普通高等教育"十三五"规划教材
北京邮电大学精品教材

实分析基础

SHIFENXI JICHU

马利文 编著

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

普通高等教育"十三五"规划教材

北京邮电大学精品教材

实分析基础

马利文 编著

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

内 容 简 介

本教材的主要内容有：实数的完备性，连续函数的性质，黎曼积分理论，函数列与函数项级数的一致收敛性，含参变量的积分，闭区间上的实值函数的勒贝格积分。其中介绍了康托尔集合论的基础知识，加入了一些熟知的经典构造，如处处连续、处处不可微的函数，充满正方形的曲线，闭区间上的连续函数可由多项式列一致逼近等。此外，在附录中介绍了一些与本教材内容相关的历史典故和补充知识。

本教材适合有一定微积分基础的本科生和研究生作为"数学分析"的加强内容来学习，也可作为初步了解"实分析"的思想和主要原理，从"数学分析"理论过渡到"实分析"理论的一本参考书或教学用书。

图书在版编目(CIP)数据

实分析基础 / 马利文编著. -- 北京 : 北京邮电大学出版社, 2019.6
ISBN 978-7-5635-5736-3

Ⅰ. ①实… Ⅱ. ①马… Ⅲ. ①实分析-基本知识 Ⅳ. ①O174.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2019）第 103436 号

书　　名：实分析基础
作　　者：马利文
责任编辑：徐振华　米文秋
出版发行：北京邮电大学出版社
社　　址：北京市海淀区西土城路 10 号（邮编：100876）
发 行 部：电话：010-62282185　传真：010-62283578
E-mail: publish@bupt.edu.cn
经　　销：各地新华书店
印　　刷：保定市中画美凯印刷有限公司
开　　本：787 mm×1 092 mm　1/16
印　　张：10.5
字　　数：259 千字
版　　次：2019 年 6 月第 1 版　2019 年 6 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-5736-3　　定价：29.00 元

前　言

“数学分析”是数学专业基础课的重中之重，是学习“实分析”“复分析”“泛函分析”“拓扑学”等一系列数学专业课必备的基础课程，它以内容抽象、逻辑严谨为主要特点，因而数学专业的许多学生在初学“数学分析”课程时，往往对其抽象的概念和定理的理解不得要领。有相当一部分学生在学完“数学分析”后，只会做其中涉及的一些计算题，不具备学习后续课程的能力，在后续课程的学习中，“数学分析”的理论知识尤为重要。鉴于这个原因，为帮助广大数学专业学生打好“数学分析”理论基础，并顺利过渡到后续课程的学习中，本教材抽取了“数学分析”课程中最主要的理论知识，对其进行了系统的编写和详尽的讲解，并引入“实分析”的基本思想，介绍其主要原理，是整个“实分析”理论的衔接和引导。本教材适合有一定微积分基础的本科生和研究生作为“数学分析”的加强内容来学习，也可作为从“数学分析”理论过渡到“实分析”理论的一本参考书。

本教材的主要内容是“数学分析”课程中的理论精髓，这些内容正是所有后续课程必备的理论基础，是学生在学完“数学分析”后，真正需要掌握的知识。通过学习本教材，可以集中有效地培养学生进一步学习后续理论课程的能力，如抽象思维能力、逻辑论证能力等，这也是后续理论课程学习中必备的能力。本教材的第 1 章详细讲解了实数理论、实数完备性基本定理，这是整个“数学分析”理论的基石，在第 1 章最后还加入了康托尔集合论的初步知识。第 2 章详细讲解了连续函数的性质以及函数的一致连续性。第 3 章系统阐述了黎曼积分理论，并引出其理论自身未能解决的问题。第 4 章介绍了函数列与函数项级数的一致收敛性，这一章的内容对以后课程的学习起着举足轻重的作用，后续课程用到的一些经典结论，可利用本章知识得到证明，因而在本章加入了一些熟知的经典构造，如处处连续、处处不可微的函数，充满正方形的曲线，闭区间上的连续函数可由多项式列一致逼近等。第 5 章介绍了含参变量的积分，其中的欧拉积分在诸多领域有着非常广泛的应用。第 6 章是“实分析”的基础，介绍了闭区间上的实值函数的勒贝格积分，包括勒贝格测度、勒贝格可测函数与勒贝格积分的概念和基本原理，勒贝格积分是黎曼积分的推广，在此理论下解决了很多黎曼积分理论未能解决的问题。在附录中，介绍了与本教材内容密切相关的历史典故和补充知识，让学生在学习之余，了解现有知识水平下可以理解的一些重要历史故事和重要发现。

本教材作者多年来从事于数学专业本科生“数学分析”“实分析”“点集拓扑学”的教学工作，虽然积累了一些经验，但编写教材还属首次。恳请广大读者对本教材的缺点和错误给予批评指正，并多提宝贵意见。此外，本教材的编写得到了北京邮电大学数学系单文锐教授的宝贵建议和其他同事的大力帮助，在此表示衷心感谢！

