



普通高等教育“十三五”规划教材

国家特色专业建设点建设项目

数学分析立体化教材 / 刘名生 冯伟贞 主编

数学分析 (二)

(第二版)



徐志庭 刘名生 冯伟贞 编



科学出版社

(O-7576.01)

数学分析立体化教材 / 刘名生 冯伟贞 主编

数学分析 (一) (第二版)

刘名生 冯伟贞 韩彦昌

数学分析 (二) (第二版)

徐志庭 刘名生 冯伟贞

数学分析 (三) (第二版)

耿 堤 易法槐 丁时进 刘名生

数学分析学习辅导 I——收敛与发散

刘名生 冯伟贞 罗世平

数学分析学习辅导 II——微分与积分

刘名生 韩彦昌 徐志庭 冯伟贞

数学分析学习辅导 III——习题选解

刘名生 冯伟贞 韩彦昌 翁文

数学分析网络课程

刘名生 冯伟贞 张艳虹



科学出版社互联网入口

高教数理出版分社: (010)64033634 销售: (010)64031535

E-mail: mph@mail.sciencep.com

www.sciencep.com

ISBN 978-7-03-060221-3



9 787030 602213 >

定价: 39.00 元

2019

普通高等教育“十三五”规划教材

国家特色专业建设点建设项目

数学分析立体化教材/刘名生 冯伟贞 主编

数学分析(二)

(第二版)

徐志庭 刘名生 冯伟贞 编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书介绍了数学分析的基本概念、基本理论和方法,包括一元(多元)函数极限理论、一元函数微积分学、级数理论和多元函数微积分学等.全书共分三册.本册内容包括不定积分、定积分、定积分应用和反常积分、数项级数、函数项级数、幂级数与 Fourier 级数.书中列举了大量例题来说明数学分析的定义、定理及方法,并提供了丰富的思考题和习题,便于教师教学与学生自学.每章都有小结,对该章的主要内容作了归纳和总结,章末配有复习题,方便学生系统复习.书中还配有 23 个关于主要概念和重要定理讲解的小视频,内容呈现得更加生动直观.

本书可作为高等师范院校数学各专业学生的教学用书,也可供相关专业的教师和科技工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

数学分析. 二/徐志庭,刘名生,冯伟贞编.—2 版.—北京:科学出版社, 2019.1

普通高等教育“十三五”规划教材·数学分析立体化教材

ISBN 978-7-03-060221-3

I. ①数… II. ①徐… ②刘… ③冯… III. ①数学分析-高等学校-教材
IV. ①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018) 第 292737 号

责任编辑:王胡权/责任校对:郭瑞芝

责任印制:师艳茹/封面设计:陈敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

文林印务有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009 年 6 月第 一 版 开本:720×1000 1/16

2019 年 1 月第 二 版 印张:16

2019 年 1 月第九次印刷 字数:323 000

定价:39.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

《数学分析立体化教材》序言

《数学分析立体化教材》通过提供多种教学资源给出数学分析课程的整体教学解决方案. 本立体化教材包括二维码新形态主教材三册:《数学分析(一)》(第二版)、《数学分析(二)》(第二版)、《数学分析(三)》(第二版), 学习辅导书三册:《数学分析学习辅导 I——收敛与发散》《数学分析学习辅导 II——微分与积分》《数学分析学习辅导 III——习题选解》; 另外, 本立体化教材还配有数学分析精品资源共享课一门.

三册主教材的编写考虑不同教学基础的学校和不同层次的学生在教学方面的不同需求, 在较充分顾及系统的完整性的基础上, 特别标记了选学内容. 教师对教材中的选学内容可以作灵活取舍, 以及适当调整相关内容的讲授或阅读次序. 我们希望这种编排能更好地帮助教师落实分类、分层教学, 同时使学生获得合理的阅读指引. 主教材的编写力求在可读性、系统性和逻辑性上各具特色, 并将分层教学的理念贯穿全书. 主教材的建设, 在数字化资源配套方面做了一定的工作, 内容的呈现更加丰富、饱满, 呈现方式更加生动、直观. 我们对书中的许多概念、定理和方法配有小视频, 使在书中无法写出来的一些内容通过小视频提供给读者, 从而使得教材能更好地支持学生的自主学习.

