# 非凸二次规划问题的全局优化方法及其应用

路　程　著

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

# 非凸二次规划问题的全局优化方法及其应用

路 程 著

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn
· 北京 ·

## 内　容　提　要

在非线性优化领域，二次规划问题是最具代表性的问题之一。

本书主要讨论非凸二次规划问题的全局优化算法设计策略，对不同类型的算法进行总结，并介绍作者在该领域的最新研究成果，主要内容包括非凸二次规划问题的凸松弛方法、基于线性松弛与凸二次松弛的分支定界算法、基于半正定松弛的分支定界算法等。

本书结构合理，条理清晰，内容丰富新颖，可供相关工程技术人员参考使用。


**图书在版编目(CIP)数据**

非凸二次规划问题的全局优化方法及其应用/路程著. —北京：中国水利水电出版社，2019.4

ISBN 978-7-5170-7630-8

Ⅰ. ①非…　Ⅱ. ①路…　Ⅲ. ①二次规划—研究　Ⅳ. ①O221.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 074483 号

| | |
|---|---|
| 书　　名 | 非凸二次规划问题的全局优化方法及其应用　FEI TU ERCI GUIHUA WENTI DE QUANJU YOUHUA FANGFA JI QI YINGYONG |
| 作　　者 | 路　程　著 |
| 出版发行 | 中国水利水电出版社<br>(北京市海淀区玉渊潭南路 1 号 D 座 100038)<br>网址：www.waterpub.com.cn<br>E-mail：sales@waterpub.com.cn<br>电话：(010)68367658(营销中心) |
| 经　　售 | 北京科水图书销售中心(零售)<br>电话：(010)88383994、63202643、68545874<br>全国各地新华书店和相关出版物销售网点 |
| 排　　版 | 北京亚吉飞数码科技有限公司 |
| 印　　刷 | 三河市华晨印务有限公司 |
| 规　　格 | 170mm×240mm　16 开本　11.5 印张　206 千字 |
| 版　　次 | 2019 年 6 月第 1 版　2019 年 6 月第 1 次印刷 |
| 印　　数 | 0001—2000 册 |
| 定　　价 | 55.00 元 |

# 前 言

在非线性优化领域，二次规划问题是最具代表性的问题之一。该问题作为基本数学模型，广泛应用于信号处理、通信技术、电力系统、计算机科学、经济学等不同领域。在实际应用中，很多具体的二次规划问题具有非凸性。设计高效率全局优化算法求解非凸二次规划问题是一项非常具有挑战性的任务。

在实际应用中，针对非凸二次规划问题，现有方法通常采用局部优化算法或近似算法，以较高的效率得到问题的次优解。然而，针对具体的问题类型，现有局部优化算法或近似算法所得到的次优解的近似比经常无法达到令人满意的质量。为了克服近似算法的缺陷，我们试图设计相对有效的全局优化算法。通常情况下，该类算法具有指数复杂度。然而，在具体应用中，对于中小规模的问题，该类算法的计算效率仍可在一定程度上满足实际需求。

本书主要讨论非凸二次规划问题的全局优化算法设计策略，对不同类型的算法进行总结，并介绍作者在该领域的最新研究成果。全局优化理论与方法还在不断地发展着，本书希望使刚进入全局优化领域的初学者和研究人员对相关方法有个初步的了解，还希望读者初步掌握全局优化算法的设计技巧，因此提供了很多算法设计的细节信息，特别附上了主要算法的伪代码，以及相关数值实验结果，希望由此提高本书所介绍方法的可操作性。

全书共分为三部分。第一部分包含第 1 章和第 2 章，分别介绍了全局优化方法的概念以及研究进展，并对非凸二次规划问题的各类凸松弛策略加以总结。第二部分包括第 3 章至第 6 章，分别介绍了线性松弛、凸二次松弛、半正定松弛等不同松弛策略在分支定界算法中的应用。第三部分包括第 7 章至第 9 章，主要讨论全局优化方法在通信、电力领域的实际应用。

据作者所知，目前国内还没有论著专门介绍非凸二次规划问题全局优化算法的设计策略，本书的目的就在于提供这样一份资料。限于作者的知

识范围，肯定有不少相关算法设计策略没有被收集进来，恳请读者不吝指教。

最后，特别感谢国家自然科学基金（项目号：11701177、11771243）和中央高校基本科研业务费专项资金（项目号：2017MS058、2018ZD14）的资助。