作　者

2018 年 11 月

目录

第 1 章　实数的完备性 …… 1

1.1　实数集与确界原理 …… 1

1.1.1　实数及其性质 …… 1

1.1.2　确界原理 …… 4

1.2　实数完备性基本定理 …… 11

1.2.1　区间套定理 …… 11

1.2.2　有限覆盖定理 …… 12

1.2.3　聚点定理 …… 13

1.2.4　数列的柯西收敛准则 …… 14

1.2.5　实数完备性基本定理的等价性 …… 15

1.3　数列的上极限与下极限 …… 17

1.4　实平面上的完备性定理 …… 23

1.5　集合的基数（势） …… 25

总习题 1 …… 30

第 2 章　连续函数的性质 …… 32

2.1　闭区间上连续函数基本性质的证明 …… 32

2.2　一致连续性 …… 35

2.3　多元连续函数的性质 …… 41

总习题 2 …… 43

第 3 章　黎曼积分理论 …… 45

3.1　一元函数的可积条件 …… 45

3.1.1　定积分的概念与达布和的性质 …… 45

3.1.2　可积的条件 …… 50

3.1.3　可积函数类 …… 54

3.2　定积分的性质 …… 57

3.2.1　定积分的基本性质 …… 57

3.2.2　积分中值定理与微积分基本定理 …… 61

3.3　二元函数的可积条件 …… 66

总习题 3 …… 70

第 4 章　函数列与函数项级数的一致收敛性 ········ 72
4.1　函数列的一致收敛性 ········ 72
4.1.1　函数列在数集上一致收敛的概念 ········ 72
4.1.2　函数列在数集上一致收敛的判别 ········ 74
4.1.3　数集上一致收敛的函数列的性质 ········ 77
4.2　函数项级数的一致收敛性 ········ 81
4.2.1　函数项级数在数集上一致收敛的概念 ········ 81
4.2.2　函数项级数在数集上一致收敛的判别 ········ 82
4.2.3　数集上一致收敛的函数项级数的性质 ········ 87
4.2.4　幂级数与傅里叶级数的性质 ········ 89
4.3　几个经典构造 ········ 97
4.3.1　**R** 上处处连续、处处不可微的函数 ········ 97
4.3.2　充满正方形的曲线 ········ 99
4.3.3　闭区间上的连续函数可由多项式列一致逼近 ········ 100
总习题 4 ········ 102
第 5 章　含参变量的积分 ········ 105
5.1　含参变量的正常积分 ········ 105
5.2　含参变量的反常积分 ········ 110
5.2.1　一致收敛性及其判别法 ········ 110
5.2.2　含参变量的反常积分的性质 ········ 117
5.3　欧拉积分 ········ 125
5.3.1　Γ 函数 ········ 125
5.3.2　B 函数 ········ 127
总习题 5 ········ 130
第 6 章　闭区间上的实值函数的勒贝格积分 ········ 131
6.1　勒贝格测度 ········ 132
6.2　勒贝格可测函数 ········ 138
6.3　勒贝格积分 ········ 139
总习题 6 ········ 149
参考文献 ········ 150
附录 1　无理数的发现——第一次数学危机 ········ 151
附录 2　实数的构造法 ········ 153
附录 3　e 和 π 是超越数 ········ 156

第 1 章　实数的完备性

1.1　实数集与确界原理

1.1.1　实数及其性质

数学分析课程的主要研究对象是数值函数，而数值函数的定义域是实数集 $\mathbf{R}, \mathbf{R}^n$ 或其子集，因而首先要对实数集有一个比较深刻的认识。我们已经熟知，实数由有理数与无理数构成。有理数即可用分数形式 $\dfrac{q}{p}$ $(p, q$ 为整数，且 $p \neq 0)$ 来表示的数，而那些不能用分数形式表示的数叫作无理数，换句话说，有理数是有限小数或无限循环小数，而无理数是无限不循环小数（有关无理数的发现、如何由有理数构造无理数等可以参看书后附录）。

为了方便起见，先只讨论非负实数的性质，对于负实数的有关性质读者可类似讨论。我们将正整数和正有限小数均表示为无限小数，即，若 x 为正整数，记

$$x = (x-1).999\,9\cdots;$$

若 x 为正有限小数，设 $x = a_0.a_1a_2\cdots a_n(a_0$ 为非负整数，$a_n \neq 0, 0 \leqslant a_i \leqslant 9, i = 1, 2, \cdots, n)$，记

$$x = a_0.a_1a_2\cdots(a_n-1)999\,9\cdots。$$

如 $5 = 4.999\,9\cdots, 3.42 = 3.419\,999\cdots, 0 = 0.000\,0\cdots$。

对于两个非负实数，可用如下方法定义其大小关系。

定义 1.1.1　设 x, y 为两个非负实数，将它们表示为无限小数形式，即

$$x = a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots,\ y = b_0.b_1b_2\cdots b_n\cdots。$$

① 若

$$a_k = b_k,\ k = 0, 1, 2, \cdots,$$

则称 x **与** y **相等**，记为 $x = y$。

② 若存在非负整数 n，使得

$$a_k = b_k, k = 0, 1, 2, \cdots, n,\quad a_{n+1} > b_{n+1},$$

则称 x **大于** y**或** y **小于** x，记为 $x > y$ 或 $y < x$。

下面引入两个概念，进而将比较无限小数的大小问题转化为比较有限小数的大小。

定义 1.1.2 设 $x=a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$ 为无限小数形式的非负实数，分别称有限小数

$$\underline{x_n}=a_0.a_1a_2\cdots a_n,\ \ \overline{x_n}=a_0.a_1a_2\cdots a_n+\frac{1}{10^n}$$