在数学分析学习过程中, 学生往往因为欠缺学习自主意识或基础能力薄弱, 难以驾驭一个较大数学知识体系的学习, 造成自我知识体系零碎、割裂, 这是数学分析教学中存在的主要问题及教学难点.《数学分析学习辅导 I——收敛与发散》《数学分析学习辅导 II——微分与积分》两册辅导书的编写均立足类比, 希望教学双方在求同存异思想的指引下, 打通知识点的关联, 在反复对比中深化对基本数学思想方法的理解及强化对问题解决技巧的掌握, 从而突破教学障碍. 我们力求在可读性和系统性上能够编出特色.《数学分析学习辅导 I——收敛与发散》主要解决数学分析中的收敛与发散及相关的一些问题, 包括点列的收敛与发散、函数极限的存在性、 \mathbb{R}^n 的完备性、反常积分的收敛与发散、数项级数的收敛与发散、函数项级数的收敛与一致收敛以及函数的展开与级数的求和.《数学分析学习辅导 II——微分与积分》主要研究数学分析中的微分与积分及相关的一些问题, 包括一元函数微分学、一元函数微分法的应用、一元函数积分学、多元函数及其微分学、多元函数微

分法的应用、重积分、曲线积分和曲面积分以及各种积分之间的关系.

《数学分析学习辅导III——习题选解》对三册主教材中的大约一半的习题和复习题提供详细解答,并在书末附录中提供了2013~2017年华南师范大学的数学分析考研真题,希望对使用本教材的教师和学生有所帮助.

数学分析精品资源共享课由课程简介、课程学习、图形与课件、测试题库、方法论、拓展阅读及学习论坛和教学录像等模块构成.在课程简介中提供了数学分析课程的教学日历、教学大纲和学习方法指引等课程资料,在课程学习中提供了数学分析(一)、数学分析(二)和数学分析(三)等课程的完整课件,在测试题库中提供了华南师范大学数学科学学院2004~2014级本科生的数学分析期末考试题,在教学录像中提供了5位教师多次数学分析课的教学录像,为教学双方提供了丰富的教学资源.我们希望这门精品资源共享课能成为实施数学分析混合学习的理想平台.

本立体化教材的编写得到“数学与应用数学国家特色专业”建设项目、“数学与应用数学广东省高等学校重点专业”建设项目及“数学与应用数学国家专业综合改革建设项目”的资助,第一版在华南师范大学数学科学学院的2008~2016级及本科生综合班中使用,也被多所兄弟院校作为数学系学生的数学分析课程的教材.

借此机会衷心感谢华南师范大学数学科学学院领导和科学出版社领导对本立体化教材编写的大力支持.对编辑们付出的辛勤劳动,在此表示诚挚的谢意.希望广大读者批评指正,以使本立体化教材得到进一步完善,为数学分析课程建设和一流人才培养作出更大的贡献.

刘名生 冯伟贞

2018年1月

华南师范大学

第二版说明

承蒙兄弟院校的厚爱, 数学分析立体化教材中的《数学分析(二)》自 2009 年出版以来, 已经被全国近十所高等院校选为教材使用, 并被全国两百余所高等院校的图书馆作为教学参考资料使用, 这是对本教材的肯定, 让我们倍感鼓舞. 为了帮助教师们在教学过程中提高效率和增强大学生的学习兴趣, 根据 9 年来我们在华南师范大学的教学体会与学生反馈, 这次再版我们对本教材在信息技术与教学融合方面做了大胆的尝试, 通过二维码技术及移动互联网技术, 将纸质教材与包括重难点讲解、相关知识点讲解等数字化资源进行深度融合, 极大地丰富了教材的内容, 方便了师生们的教学. 关于具体内容, 这次再版主要作了如下修改:

1. 配置了 23 个二维码小视频, 读者可以通过扫描教材中相应位置的二维码, 便可直接看到教材编者对书中一些主要概念、定理和重要知识点的视频讲解.

2. 修改了第 7.1 节的例 1 的提法, 给出部分例题的解法 2.

3. 在第 9.4~9.5 节中, 将“曲线”改为“简单曲线”, 使得曲线弧长的定义和计算公式更加严密.

4. 在第 11.1 节补充了一个讨论分段函数列的一致收敛性的例题, 方便学生自习和教师教学.

5. 在 12.4.1 节增加一个“注”, 说明“将 $f(x)$ 展开成 Fourier 级数”与“求 $f(x)$ 的 Fourier 展开式”是同一个意思, 都是要利用定理 12.4.1, 将函数 $f(x)$ 在它的连续点用“=”表示为 Fourier 级数; 如果再加上“并讨论其收敛性”, 那么还要讨论 $f(x)$ 的 Fourier 级数在 $f(x)$ 的不连续点的收敛性.”