路　程

2019 年 1 月

# 目　录

# 第1章 引 言

二次规划问题是一类经典的非线性优化问题。该问题作为基本的数学规划模型，在石油、电力、通信、信息技术、计算机科学等领域具有重要应用。例如，工程技术中的电力系统潮流计算问题[1,2]、通信系统中的波束形成问题[3]、信号处理中的相位恢复问题[4]等，均可建模为二次规划问题。除工程领域外，二次规划在风险资产投资组合[5,6]、模式识别[7]等领域同样具有非常广泛的应用。另外，二次规划也是数学规划领域最重要的问题之一。很多经典优化问题，如 0-1 二次规划问题[8]、标准二次规划问题[9]、箱式约束二次规划问题[10]、混合整数二次规划问题[11]，均是重要的二次规划子类问题。对二次规划问题的相关理论与算法进行深入研究，不仅有助于促进非线性优化领域发展，而且有利于推动工程优化和管理科学相关领域的技术进步。

本书以二次规划作为研究主题，重点研究非凸二次规划问题的全局优化方法。本章将介绍二次规划问题的一般形式，并讨论全局优化方法的研究背景和研究意义，由此展开全书的主题。

## 1.1 二次规划问题模型

二次规划问题按变量类型可分为实变量二次规划问题和复变量二次规划问题。在经典的数学规划领域，学者们对实变量二次规划问题进行了非常广泛的研究。然而，在通信、信号处理、电力系统等领域，由于相关工程优化模型通常可建模为复变量二次规划问题[12]。因此，对复变量二次规划问题进行研究同样具有重要的实际意义。在本节，我们分别介绍实变量二次规划问题和复变量二次规划问题的一般形式。

### 1.1.1 实变量二次规划问题

首先定义如下形式的实变量二次约束二次规划问题：

$$\min \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_0x + c_0^{\mathrm{T}}x$$
$$\text{s. t. } \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_ix + c_i^{\mathrm{T}}x - b_i \leqslant 0,\ i = 1,2,\cdots,m \tag{QCQP}$$

其中,决策变量 $x\in\mathbf{R}^n$,且对任意 $i=0,1,\cdots,m$,$\boldsymbol{Q}_i$ 为 $n\times n$ 实对称方阵,$c_i$ 为 $\mathbf{R}^n$ 空间中的列向量,$b_i$ 为实数。

(QCQP)实际上是最具一般性的连续变量二次规划问题形式,包含了不同类型的二次规划子类问题。例如,若对任意 $i=1,2,\cdots,m$,二次项矩阵 $\boldsymbol{Q}_i$ 均为零,则该问题退化为如下形式的线性约束二次规划问题。

$$\min \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_0x + c_0^{\mathrm{T}}x$$
$$\text{s. t. } c_i^{\mathrm{T}}x \leqslant b_i,i = 1,2,\cdots,m \tag{LCQP}$$

实际上,线性约束二次规划问题是最经典的二次规划子类问题之一,早在20世纪50年代就已应用于投资组合模型[6],随后普遍应用于金融优化、模式识别、工程技术等不同领域。此外,(QCQP)也包含了等式约束二次规划问题情形,对于等式约束

$$\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_ix + c_i^{\mathrm{T}}x - b_i = 0$$

可将其替换为两个不等式约束,即

$$\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_ix + c_i^{\mathrm{T}}x - b_i \leqslant 0, \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_ix + c_i^{\mathrm{T}}x - b_i \geqslant 0$$

由此可见,(QCQP)包含了各类连续变量二次规划问题作为子类问题。

除连续型变量二次规划问题外,另一类典型的二次规划问题是混合整数变量二次规划问题。所谓的混合整数变量,就是问题的部分变量(或全部变量)为整数变量。该问题可写为如下一般形式:

$$\min \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_0x + c_0^{\mathrm{T}}x$$
$$\text{s. t. } \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_ix + c_i^{\mathrm{T}}x - b_i \leqslant 0,i = 1,2,\cdots,m \tag{IQCQP}$$
$$x_j \in \mathbb{Z},j \in S$$

