从代数基本定理到超越数

一段经典数学的奇幻之旅

第二版

冯承天◎著

Johann Carl Friedrich Gauss

1777 年 -1855 年

华东师范大学出版社

代数基本定理讲些什么？它是如何证明的？圆周率 π 是怎样得出的？怎样证明它是一个无理数？怎样证明它是一个超越数？自然对数的底 e 是怎样定义的？怎样证明它是一个无理数？怎样证明它是一个超越数？

本书试图在高中数学和微积分初步的基础上，把多项式理论、线性代数、域论，以及分析学中的一些概念、理论和方法串在一起详加论述．从“从求解多项式方程到代数基本定理”、“代数基本定理的证明”、“圆周率 π 和自然对数底 e，及其无理性”、“有关多项式与扩域的一些理论”、“代数扩域、有限扩域以及尺规作图”、“π 以及 e 是超越数”六个方面逐步展开，尽可能地用深入浅出的详细论述去解答上述问题．

本书可供高中学生、理工科大学生、大中学校数学教师，以及广大数学爱好者阅读和参考．

ISBN 978-7-5675-8737-3

9 787567 587373 >

定价：42.00元

www.ecnupress.com.cn

从代数基本定理到超越数

一段经典数学的奇幻之旅

第二版

冯承天◎著

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

从代数基本定理到超越数：一段经典数学的奇幻之旅/冯承天著.
—2版.—上海：华东师范大学出版社，2019
ISBN 978-7-5675-8737-3

Ⅰ.①从… Ⅱ.①冯… Ⅲ.①数学—普及读物
Ⅳ.①O1-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 019373 号

从代数基本定理到超越数

——一段经典数学的奇幻之旅(第二版)

著　　者　冯承天
策划组稿　王　焰
项目编辑　王国红
审读编辑　陈　震
责任校对　王丽平
封面设计　卢晓红

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路 3663 号　邮编 200062
网　　址　www.ecnupress.com.cn
电　　话　021-60821666　行政传真 021-62572105
客服电话　021-62865537　门市(邮购)电话 021-62869887
地　　址　上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网　　店　http://hdsdcbs.tmall.com

印 刷 者　常熟市文化印刷有限公司
开　　本　787×1092　16 开
印　　张　11.5
字　　数　167 千字
版　　次　2019 年 8 月第 2 版
印　　次　2019 年 8 月第 1 次
书　　号　ISBN 978-7-5675-8737-3
定　　价　42.00 元

出 版 人　王　焰

从一元一次方程到伽罗瓦理论（第二版）

从求解多项式方程到阿贝尔不可能性定理
——细说五次方程无求根公式（第二版）

从代数基本定理到超越数
——一段经典数学的奇幻之旅（第二版）

从矢量到张量　*待出*

从空间曲线到黎曼几何　*待出*

献给热爱研读数学的朋友们

总序

早在20世纪60年代,笔者为了学习物理科学,有幸接触了很多数学好书。比如:为了研读拉卡(G. Racah)的《群论和核谱》①,研读了弥永昌吉、杉浦光夫的《代数学》②;为了翻译卡密里(M. Carmeli)和马林(S. Malin)的《转动群和洛仑兹群表现论引论》③、密勒(W. Miller. Jr)的《对称性群及其应用》④及怀邦(B. G. Wybourne)的《典型群及其在物理学上的应用》⑤等,仔细研读了岩崛长庆的《李群论》⑥……

学习的过程中,我深深感到数学工具的重要性.许多物理科学领域的概念和计算,均需要数学工具的支撑.然而,很可惜:关于群的起源的读物很少,且大部分科普读物只有结论而无实质性内容,专业的伽罗瓦理论则更是令普通读者望文生畏进而却步;如今,时间已过去半个多世纪,我也年逾古稀,得抓紧时机提笔,同广大数学爱好者们重温、分享这些重要的数学知识,一起体验数学之美之乐.

深入浅出地阐明伽罗瓦理论是一个很好的切入点,不过,近世代数理论比较抽象,普通读者很难理解并入门.这就要求写作者必须尽可能考虑普通读者的阅读基础,体会到初学者感到困难的地方,尽量讲清楚每一个数学推导的细节.其实,群的概念正是从数学家对根式求解的探索中诞生的,于是,我想就从历史上数学家们对多项式方程的根式求解如何求索讲起,顺势引出群的概念,帮助读者了解不仅在物理学领域,而且在化学、晶体学等学科中的

① 梅向明译,高等教育出版社,1959.
② 熊全淹译,上海科学技术出版社,1962.
③ 栾德怀,张民生,冯承天译,华中工学院,1978.
④ 栾德怀,冯承天,张民生译,科学出版社,1981.
⑤ 冯承天,金元望,张民生,栾德怀译,科学出版社,1982.
⑥ 孙泽瀛译,上海科学技术出版社,1962.