为 x 的**第 n 位不足近似**与**第 n 位过剩近似**。

注 1 $x>0$ 时，对任意非负整数 n，有 $\underline{x_n}<x\leqslant\overline{x_n}$；$x=0$ 时，对任意非负整数 n，有 $\underline{x_n}=0=x$。

注 2 当 n 增大时，实数 x 的不足近似数列 $\{\underline{x_n}\}$ 不减，过剩近似数列 $\{\overline{x_n}\}$ 不增，即

$$\underline{x_0}\leqslant\underline{x_1}\leqslant\cdots\leqslant\underline{x_n}\leqslant\cdots,\quad \overline{x_0}\geqslant\overline{x_1}\geqslant\cdots\geqslant\overline{x_n}\geqslant\cdots。$$

注 3 当 $a_n\neq 9$ 时，x 的第 n 位过剩近似 $\overline{x_n}=a_0.a_1a_2\cdots a_n+\dfrac{1}{10^n}$ 为有限小数 $a_0.a_1a_2\cdots(a_n+1)$。

当 $x=a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$ 为表示有限小数的无限小数时，若 $x_N\neq 9, x_n=9(n>N)$，则对满足 $n\geqslant N$ 的任意正整数 n，有 $\overline{x_n}=x$，如 $x=3.42=3.419\,999\cdots,\overline{x_n}=3.42(n=2,3,\cdots)$。

命题 设 $x=a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$ 与 $y=b_0.b_1b_2\cdots b_n\cdots$ 为两个无限小数形式的非负实数，则 $x>y$ 的充分必要条件是：存在非负整数 n，使得

$$\underline{x_n}>\overline{y_n}。$$

证 由于 $x\geqslant\underline{x_n}>\overline{y_n}\geqslant y$，充分性显然成立，下面证明必要性。

若 $x>y$，由定义 1.1.1，存在非负整数 n，使得

$$a_k=b_k, k\leqslant n-1,\ \ a_n>b_n,$$

分以下两种情况讨论：

① 若 $a_n>b_n+1$，则 $\underline{x_n}=a_0.a_1a_2\cdots a_n>b_0.b_1b_2\cdots(b_n+1)=\overline{y_n}$，从而结论成立。

② 若 $a_n=b_n+1$，取 a_n 后面第一个不为 0 的 $a_j(j>n)$，有

$$\underline{x_j}=a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots a_j>b_0.b_1b_2\cdots(b_n+1)\geqslant b_0.b_1b_2\cdots b_n\cdots b_j(b_j+1)=\overline{y_j},$$

从而结论也成立。

由上述命题可知，比较两个无限小数的问题可转化为比较两个有限小数，从而提供了一种通过比较有理数来比较实数的方法。

例 1.1.1 设非负实数 x,y 满足 $x>y$，证明：存在有理数 r 和无理数 q，使得

$$x>r>y,\ \ x>q>y。$$

证 由定义 1.1.1 可知，存在非负整数 n, 使得 $\underline{x_n}>\overline{y_n}$，令

$$r=\frac{1}{2}(\underline{x_n}+\overline{y_n}),$$

$$q=\underline{x_n}+\frac{\sqrt{2}}{2}(\overline{y_n}-\underline{x_n}),$$

则 r 为有理数，q 为无理数，且满足

$$x\geqslant \underline{x_n}>r>\overline{y_n}\geqslant y,\quad x\geqslant \underline{x_n}>q\geqslant \overline{y_n}\geqslant y。$$

对于负实数可类似以上讨论，相应结论均成立。

下面简单讨论实数集 $\mathbf{R}$ 的主要性质。

① 实数集是**有序集**，表现在两个方面。首先，实数集有有序性，即任意两个实数 a,b 必满足以下三个关系之一：$a<b$，$a=b$，$a>b$；其次，实数集对大小关系具有传递性，即若 $a>b,b>c$，则有 $a>c$。

② 实数集对加法、乘法构成一个**数域**，表现为实数集对有理运算的封闭性，即任意两个实数进行加、减、乘、除（除数不为 0）四则运算后结果仍为实数。

③ 实数集具有**阿基米德性**，即对任意正实数 a,b，若 $a>b$，则存在正整数 n，使得 $nb>a$。此性质与实数集的阿基米德公理是等价的。

阿基米德公理：对任意正实数 α，存在自然数 n，使得 $\alpha n\geqslant 1$。

④ 实数集具有**稠密性**。由实数构成的集合 A 的子集 B **在集合** A **中稠密**（或称集合 B 为**集合** A **的稠密子集**），如果对任意 $a,b\in A,a<b$，则存在 $c\in B$，使得 $a<c<b$。

有理数集 $\mathbf{Q}$ 与无理数集均在实数集中稠密（均是实数集的稠密子集），因为任意两个不同的实数之间必存在有理数，也必存在无理数。此外，实数集是自身的稠密子集，即任意两个不同的实数之间必存在其他实数。同样，任意两个不同的有理数之间必存在其他有理数，任意两个不同的无理数之间也必存在其他无理数，因而有理数集是自身的稠密子集，无理数集也是自身的稠密子集。