由于不同院校的教学计划课时数可能存在差异, 教师在使用本教材时, 可以根据具体情况对内容进行取舍或重组, 教学时数可掌握在 72~90 学时范围内, 详细参见使用说明.

限于编者水平, 书中不足与疏漏之处在所难免, 敬请读者批评指正.

编者

2018 年 9 月

华南师范大学

第一版前言

数学分析是数学各专业的学科基础课,其重要性不言而喻.我们根据多年的教学经验,在吸取一些现有教材优点的基础上,编写了本书.

现有的各种数学分析教材都有其优点和缺点.本书力求在可读性、系统性和逻辑性上能具有特色,并将分层教学的理念贯穿全书.

首先,在可读性方面,对于重要概念只给一种定义形式,其他的等价定义一般放在思考题或习题中.例如,对数列极限,本书只引入了 ε - N 定义,目的是希望学生能吃透这个概念;数列极限的另一个等价定义放在习题中,方便基础较好的学生学习.对定理的证明,尽量采用朴素的方法进行.对书中的例题,表达尽量详细,让学生容易自学.对某些定理采取先用后证的方法讲述.例如,在第7章,先给出区间上的连续函数必定存在原函数这个结论,这样就可以介绍求不定积分的各种方法;在第8章,先给出闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数必定在 $[a, b]$ 上可积这个结论,这样可以使定积分的计算提前,然后在第8章后面再证明这两个存在性定理.

其次,在系统性方面,将关系较密切的内容放在一起.例如,将发散数列和子列的概念放在同一节,将判别数列收敛的各种方法放在同一节,将定积分的应用与反常积分放在同一章,将各种情况下的Fourier级数和Fourier级数展开放在同一节,将第一型曲线积分、曲面积分和第二型曲线积分、曲面积分放在同一章,将各种积分之间的关系放在同一章等.另外,有理函数分解为部分分式的理论,国内的数学分析教材几乎都将其证明归到高等代数课程中,而高等代数教材也不写这部分内容.为了弥补这一缺陷,在本书的第7章中,将给出有理函数分解为部分分式理论的详细证明,方便教师教学与学生自学.

再次,在逻辑性方面,考虑到可读性的同时,尽量在给出定理的同时也完成对定理的证明.例如,将致密性定理放在第1章,这样数列的柯西收敛准则在第1章就可以证明,使得第1章对数列有较完整的处理;然后在第3章就可以完成闭区间上连续函数性质的证明;第6章就只需讲区间套定理、有限覆盖定理及其应用等,这样难点也分散了.在导数与微分部分,先讲微分,后讲导数,强调微分的作用,这样在后面讲定积分的微元法时,我们将给出微元法的理论依据.

考虑到不同教学基础的学校 and 不同层次的学生在教与学方面有不同的需求,我

们在较充分顾及系统的完整性的基础上,通过小 5 号字和“*”标记本书中的选学内容.对选学内容的处理可以很灵活,如第 1 章中致密性定理内容可以留到第 6 章处理或只作简要介绍.

本书分三册出版.《数学分析(一)》讲述一元函数极限理论和一元函数微分学,它的内容包括:数列极限与确界原理、函数的概念及其性质、函数极限与连续性、函数的导数与微分、微分中值定理及其应用、函数的极值和凸性及作图、实数集的稠密性与完备性.《数学分析(二)》讲述一元函数积分学和级数理论,它的内容包括:不定积分和定积分、定积分的应用与反常积分、数项级数、函数项级数、幂级数和 Fourier 级数.《数学分析(三)》讲述多元函数极限论和多元函数微积分学,它的内容包括:多元函数极限与连续性、多元函数微分学、隐函数理论、多元函数积分学.

《数学分析(一)》的初稿由刘名生教授、冯伟贞副教授和韩彦昌副教授编写,《数学分析(二)》的初稿由徐志庭教授、刘名生教授和冯伟贞副教授编写,《数学分析(三)》的初稿由耿堤教授、易法槐教授和丁时进教授编写.初稿完成后,编写组全体成员多次仔细讨论、评阅和修改.全书由刘名生教授和冯伟贞副教授负责编写组织工作.

中山大学林伟教授和福州大学朱玉灿教授审阅了本书并提出许多宝贵意见,陈奇斌老师绘制了本册书的所有插图,在此对他们表示衷心感谢.