应用也十分广泛的群论的起源.

2012 年,我的第一本——《从一元一次方程到伽罗瓦理论》出版. 从一元一次方程说起,一步步由浅入深、循序渐进,直至伽罗瓦——一位极年轻的天才数学家,详述他是如何初创群与域的数学概念,如何完美地得出一般多项式方程根式求解的判据. 图书付梓之后,承蒙读者抬爱,多次加印,这让笔者受到很大鼓舞.

于是,我写了第二本——《从求解多项式方程到阿贝尔不可能性定理——细说五次方程无求根公式》. 这本书的起点稍微高一些,需要读者具备高中数学的基础. 仍从多项式方程说起,但是,期望换一个角度,在"不用群论"的情况下,介绍数学家得出"一般五次多项式方程不可根式求解"结论(也即"阿贝尔不可能性定理")的过程. 在这本书里,我把初等数论、高等代数中的一些重要概念与理论串在一起详细介绍. 比如:为了更好地诠释阿贝尔理论,使之可读性更强一些,我用克罗内克定理来推导出阿贝尔不可能性定理等;为了向读者讲清楚克罗内克方法,引入了复共轭封闭域等新的概念,同时期望以一些不同的处理方法,对第一本书《从一元一次方程到伽罗瓦理论》所涉及的内容作进一步的阐述.

写作本书的过程中,我接触到一份重要的文献——H. Dörrie 的 *Triumph der Mathematik: hundert berühmte Probleme aus zwei Jahrtausenden mathematischer Kulture*, Physica-Verlag, Würzburg, Germany, 1958. 其中的一篇,论述了阿贝尔理论. 该书的最初版本为德文,而该文的内容则过于简略,已经晦涩难懂,加上中译本系在英译本的基础上译成,等于是在英译德的错误基础上又添了中译英的错误,这就使得该文成了实实在在的"天书". 在笔者的努力下,阿贝尔理论终于有了一份可读性较强的诠释. 衷心期望广大数学爱好者,除了学好数学,也多学一点外语,这样,碰到重要的文献,能够直接查询原版,读懂弄通,此为题外话.

写成以上两本之后,仍感觉需要进一步补充和提高,于是写了第三本——《从代数基本定理到超越数——一段经典数学的奇幻之旅》. 本书在写作方式上,继续沿用前两本的方式,从普通读者知晓的基本的代数知识出发,循序渐进地阐明数学史上的一系列重要课题,比如:数学家们如何证明代数基本定理,如何证明 π 和 e 是无理数,并继而证明它们是超越数,期望使读者在阅读本书的过程中,掌握多项式理论、域论、尺规作图理论等;也期望在这本书里,对第一本、第二本未讲清楚的地方继续进行补充.

借这三本书再版的机会，我对初版存在的印刷错误进行了修改，对正文的内容进行了补充与完善，使之可读性更强，力求自成体系.

另外，借"总序"作一个小小的新书预告. 关于本系列，笔者期望再补充两本：第四本是《从矢量到张量》，第五本是《从空间曲线到黎曼几何》. 笔者认为"矢量与张量""空间曲线与黎曼几何"都是优美而且有重大应用的数学理论，都应该而且能够被简洁明了地介绍给广大数学爱好者。

衷心期望数学——这一在自然科学和人文科学中都有重大应用的工具，能得到更大程度的普及，期望借本系列出版的机会，与更多的数学、物理学工作者，数学、物理学爱好者，普通读者分享数学的知识、方法及学习数学的意义，期望大家学习数学的同时，能体会到数学之美，享受数学！

冯承天

2019 年 4 月 4 日

于上海师范大学

前言

学非探其花，要自拔其根.

——〔唐〕杜牧《留诲曹师等诗》

简略地说，本书讨论了“代数基本定理”、“圆周率 π 既是无理数又是超越数”，以及“自然对数的底 e 既是无理数又是超越数”这三大数学课题. 为此我们讨论了数系的扩张、复数的应用、解析函数的积分、多项式理论、扩域理论、代数数论，以及康托尔的对角线方法等. 当然，随之就有不少的“副产品”，如：对称多项式基本定理、代数元域、尺规作图，以及三大古典几何难题等.