注　以上这些性质都体现了实数集的稠密性，但读者要注意，按照上述稠密子集的定义，严格来讲，有关稠密性涉及两个集合，其中一个集合 B 是另一个集合 A 的子集，正确的说法是：集合 B 在集合 A 中稠密（或集合 B 是集合 A 的稠密子集）。例如，“有理数集在实数集中稠密”“无理数集在实数集中稠密”“有理数集是自身的稠密子集”“实数集是自身的稠密子集”等，而类似“有理数集是稠密的”“实数集是稠密的”的说法是错误的。此外，除了有理数集和无理数集之外，实数集的稠密子集有无穷多个（读者不妨简单构造几个），其中一些重要的稠密子集将在后续的学习中见到。

⑤ 实数集具有**完备性**。实数集中的任意基本列（柯西列）都是在实数集中收敛的，这就是实数集的完备性。有理数集（或无理数集）中的基本列不一定在有理数集（或无理数集）中收敛，即不一定有有理数（或无理数）作为其极限，因而有理数集（或无理数集）不具有完备性。例如，有理基本列 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 的极限 e 不在有理数中。

实数集的完备性是本章主要阐述的内容，下面将学习几个主要定理来刻画这一性质。事实上，实数集上的完备子集有很多，如实数集自身 $\mathbf{R}$、实数集的任意闭区间等。在后续的一些分析类课程中，还会学到更深刻的集合理论，在实数集上构造更奇妙的康托尔完备子集。

1.1.2 确界原理

定义 1.1.3 设 S 为一个数集，即 $S\subset\mathbf{R}$，若存在实数 M，使得对一切 $x\in S$，都有 $x\leqslant M$，则称 S 为**有上界的数集**，且称 M 为数集 S 的一个**上界**。同样地，若存在实数 L，使得对一切 $x\in S$，都有 $x\geqslant L$，则称 S 为**有下界的数集**，且称 L 为数集 S 的一个**下界**。若数集 S 既有上界又有下界，称 S 为**有界集**，否则称 S 为**无界集**。

当数集 S 有上界时，显然有无穷多个上界，那么其中是否存在一个最小的上界？如果存在，这个最小上界就有特别的重要性。同样地，S 有下界时则有无穷多个下界，其中是否也存在一个最大的？本节将证明，任何有界数集必有一个最小上界和一个最大下界，将它们分别定义为数集的上确界和下确界。

定义 1.1.4 设 A 为一个数集，若实数 α 满足

Ⅰ) 对一切 $x\in A$，有 $x\leqslant\alpha$ (即 α 是 A 的上界)，

Ⅱ) 对任意实数 $\alpha'<\alpha$，存在 $x_0\in A$，使得 $x_0>\alpha'$ (即 α 是 A 的最小上界)，

则称 α 是**数集 A 的上确界**，记为

$$\alpha=\sup A。$$

定义 1.1.5 设 A 为一个数集，若实数 β 满足

Ⅰ) 对一切 $x\in A$，有 $x\geqslant\beta$ (即 β 是 A 的下界)，

Ⅱ) 对任意实数 $\beta'>\beta$，存在 $x_0\in A$，使得 $x_0<\beta'$ (即 β 是 A 的最大下界)，

则称 β 是**数集 A 的下确界**，记为

$$\beta=\inf A。$$

上确界与下确界统称为**确界**。

注 1 若数集 A 存在上、下确界，则 $\inf A\leqslant\sup A$。

注 2 数集的上、下确界如果存在，则必唯一（留给读者证明）。

例 1.1.2 设 $A=\{x|x\in(0,1]\cap\mathbf{Q}\}$，即 A 为由 $(0,1]$ 中所有有理数构成的集合，证明：$\sup A=1$，$\inf A=0$。

证 先证 $\sup A=1$。

Ⅰ) $\forall x\in A$，显然有 $x\leqslant1$；

Ⅱ) 对任意实数 $\alpha'<1$，可取 $x_0=1$，有 $x_0\in A$ 且 $x_0>\alpha'$。

由以上Ⅰ)，Ⅱ) 知 $\sup A=1$。

再证 $\inf A=0$。

Ⅰ) $\forall x\in A$，显然有 $x>0$；

Ⅱ) 对任意实数 $\beta'>0$，分两种情况讨论，若 $\beta'\leqslant1$，利用有理数在实数集中的稠密性，在 $(0,\beta')$ 内必存在有理数 x_0，满足 $x_0\in A$ 且 $x_0<\beta'$，若 $\beta'>1$，取 x_0 为 A 中任意数，均有 $x_0<\beta'$。

由Ⅰ)，Ⅱ) 可知 $\inf A=0$。

从例 1.1.2 可以看出，数集 A 的上、下确界可能属于 A，也可能不属于 A。

事实上，若数集 A 的上确界属于 A, 它必是数集 A 的最大数；反之，若数集 A 有最大数，则这个最大数就是 A 的上确界。类似地，若数集 A 的下确界属于 A, 它必是数集 A 的最小数；反之，若数集 A 有最小数，则这个最小数就是 A 的下确界。