其中,整数集 $\mathbf{S}\subseteq\{1,2,\cdots,n\}$ 表示整数变量对应的指标集合。(IQCQP)所包含的最重要的子类问题之一就是二元整数规划问题,即对任意 $j=1,2,\cdots,n$,变量 $x_j$ 取值范围仅包含两个整数点,通常为 $x_j\in\{0,1\}$ 或 $x_j\in\{-1,1\}$。一系列经典的组合优化问题,例如,最大割问题[13]、二次背包问题[14]等,均可建模为不同形式的整数二次规划问题。

虽然现有文献中所研究的不同类型的二次规划问题通常是(QCQP)或(IQCQP)的子类问题,然而,我们很难针对(QCQP)或(IQCQP)问题形式

设计通用的求解算法。实际上,不同的子类问题的参数 $Q_i$ 和 $c_i$ 的分布范围、参数密度(即非零参数所占的比例)通常具有一定差异,问题的结构特点往往也不同。这些差异造成了问题求解难度的不同。例如,对于(QCQP)问题,当目标函数和约束函数均为凸函数时(即对任意 $i=0,1,\cdots,m$,矩阵 $Q_i$ 为半正定矩阵),该问题将成为凸二次规划问题,并可转化为二阶锥优化问题进行求解[15]。但是,当(QCQP)问题的目标函数或约束条件对应的二次项矩阵中存在非半正定矩阵时,问题将成为非凸问题,其局部最优解不一定是全局最优解。针对非凸情形,我们往往需要设计更复杂的方法来求解该问题的全局最优解。

虽然非凸二次规划问题的局部最优解的结构比凸二次规划情形复杂,但是并不是所有的非凸二次规划问题都难以求解。根据非凸问题的求解难度,我们进一步将其分为两类情形:隐凸问题和本质非凸问题。所谓隐凸问题,就是问题本身不是凸问题,但是通过采用适当的变换技巧,可将其转化为等价的凸优化问题[16]。例如,经典的信赖域子问题[17],以及含有两个齐次约束的齐次二次规划问题[18],均是典型的隐凸问题。此外,在一些实际的工程应用领域,相关问题的二次规划模型也在一定条件下具有隐凸性。例如,在信号处理领域中的多输入多输出信道检测问题[19],其一般形式是 NP-hard 的[20],但是,当信号的信噪比足够高时,可将该问题等价转换为半正定规划问题[21]。隐凸问题相对容易求解。随着凸优化技术的不断成熟,越来越多的凸优化相关方法可用于求解隐凸问题。另外,还有很多非凸二次规划问题具有本质非凸性,我们无法将其转化为多项式时间可解的凸优化问题。其中一系列非凸二次规划问题已经被证实是 NP-hard 的。求解本质非凸问题的全局最优解相对困难。特别地,对于 NP-hard 问题情形,除非 P=NP,否则不存在多项式时间复杂度的全局优化算法[22]。为了求解本质非凸问题的全局最优解,我们通常采用相对有效的指数复杂度算法。其中最常见也是最有效的方法之一就是分支定界算法[23]。另外,割平面方法也是求解非凸规划和整数规划问题全局最优解的典型方法之一[24]。

### 1.1.2 复变量二次规划问题

接下来,介绍复变量二次规划问题。在复变量问题中,决策变量 $x$ 取值为复数,即 $x\in\mathbb{C}^n$。在工程建模中,复变量往往具有一定的物理意义。实际上,复变量常用于表示正弦信号的振幅与相位,其中向量的模对应正弦信号的振幅,辐角对应正弦信号的初始相位。特别地,在通信、信号处理、电力系统中,复变量表示法具有非常广泛的应用。此外,信号的能量通常表示