代数基本定理——$n(>0)$次复系数多项式方程有 n 个复数根，是 1799 年高斯在他的博士论文中首次较严格地证明的. 高斯以后的数学家们用了 100 多种不同的方法证明了该定理，这足以说明该定理在代数学上的重要性. 在本书中，我们用三种不同的方法或阐明或证明了这一定理.

关于圆周率 π，我们应用了我国魏晋时数学家刘徽的光辉的割圆术思想证明了它是一个与圆半径无关的常数，然后先证明它是一个无理数，并最终证明了埃尔米特定理：π 是一个超越数.

对于自然对数的底 e，我们先从它的极限定义出发得出了有关它的一些重要公式及应用，接着再证明它是一个无理数，并最终证明了林德曼定理：e 是一个超越数.

为了能与广大数学爱好者一起学习这些重大定理，以及为了证明它们所必须研读的经典数学中的一些精彩内容，并与大家一起分享其中的数学之美，笔者撰写的这本书起点较低：从数系的扩张和运算谈起；把有关的多项式理论与域的理论尽量讲得详尽且深入浅出；书中包括许多实例和应用，可供

读者消化、推敲和练习，而且尽力做到前呼后应. 为了克服论述这些专题的各种文献中的种种晦涩难懂、叙述过简与不清的毛病，我们用一种“详述”的方式，同时也尽量使本书在数学内容上自成体系.

不过，笔者还是在书后的参考文献中列出了自己在研读这些专题和撰写本书时读过的部分好书与文献，希望对那些想继续深入研究的读者有所帮助.

一系列的数学实践使笔者深信：一位有高中数学基础且掌握微积分初步概念的读者，只要勤于思考，一定能理解书中的这些在其他数学分支中也极有用的基础数学知识和定理，从而提高自己的数学修养；只要乐于思考，也就一定能掌握本书中所使用的数学方法，同时给自己带来数学之美的享受.

最后，感谢首都师范大学栾德怀教授的长期关心、教导和鞭策. 感谢上海师范大学数学系陈跃副教授，他推荐了许多参考资料，仔细审读了手稿，并提出了许多宝贵的意见和建议. 感谢华东师范大学出版社的王焰社长及各位编辑，他们为本书的出版给予极大的支持与帮助.

希望本书能成为广大数学爱好者学习和掌握上述课题的可读性较强的读物，也极希望得到大家的批评与指正.

2016 年 8 月于上海师范大学

内 容 简 介

本书共分六个部分，十四章，是论述代数基本定理以及证明“π与e是超越数”的一本入门读物，也是一段经典数学的奇幻之旅.

在第一部分中，从多项式方程的解和数系的扩张谈起，详述了有理数与循环小数，讨论了在黄金分割与黄金三角形，以及斐波那契数列中出现的无理数，由二元数的观点引入复数，最后阐明了代数基本定理的内容. 在第二部分中，用三种不同的方法说明或证明了代数基本定理，这就表明了复数域是代数闭域. 在第三部分中，从定义圆周率π以及自然对数的底e开始，最后严格地证明了它们是无理数. 在第四部分中，阐明了关于多项式的一些概念和理论，其中有贝祖等式、高斯引理、艾森斯坦不可约判据，以及对称多项式基本定理等，也详述了有关扩域的一些理论，包括代数元、代数元域，以及单代数扩域等. 在第五部分中，主要研究了代数扩域与有限扩域，并应用这些理论讨论了三大古典几何作图问题. 在第六部分中，阐述了康托尔的对角线法，并依此证明了超越数的存在，简洁地证明了刘维尔定理以及刘维尔数是超越数，进而严格地证明了e是超越数的埃尔米特定理，以及π是超越数的林德曼定理.

本书还有六个附录：附录1推导了斐波那契数列的通项公式——比奈公式；附录2讨论了一些函数的级数展开，从而最终阐明了正文中表示π的格雷戈里-莱布尼茨表达式；附录3叙述了古印度数学家马德哈瓦用正切函数的级数展开计算π的方法；附录4借助复数导出了π的另两个级数表示，这表明了数学内在的统一和优美；附录5对多项式基本定理中多项式$g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的唯一性给出了详尽的证明；附录6对正文中要用到的线性方程组的求解理论作出了简要的说明.

本书起点较低，叙述详尽，论证严格，举例丰富，前后呼应，数学内容自成体系，是一本深入浅出，既可供数学爱好者系统地学习和掌握新知识和方法，扩展视野，又能使他们欣赏到数学之美的可读性较强的读物.

目　录

第一部分　从求解多项式方程到代数基本定理

第二部分　代数基本定理的证明

第三部分 圆周率 π 和自然对数底 e，及其无理性

第四部分 有关多项式与扩域的一些理论

第六部分 π以及e是超越数