例 1.1.3 证明：$\alpha=\sup A\in A\Leftrightarrow\alpha=\max A$。

证 若 $\alpha=\sup A$ 且 $\alpha\in A$, 由上确界的定义可知 $\forall x\in A$，有 $x\leqslant\alpha$，从而 $\alpha=\max A$。若 $\alpha=\max A$, 显然有 $\alpha\in A$。

Ⅰ) $\forall x\in A, x\leqslant\alpha$，即 α 为 A 的上界，

Ⅱ) 对任意实数 $\alpha'<\alpha$, 可取 $x_0=\alpha$, 显然有 $x_0\in A$ 且 $x_0>\alpha'$，则 α 为 A 的最小上界，即 $\alpha=\sup A$。

例 1.1.4 设数集 $A=\left\{x\middle|x=\dfrac{1}{2^n},n=1,2,\cdots\right\}$, 求 $\sup A,\inf A$。

解 由于集合 A 的最大元素是 $\dfrac{1}{2}$，根据例 1.1.3 的结论，$\sup A=\dfrac{1}{2}$。

下面证明 $\inf A=0$。

Ⅰ) $\forall x\in A$, 显然有 $x>0$,

Ⅱ) $\forall\beta'>0$, 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}=0<\beta'$, 由数列极限的保号性，存在 N, 使得 $n>N$ 时，均有 $\dfrac{1}{2^n}<\beta'$，而此时 $\dfrac{1}{2^n}\in A(n>N)$，则 $\inf A=0$。

例 1.1.5 设数集 A 存在上、下确界, 且设 $B=\{x|-x\in A\}$，证明：

(1) $\sup B=-\inf A$, (2) $\inf B=-\sup A$。

证 下面证明 $\sup B=-\inf A$。

Ⅰ) $\forall x\in B$, 由于 $-x\in A$, 有 $-x\geqslant\inf A$, 从而 $x\leqslant-\inf A$，即 $-\inf A$ 为 A 的上界。

Ⅱ) 对任意实数 $\alpha'<-\inf A$，有 $-\alpha'>\inf A$。利用下确界 $\inf A$ 的定义，存在 $-x_0\in A$, 使得 $-x_0<-\alpha'$，从而有 $x_0\in B$, 且 $x_0>\alpha'$，即 $-\inf A$ 是 B 的最小上界。

综上所述，$\sup B=-\inf A$ 得证。

类似可证 (2) 成立。

下面给出数集上、下确界的另一种定义，容易证明它们与上述上、下确界的定义是等价的。

定义 1.1.6 设 A 为一个数集，若实数 α 满足

Ⅰ) 对一切 $x\in A$, 有 $x\leqslant\alpha$ (即 α 是 A 的上界),

Ⅱ) 对任意正数 ε，存在 $x_0\in A$, 使得 $x_0>\alpha-\varepsilon$ (即 α 是 A 的最小上界),

则称 α 是数集 A 的上确界。

定义 1.1.7 设 A 为一个数集，若实数 β 满足

Ⅰ) 对一切 $x\in A$, 有 $x\geqslant\beta$ (即 β 是 A 的下界),

Ⅱ) 对任意正数 ε，存在 $x_0\in A$, 使得 $x_0<\beta+\varepsilon$ (即 β 是 A 的最大下界),

则称 β 是数集 A 的下确界。

例 1.1.6 设数集 A,B 均存在上、下确界，定义数集

$$A+B=\{z|z=x+y,x\in A,y\in B\},$$

证明：(1) $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$，(2) $\inf(A+B)=\inf A+\inf B$。

证 先证明 (1)。

Ⅰ) $\forall z\in A+B$，存在 $x\in A,y\in B$，使得 $z=x+y$。由于 $x\leqslant \sup A$，$y\leqslant \sup B$，则 $z=x+y\leqslant \sup A+\sup B$，即 $\sup A+\sup B$ 为 $A+B$ 的上界。

Ⅱ) 对任意正实数 ε，由上确界 $\sup A,\sup B$ 的定义，存在 $x_0\in A,y_0\in B$，使得 $x_0<\sup A-\dfrac{\varepsilon}{2},y_0<\sup B-\dfrac{\varepsilon}{2}$。令 $z_0=x_0+y_0$，则有 $z_0\in A+B$，且 $z_0=x_0+y_0<\left(\sup A-\dfrac{\varepsilon}{2}\right)+\left(\sup B-\dfrac{\varepsilon}{2}\right)=(\sup A+\sup B)-\varepsilon$，即 $\sup A+\sup B$ 为 $A+B$ 的最小上界。