为复变量的模的平方，相关的能量约束往往表示为复变量的模约束，而信号的初始相位约束通常表示为复变量辐角约束。例如，电力系统中的交流电电压最大值和相位值，即直接对应复变量的模与辐角，而电压有效值约束以及初始相位的约束即表示为复变量的模约束和辐角约束。由此可见，在工程领域，相关复变量二次规划问题模型往往表示为带模约束和辐角约束的问题。引入复变量二次规划问题的一般形式：

$$\begin{aligned} \min\ & \frac{1}{2}x^{\mathrm{H}}\boldsymbol{Q}_0x+\mathrm{Re}(c_0^{\mathrm{H}}x) \\ \text{s. t.}\ & \frac{1}{2}x^{\mathrm{H}}\boldsymbol{Q}_ix+\mathrm{Re}(c_i^{\mathrm{H}}x)-b_i\leqslant 0, i=1,2,\cdots,m \\ & l_i\leqslant |x_i|\leqslant u_i,\ \arg x_i\in A_i, i=1,2,\cdots,n \end{aligned} \tag{CQCQP}$$

其中，决策变量 $x\in\mathbb{C}^n$。对任意 $i=1,2,\cdots,m$，矩阵 $\boldsymbol{Q}_i$ 是 $n\times n$ 的 Hermitian 矩阵，参数向量 $c_i\in\mathbb{C}^n$，变换$(\cdot)^{\mathrm{H}}$ 表示共轭转置，$\mathrm{Re}(\cdot)$表示复数实部，$\arg(\cdot)$表示复数辐角，集合 $A_i\subset\mathbf{R}$ 表示 $x_i$ 的辐角的取值范围。复变量二次规划问题在一系列重要的工程领域，特别是通信、雷达、电力等领域，具有非常广泛的应用[3,25,26]。下面介绍一些典型的复变量二次规划问题模型及其相关应用背景。

首先介绍单位模约束二次规划问题，该问题可写为如下形式：

$$\begin{aligned} \min\ & \frac{1}{2}x^{\mathrm{H}}\boldsymbol{Q}x+\mathrm{Re}(c^{\mathrm{H}}x) \\ \text{s. t.}\ & |x_i|=1, i=1,2,\cdots,n \\ & \arg x_i\in A_i, i=1,2,\cdots,n \end{aligned} \tag{UMQP}$$

该问题是(CQCQP)的一类特殊子类问题，即各个复变量具有单位长度的模。严格来说，由于各个变量的模是固定值，在优化过程只有变量的辐角值是可调整的。因此，该问题的真正决策变量实际上仅包含辐角变量 $\arg x_1$，$\arg x_2$，…，$\arg x_n$，故可称之为辐角优化问题(或相位角优化问题)。在工程应用中，与相位角相关的优化问题，例如，相位同步问题[27,28]和相位恢复问题[4]均可建模为(UMQP)形式。此外，(UMQP)模型也可用于解决雷达相位码设计问题[25]。除上述工程应用外，运筹学领域的 MAX-3-CUT 问题[29]作为一类典型的组合优化问题，也可建模为(UMQP)形式。针对(UMQP)问题，文献[30,31]专门讨论了相关的近似算法。

进一步，介绍含有模约束的复变量二次规划问题：

$$\begin{aligned} \min\ & \frac{1}{2}x^{\mathrm{H}}\boldsymbol{Q}x+\mathrm{Re}(c^{\mathrm{H}}x) \\ \text{s. t.}\ & |x_i|\leqslant 1, i=1,2,\cdots,n \end{aligned} \tag{UQP}$$

其中，模约束 $|x_i|\leqslant 1$ 表示信号最大振幅约束。例如，在电力系统中，模约

束往往对应交流电电流、电压的最大值约束。另外,模约束$|x_i|\leqslant 1$等价于$|x_i|^2\leqslant 1$,而在通信系统和电力系统中,复变量的平方往往对应信号的能量或功率。因此,相关的能量约束往往也表示为模约束。该问题在无线网络设计领域的应用可参见文献[32]。此外,该问题在雷达信号处理领域也有相关应用[25]。

最后,介绍一类含有二次约束条件的复变量二次规划模型,该模型在电力系统潮流计算问题中具有重要应用。该模型可写为如下形式:

$$\begin{aligned}
&\min \sum_{(i,j)\in G} [Q_0]_{ij} x_i x_j^{\mathrm{H}} \\
&\text{s. t.} \sum_{(i,j)\in G} [Q_k]_{ij} x_i x_j^{\mathrm{H}} \leqslant 1, k=1,2,\cdots,m \qquad \text{(SQCQP)} \\
&\qquad l_i \leqslant |x_i| \leqslant u_i
\end{aligned}$$

