1)常考质数(20 以内质数):2,3,5,7,11,13,17,19;

(2)最特殊的质数(唯一偶质数):2;

(3)合数的质因数分解:任何一个合数都可以分解为几个质数之积;

(4)若将一个质数分解为两个整数之积,则其只能分解为 1 和其本身或 -1 和其相反数.

【例 9】有一个三口之家,其家庭成员今年的年龄都是质数,且女儿的年龄加上妈妈的年龄恰好等于爸爸的年龄,那么女儿今年(　　)岁.