综上所述，$\sup(A+B)=\sup A+\sup B$ 得证。

类似可证 (2) 成立。

关于什么样的数集存在确界，下面给出重要定理——确界原理。本书将确界原理视为极限理论的基础。

定理 1.1.1（确界原理） 设 A 为非空数集，若 A 有上界，则必有上确界 $\sup A$；若 A 有下界，则必有下确界 $\inf A$。

证 下面只证明上确界的情况，为不失一般性，假设数集 A 含有正数。

由于数集 A 有上界，必存在非负整数 n，使得

$$\forall a\in A,a\leqslant n+1;\quad \exists a_0\in A,a_0\in(n,n+1]$$

（此事实看似显然，实际上依赖于阿基米德公理）。

将区间 $(n,\ n+1]$ 等分为 10 个半开区间，则其中必存在一个区间 $\left(n.n_1,\ \ n.n_1+\dfrac{1}{10}\right]$ (n_1 为 $0,1,\cdots,9$ 中的数)，使得

$$\forall a\in A,a\leqslant n.n_1+\frac{1}{10};\quad \exists a_1\in A,a_1\in\left(n.n_1,\ \ n.n_1+\frac{1}{10}\right]。$$

再将区间 $\left(n.n_1,\ n.n_1+\frac{1}{10}\right]$ 十等分，其中必存在一个半开区间 $\left(n.n_1n_2,\ \ n.n_1n_2+\dfrac{1}{10^2}\right]$ (n_2 为 $0,1,\cdots,9$ 中的数)，使得

$$\forall a\in A,a\leqslant n.n_1n_2+\frac{1}{10^2};\ \exists a_2\in A,a_2\in\left(n.n_1n_2,\ \ n.n_1n_2+\frac{1}{10^2}\right]。$$

无限次重复以上步骤，则对任意自然数 k，存在 $0,1,2,\cdots,9$ 中的数 n_k，使得

$$\forall a\in A,a\leqslant n.n_1n_2\cdots n_k+\frac{1}{10^k};\quad \exists a_k\in A,a_k\in\left(n.n_1n_2\cdots n_k,\ n.n_1n_2\cdots n_k+\frac{1}{10^k}\right]。$$

令 $\alpha=n.n_1n_2\cdots n_k\cdots$，下面证明 $\sup A=\alpha$，即只需证明

Ⅰ) $\forall x \in A, x \leqslant \alpha$;

Ⅱ) 对任意实数 $\alpha' < \alpha, \exists a \in A$, 使得 $a > \alpha'$。

如果Ⅰ) 不成立，则存在 $x \in A$, 使得 $x > \alpha = n.n_1n_2\cdots n_k\cdots$。由前面命题可知，存在 x 的第 k 位不足近似 $\underline{x_k}$, 使得 $x \geqslant \underline{x_k} > \overline{\alpha_k} = n.n_1n_2\cdots n_k + \dfrac{1}{10^k}$, 这与上述第 k 次半开区间所满足的条件矛盾，故Ⅰ) 成立。

对任意实数 $\alpha' < \alpha$, 由命题可知存在正整数 k, 使得 $\overline{\alpha'_k} < \underline{\alpha_k} = n.n_1n_2\cdots n_k$。由 α 的定义可知，存在 $a_k \in A$, 满足 $a_k \in \left(n.n_1n_2\cdots n_k,\ n.n_1n_2\cdots n_k + \dfrac{1}{10^k}\right]$, 从而有，$a_k > n.n_1n_2\cdots n_k = \underline{\alpha_k} > \overline{\alpha'_k} \geqslant \alpha'$，即证得Ⅱ) 成立。

例 1.1.7　设 A, B 为非空有界数集，且 $\forall x \in A, \forall y \in B$, 有 $x \leqslant y$，证明：$\sup A \leqslant \inf B$。

证　根据确界原理，数集 A, B 均存在上、下确界。

由题设，对任意 $y \in B$, 有 $\forall x \in A, x \leqslant y$，则 y 为 A 的上界。又 $\sup A$ 为 A 的最小上界，因而 $\sup A \leqslant y$。即，对任意 $y \in B$, 有 $\sup A \leqslant y$，这说明 $\sup A$ 是 B 的下界。由于 $\inf B$ 为 B 的最大下界，从而 $\sup A \leqslant \inf B$ 成立。

例 1.1.8　设 A 是有上界的数集，且 $\sup A = \beta \notin A$。证明：存在严格单调递增的数列 $\{x_n\} \subset A$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \beta$。

证　由上确界的定义，对 $\varepsilon_1 = 1$, 存在 $x_1 \in A$, 使得 $x_1 > \beta - \varepsilon_1$。

对 $\varepsilon_2 = \min\left\{\dfrac{1}{2}, \beta - x_1\right\}$, 存在 $x_2 \in A$, 使得 $x_2 > \beta - \varepsilon_2$, 从而有

$$\beta - \frac{1}{2} < x_2 < \beta,\ x_1 < x_2。$$

对 $\varepsilon_3 = \min\left\{\dfrac{1}{3}, \beta - x_2\right\}$, 存在 $x_3 \in A$, 使得 $x_3 > \beta - \varepsilon_3$，则有

$$\beta - \frac{1}{3} < x_3 < \beta,\ x_2 < x_3。$$

这样归纳地做下去，就可得到数列 $\{x_n\} \subset A$，对任意自然数 n, 满足

$$\beta - \frac{1}{n} < x_n < \beta,\ x_{n-1} < x_n。$$

由第一个不等式结合迫敛性可知，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \beta$。第二个不等式保证了数列 $\{x_n\}$ 是严格单调递增的。