其中,$G$是由$(i,j)$二元组构成的集合,$[\cdot]_{ij}$表示稀疏矩阵的第$i$行第$j$列元素,$i,j\in\{1,2,\cdots,n\}$。在实际应用中,$G$通常采用图论相关方法进行表示:以$\{1,2,\cdots,n\}$作为顶点集合,以$G$中的二元组作为边集合。在潮流计算问题的实际背景中,图的顶点集合表示变电站,边集合表示输电线路,而图的结构直接对应输电网络的结构。关于(SQCQP)在电力系统的更多建模细节可参阅文献[1,2]。针对该问题的半正定松弛方法的松弛效果,文献[33]给出了较全面的理论分析。

## 1.2 研究背景介绍

二次规划问题是最具代表性的非线性规划问题之一。对该问题进行深入研究,有助于促进非线性优化领域整体发展。在经典的数学规划领域,学者们往往将优化问题分类为线性优化问题和非线性优化问题。而二次规划问题作为形式最简单的非线性规划问题,往往被看作由线性规划问题扩展到一般情形非线性规划问题的过渡问题。从这个意义上讲,以二次规划问题作为基本问题进行专门研究是通往求解一般情形非线性规划问题的第一步。此外,在全局优化领域,线性与非线性的差异并不是最本质的差异,而凸性和非凸性的差异是造成问题求解难度差异的本质因素。对于二次规划问题,当问题具有凸性时,其局部最优解一定是全局最优解,此时问题相对容易求解。但是,对于非凸情形,特别是本质非凸情形,问题结构将复杂得多。由于问题可行域内通常存在大量局部最优解,在其中寻找全局最优解相对困难。非凸二次规划问题作为最具代表性的非线性优化问题,至今仍

然是全局优化领域最具挑战性的问题之一。

在非凸二次规划的相关研究进展中，近 20 年来最引人关注的方法之一，就是采用凸松弛技术的近似算法（也叫次优算法，即以寻找问题近似最优解作为最终目标）。在过去 20 年，随着现代凸优化方法的不断成熟，特别是随着半正定规划、二阶锥规划等方法在各个领域的普及，二次规划近似求解算法也随之取得了极大的进步。相关成果成功推动通信、信号处理、电力系统等工程领域的技术发展[12]。特别地，在一些具体的工程应用领域，系统往往对算法实时计算效率有较高的要求。在此背景下，采用高效率的近似算法往往是最佳选择。

然而，并不是所有二次规划问题类型均存在有效的近似算法。例如，通信领域的波束形成问题，其近似解与最优解之间的近似比并不理想[34,35]，而电力系统潮流计算问题，对其进行半正定松弛后，得到的松弛最优解不一定是原问题的可行解[36]。针对这些情形，近似算法应用效果受限，甚至彻底失去实用价值。实际上，对于一些非实时应用场景，当算法效率不再是最主要的瓶颈时，基于凸松弛技术的近似算法通常不再是最佳选择。取而代之，我们可进一步采用更有效的全局优化技术，例如，割平面技术、分支定界技术在凸松弛的基础上对问题松弛效果进行改进，从而以更长的（但可接受的）计算时间作为代价，搜索高质量的解。由此可见，对非凸二次规划问题的全局优化技术进行专门研究，对于非实时求解相关工程问题具有重要的实用价值。

## 1.3 全局优化方法介绍

全局优化方法以寻找问题的全局最优解作为最终目标。然而，对于隐凸问题和本质非凸问题，其求解难度和求解策略往往具有显著差异。与上述两类问题相对应，我们将全局优化的研究思路分为两类。

1）通过挖掘问题的结构特点，得到全局最优性条件，由此揭示问题的隐凸性，并设计算法求解问题的全局最优解。

2）对于本质非凸问题，设计相对有效的指数复杂度求解算法搜索问题的全局最优解。

其中，对于第一类研究思路，为了挖掘隐凸性，我们往往需要对问题的理论性质或结构特点进行专门探索。然而，相关的求解算法严重依赖问题的结构特点，因此不同方法之间通常不具有共性。而对于第二类研究思路，设计指数复杂度全局优化算法，如割平面法、分支定界法，针对不同类型的