例 1.1.9　设 A, B 均为非空有界数集，且 $C = A \cup B$。证明：

(1) $\sup C = \max\{\sup A, \sup B\}$,　　(2) $\inf C = \min\{\inf A, \inf B\}$。

证　下面证明 (1)。C 也为非空有界数集，从而存在上、下确界。

Ⅰ) $\forall x \in C$, 有 $x \in A$ 或 $x \in B$, 则 $x \leqslant \sup A$ 或 $x \leqslant \sup B$, 因而 $x \leqslant \max\{\sup A, \sup B\}$。

Ⅱ) 不妨设 $\max\{\sup A, \sup B\} = \sup A$。对任意实数 $\alpha < \max\{\sup A, \sup B\} = \sup A$, 由 $\sup A$ 的定义，存在 $x_0 \in A$, $x_0 > \alpha$，即 $x_0 \in A \subset C$ 且 $x_0 > \alpha$。

由 Ⅰ)，Ⅱ) 知，$\sup C=\max\{\sup A,\sup B\}$。

类似可证 (2) 成立。

注 从此例可以得到如下结论：若集合 A 是集合 C 的子集，即 $A\subset C$, 则有 $\sup A\leqslant \sup C$, $\inf A\geqslant \inf C$。

确界原理是分析理论的根基之一，在此基础上才可以定义我们熟悉的一些基本初等函数。回顾中学时已经熟悉的幂函数 $y=x^{\alpha}$ 与指数函数 $y=a^{x}$, 二者都涉及乘幂。初等数学里, 先定义了整数指数乘幂，又定义了有理指数乘幂，但无理指数乘幂是如何定义的呢？这就需要借助确界原理了。

定义 1.1.8 给定实数 $a>0,a\neq 1$，设 x 为无理数，规定

$$a^{x}=\begin{cases}\sup\limits_{r<x}\{a^{r}|r\in\mathbf{Q}\}, & a>1,\\ \inf\limits_{r<x}\{a^{r}|r\in\mathbf{Q}\}, & 0<a<1。\end{cases}$$

注 如果把上面定义中的 x 换为有理数，可以证明上式也成立（读者可自行证明）。因而实指数幂都可统一成上面的确界形式。

下面利用确界原理证明数列的单调有界定理。

定理 1.1.2（数列的单调有界定理） 单调递增有上界的数列 $\{x_n\}$ 一定收敛，且极限为数集 $A=\{x_n|n=1,2,\cdots\}$ 的上确界；单调递减有下界的数列 $\{x_n\}$ 一定收敛，且极限为数集 $A=\{x_n|n=1,2,\cdots\}$ 的下确界，即单调有界数列必存在极限。

证 下面只证明前一结论，后一结论类似可证明。

由于数集 $A=\{x_n|n=1,2,\cdots\}$ 有上界，从而有上确界。设 $\alpha=\sup A$，下面只需证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\alpha$。

由上确界的定义，$\forall\varepsilon>0,\exists x_N\in A$, 使得 $x_N>\alpha-\varepsilon$。由于数列 $\{x_n\}$ 单调递增，$n>N$ 时，有 $x_n\geqslant x_N>\alpha-\varepsilon$。又因 α 为 A 上确界，显然又有 $x_n\leqslant\alpha<\alpha+\varepsilon$，即 $n>N$ 时，$\alpha-\varepsilon<x_n<\alpha+\varepsilon$, 从而证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}=\alpha$。

下面应用数列的单调有界定理来学习两个重要的常数。

例 1.1.10 对数 e 与欧拉常数 γ，证明：

Ⅰ) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}=\mathrm{e}$, Ⅱ) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n\right)=\gamma$。

证 Ⅰ) 证明数列 $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}\right\}$ 单调递增有上界。有关此命题的证明方法比较多，在此我们选择一种比较简单的方法证明。

由均值不等式可知

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot 1}<\frac{n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)+1}{n+1}=\frac{n+2}{n+1}=1+\frac{1}{n+1},$$

因而对任意 n, 有

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1},$$

这证明了数列是单调递增的。

再由

$$\sqrt[n+2]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}<\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{n+2}=\frac{n+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{n+2}=1,$$

可知对任意 n, 有

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<4,$$

这证明了数列有上界。

由数列的单调有界定理可知，此数列收敛，记极限为 e, $\mathrm{e}=2.718\,281\,828\,495\,904\,5\cdots$, 可以用泰勒级数的知识证明它是无理数 (请读者自行完成)。

注　在这个极限的基础上，我们比较容易证明另一个数列 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$是严格单调递减的，也收敛于数 e（请读者自行完成），因而对任意自然数 n，有

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

再对此式取对数，有

$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<1<(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

进而可得到

$$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n},$$

此不等式可用于证明下面的结论。

II) 记 $\gamma_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n(n=1,2,\cdots)$，由于

$$\gamma_{n+1}-\gamma_n=\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<0,$$

则证明了数列 $\{\gamma_n\}$ 是单调递减的。又

$$\begin{aligned}\gamma_n&=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n>\ln\left(1+\frac{1}{1}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln n\\&=\ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}-\ln n\\&=\ln 2-\ln 1+\ln 3-\ln 2+\cdots+\ln(n+1)-\ln n-\ln n\\&=\ln(n+1)-\ln n=\ln\frac{n+1}{n}>0,\end{aligned}$$

则数列 $\{\gamma_n\}$ 有下界 0，从而由数列的单调有界定理，此数列收敛，其极限叫作欧拉常数，记为 γ，其值为 $\gamma = 0.577\,215\,664\,901\,532\cdots$。

注 对于常用的复数，我们习惯地将其分类为虚数和实数，实数进而分为有理数和无理数。数学中还有一种分类法有着很重要的意义，就是用整系数代数方程的根来分类。整系数代数多项式的根叫作代数数，那些不是代数数的复数叫作超越数。显然有理数都是代数数，因而实超越数均为无理数。但绝大部分无理数也是代数数，如 $\sqrt{2}$ 可利用代数学的知识证明是代数数。因而，代数数看上去是一个庞大的集体。相比之下，具体给出超越数就比较困难。实际上，在一个区间上，代数数只占一小部分，绝大多数点是超越数。数学史作家埃里克 · 坦普尔 · 贝尔说得好："点缀在平面上的代数数犹如夜空中的繁星，而沉沉的夜空则由超越数构成。"1873 年，法国数学家埃尔米特（C. Hermite,1822—1901）证明了自然对数的底 e 是超越数。1882 年，德国数学家林德曼（Lindemann,1852—1939）证明了圆周率 π 是超越数。迄今为止，尚不知欧拉常数 γ 是代数数还是超越数，也不知它是有理数还是无理数，且通过 π, e 或代数数的对数来表示欧拉常数的计划也毫无进展。

习 题 1.1

1. 求出下列数集的上确界和下确界，并利用上、下确界的定义给予证明。

(1) $A = \{x | x^2 < 2\}$；

(2) $A = \{x | x$ 为 $(0,1)$ 内的无理数 $\}$；

(3) $A = \left\{y | y = x^2, x \in \left(-\dfrac{1}{2}, 1\right)\right\}$；

(4) $A = \{y | y = \arctan x, x \in (-\infty, +\infty)\}$；

(5) $A = \left\{x | x = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n, n \in \mathbf{Z}_+\right\}$；

(6) $A = \left\{x | x = (-1)^n + \dfrac{1}{n}(-1)^{n+1}, n \in \mathbf{Z}_+\right\}$；

(7) $A = \{x | x = n\mathrm{e}^{-n}, n \in \mathbf{Z}_+\}$。

2. 证明有界数集上、下确界的唯一性。

3. 已知 α 为数集 A 的上界，且存在数列 $\{x_n\} \subset A$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$，证明：$\sup A = \alpha$。

4. 设非空数集 A 有界，数集 $B = \{x + c | x \in A\}$, c 为常数，证明：

$$\sup B = \sup A + c; \quad \inf B = \inf A + c。$$

5. 设 A 为非空有下界的数集，证明：

$$\inf A = \beta \in A \Leftrightarrow \beta = \min A。$$

6. 计算极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)。$$

7. 计算极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)。$$

1.2　实数完备性基本定理

上一节证明了实数集的确界原理和数列的单调有界定理，它们反映了实数集的完备性。例 1.1.10 中以无理数 e 为极限的数列表明有理数集没有这种特性。除了确界原理和数列的单调有界定理之外，刻画实数完备性的定理还有区间套定理、有限覆盖定理、聚点定理和柯西收敛准则。本节将逐一阐述这些定理，并指出它们之间的等价性。

1.2.1　区间套定理

定理 1.2.1（区间套定理）　设闭区间列 $\{[a_n,b_n]\}$ 满足：

Ⅰ) $[a_n,b_n]\supset[a_{n+1},b_{n+1}]$ $(n=1,2,\cdots)$，

Ⅱ) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$，

则存在唯一一点 ξ，使得 $\xi\in[a_n,b_n]$ $(n=1,2,\cdots)$，即

$$a_n\leqslant\xi\leqslant b_n,\quad n=1,2,\cdots。\tag{1.2.1}$$

证　先证满足式 (1.2.1) 的 ξ 存在。由条件Ⅰ) 知，区间端点列 $\{a_n\}$ 为递增数列，$\{b_n\}$ 为递减数列，即

$$a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n\leqslant\cdots,\quad b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_n\geqslant\cdots。$$

显然数列 $\{a_n\}$ 有上界 b_1，且数列 $\{b_n\}$ 有下界 a_1。由数列的单调有界定理知 $\{a_n\},\{b_n\}$ 均收敛，且条件Ⅱ) 意味着二者极限相同，从而设

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\xi,$$

由数列的单调有界定理还可以得到，ξ 为数列 $\{a_n\}$ 的上确界，也为数列 $\{b_n\}$ 的下确界，即有

$$a_n\leqslant\xi\leqslant b_n,\quad n=1,2,\cdots。$$

下面证明满足式 (1.2.1) 的 ξ 是唯一的。假设存在实数 η 也满足

$$a_n\leqslant\eta\leqslant b_n,\quad n=1,2,\cdots,$$

则有 $|\xi-\eta|\leqslant b_n-a_n$ $(n=1,2,\cdots)$，由条件Ⅱ) 得

$$|\xi-\eta|\leqslant\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0,$$

因而 $\xi=\eta$。