问题设计的算法通常具有一定的共性,通常可以形成统一的算法框架。因此,我们称之为通用全局优化方法。接下来,我们重点介绍一类最常见的通用全局优化方法,即分支定界算法。

### 1.3.1 分支定界方法介绍

在通用全局优化方法中,虽然算法通常具有指数复杂度,但是,在实际计算中,针对中小规模的问题实例,算法的计算效率往往在一定程度上仍然可满足实际需求。实际上,经典的算法复杂性理论主要以算法在求解不同实例的最坏情形复杂度作为衡量标准。然而,在对实际问题进行求解时,算法很少真正达到最坏情形复杂度。对于来源于真实应用场景的问题实例,其参数往往服从某种特定的分布。在实际应用中,全局优化方法的平均计算复杂度(也叫经验复杂度,通常采用数值模拟方法进行估计)通常远远低于最坏情形复杂度。因此,针对全局优化算法来说,最坏情形复杂度并不能有效衡量算法的实用性。相比之下,通过实验模拟得到的经验复杂度往往更具有参考价值。

在全局优化领域,求解 NP-hard 二次规划问题的最有效的全局优化算法之一就是分支定界算法[37-39]。分支定界策略是一类经过巧妙设计的枚举策略,通过估计每个分支问题目标值的上界和下界,预先判断哪些分支不可能存在全局最优解,以及哪些分支最可能存在全局最优解,由此提高枚举效率。对于优化问题,分支定界法的主要思想是将原问题松弛为简单的凸优化问题(或相对容易求解的非凸优化问题),通过求解松弛问题,得到原问题的下界值。在此基础上,对可行域进行切分,由此构造更小范围可行域上的子问题,并对子问题进一步构造松弛问题,估计子问题最优解的下界值,以此类推,最终实现枚举策略。

分支定界算法中的一个重要的环节就是对非凸问题进行凸松弛。在文献中,学者们提出了不同类型的松弛技术,包括线性松弛[40]、凸二次松弛[41,42]、拉格朗日松弛[43],二阶锥松弛[44],以及半正定松弛[45,46]等。其中,著名的商业优化软件 BARON 作为最具代表性的全局优化软件,采用了线性松弛的技术[47]。另外,分支定界算法设计中,通常进一步将割平面技术与具体的松弛技术相结合,由此实现效率更高的分支割平面算法[48]。实际上,割平面方法最早用于求解整数规划问题[49],随后也被应用于求解非线性规划问题。其主要思想是将离散优化问题/非凸优化问题松弛为连续凸优化问题,并设计割平面(即线性不等式),对松弛问题最优解与原问题的可行域进行分离,切除不必要的松弛区域,由此进一步降低松弛间隙。通过将

割平面技术引入到分支定界算法中，通常可显著提高分支定界算法的枚举效率。

分支定界算法中的另一个重要环节就是分支策略。其中，最常用的分支策略就是对每个单独的变量的可行区域范围进行划分。记问题可行域为$F$，构造如下区域：

$$B = \{x \in \mathbf{R}^n \mid x_i \in B_i, i = 1, 2, \cdots, n\} \supset F$$

其中，$B_i \subseteq \mathbf{R}$表示可行域$F$在变量$x_i$方向的投影集合（或投影集合的近似估计）。经典的分支定界算法在每一次分支过程中，选择其中一个变量$x_i$作为分支变量，并将其对应的集合$B_i$划分为两个子集合，由此构造两个子问题。以此类推，算法在分支枚举过程中不断地将集合$B$划分为一系列子集合，由此构造可行区域更小的子问题，并实现枚举策略，直到找到问题的（在一定误差界范围内的）全局最优解。我们将上述经典的可行域切分策略称为箱式切分策略。除箱式切分策略外，我们也可采用一些特殊的切分策略。例如，文献[38]提出了三角形切分策略：将箱式集合$B$分解成若干个二维三角形以及若干个矩形的 Cartesian 乘积，由此实现可行域划分。采用三角形切分策略后，可进一步利用三角形可行域的结构特点挖掘高质量的有效不等式，从而改进下界质量。矩形切分策略和三角形切分策略均是对问题变量的可行域范围进行划分的策略。实际上，我们也可以采用非可行域划分策略，特别是基于问题结构的划分策略。例如，文献[37]提出了基于互补松弛条件的可行域划分策略：当问题满足一定约束规格时，问题的全局最优解一定满足 KKT 条件。利用 KKT 条件的互补性关系，可进一步实现二分策略，最终在有限次分支后得到问题的全局最优解。

松弛策略和分支策略作为分支定界算法的两个重要环节，彼此之间并不独立。对于具体的松弛策略，通过采用恰当的分支技术，有望进一步改进松弛问题的求解效率。例如，Buchheim 等人针对具有严格凸目标函数的整数二次规划问题提出了一类特殊的分支定界算法[50]。该分支定界算法采用信赖域子问题进行下界计算，进一步，通过采用特殊的分支策略，使得分支过程中子问题按照特定的顺序进行选择，由此利用父节点松弛问题的最优解作为初始解，求解子节点松弛问题的最优解，并将信赖域子问题的计算复杂度降低到了$O(n)$的数量级。文献[50]相关实验结果进一步以实验证实了该方法的有效性。

### 1.3.2 非凸复变量二次规划相关研究介绍

上一节介绍了求解非凸二次规划问题的分支定界算法。然而，这些算

法均是针对实变量二次规划问题情形设计的,在设计过程中并未考虑复变量二次规划问题的相关结构特点。如果将上述方法直接用于求解复变量二次规划问题,通常无法达到理想的求解效率。

实际上,复变量问题作为工程应用中的一类常见问题,引起了广泛关注,在现有文献中,大部分工作致力于设计求解该类问题的近似算法,或致力于对隐凸问题设计特殊的全局优化算法。在近似算法方面,综述文献[1,2,12]给出了非常全面的介绍,并讨论了相关方法在电力系统和通信技术中的相关应用。在隐凸性挖掘方面,文献[16,18,51-53]针对不同类型的二次规划问题分别进行了讨论。此外,文献[54,55]进一步将隐凸性方法应用于求解具体的信号处理问题,并结合问题结构设计了特殊的全局优化求解方法。但是,很少有文献专门研究本质非凸情形复变量二次规划问题的通用全局优化算法。

例如,文献[26,56]针对电力系统中的最优潮流计算问题的复变量二次规划模型设计了分支定界算法。文献[57]针对复变量二次规划问题提出了基于分支割平面技术的全局优化算法,该算法充分利用复变量问题结构特点进行割平面设计,由此实现了非常高的求解效率。

从问题结构上看,复变量二次规划问题与实变量二次规划问题具有显著差异。实际上,单个复变量具有二维自由度,其实部和虚部可看作两个独立的变量。从这个角度讲,任何一个 $n$ 维的复变量二次规划问题均可看作 $2n$ 维的实变量二次规划问题。在本书后续章节中,我们将通过实验证实:直接采用传统的实变量二次规划问题相关分支定界算法处理复变量问题,通常无法达到令人满意的求解效率。实际上,复变量的实部和虚部在特定约束条件下具有很强的相关性,特别是在复变量模与辐角约束下,我们可充分利用实部和虚部的相关性挖掘割平面,从而实现效率更高的分支割平面算法。在现有工作中,文献[51,53,58]均利用复变量问题所特有的结构特点,得到了比实变量问题情形更深刻的理论结果。此外,在分支定界算法方面,文献[57]针对复变量可行域的特有结构,设计了有效的割平面策略。由此可见,我们只有对复变量问题进行专门研究,才能得到更有效的求解方法。

## 1.4 本书内容安排

全书主要内容分为三部分,具体内容如下:

第一部分,主要包含第2章。我们将介绍非凸二次规划问题的几类典

型的凸松弛方法,这些松弛方法将作为全局优化方法的重要基础,广泛应用于后续章节。

第二部分,主要包含第 3 章至第 6 章。我们将介绍几类典型的分支定界算法。按照下界方法分类,我们将分别介绍采用线性松弛、凸二次松弛、半正定松弛的分支定界算法。按照问题分类,我们将在第 3 章和第 4 章讨论实变量二次规划问题,在第 5 章和第 6 章讨论复变量问题情形。

第三部分,主要包含第 7 章至第 9 章。我们选取三类典型的工程实践中的具体二次规划应用问题,并针对这些应用问题设计有效的全局优化算法,由此展示全局优化方法在工程实践中的实用价值。