本书在编写过程中得到华南师范大学数学科学学院许多同事的支持,并得到广东省名牌专业建设专项经费、国家特色专业建设点专项经费及 2008 年度华南师范大学校级教改项目的资助.我们在华南师范大学数学科学学院 08 级师范班的数学分析课程中试用了本书,08 级师范班的学生为本书的完善提供了许多宝贵意见,在此一并致谢.

作为新教材,书中的疏漏和不足在所难免,敬请读者批评指正.

编者

2009 年 6 月

华南师范大学

使用说明

1. 本书应用分层教学思想编写, 较难内容使用小 5 号字或用“*”号标注, 教师可根据不同层次的班级选讲部分小 5 号字或标“*”号的内容.

2. 讲授本书的建议最少教学学时是 80 学时, 最多教学学时是 94 学时. 具体地说, 第 7 章: 10 学时; 第 8 章: 16~18 学时; 第 9 章: 14~16 学时; 第 10 章: 12~16 学时; 第 11 章: 12~14 学时; 第 12 章: 16~20 学时.

3. 习题分三级配置:

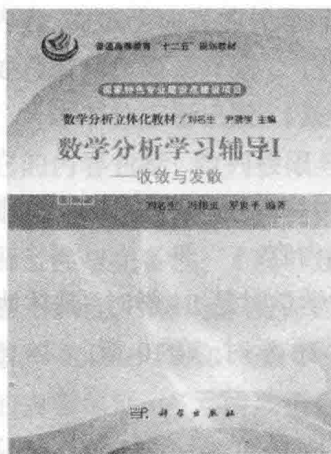
第一级为思考题, 每节都有, 目的是让学生通过自己做思考题理解所学的概念和定理及方法;

第二级为作业题, 即每节后面的习题, 供老师布置作业用, 要求学生全部完成;

第三级为扩展题, 放在每章后面的复习题中, 中间用一条横线分为两部分, 横线上的题供学生复习使用, 横线下的题较难, 供学有余力的学生复习使用.

4. 每章后配有小结, 总结该章所学的知识点、概念和方法等, 方便学生复习.

配套学习辅导推荐

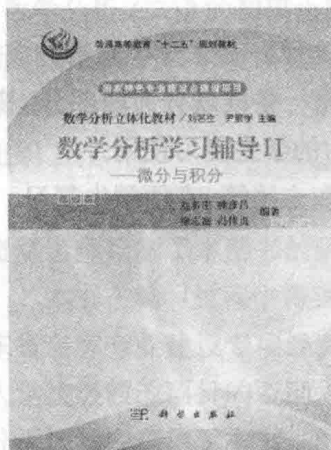


书名：数学分析学习辅导 I——收敛与发散

作者：刘名生，冯伟贞，罗世平

书号：978-7-03-036797-6

科学出版社电子商务平台购买链接：

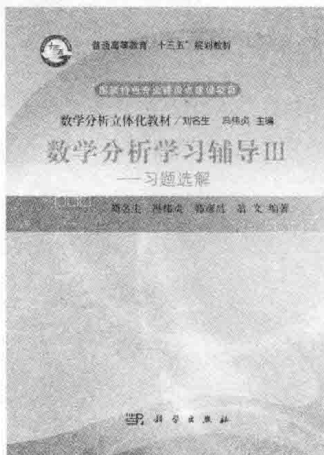


书名：数学分析学习辅导 II——微分与积分

作者：刘名生，韩彦昌，徐志庭，冯伟贞

书号：978-7-03-038230-6

科学出版社电子商务平台购买链接：



书名：数学分析学习辅导 III——习题选解

作者：刘名生，冯伟贞，韩彦昌，翁文

书号：978-7-03-057240-0

科学出版社电子商务平台购买链接：



目 录

《数学分析立体化教材》序言

第二版说明

第一版前言

使用说明

第 7 章 不定积分	1
7.1 原函数与不定积分的概念	1
7.1.1 原函数和不定积分的定义	1
7.1.2 运算性质和基本积分公式	3
7.2 不定积分的计算	6
7.2.1 换元法求不定积分	6
7.2.2 分部法求不定积分	10
7.3 有理函数的不定积分	14
*7.3.1 有理函数的部分分式分解	14
7.3.2 有理函数的不定积分	16
7.3.3 三角函数有理式的不定积分	19
7.3.4 某些无理根式的不定积分	21
小结	23
复习题	24
第 8 章 定积分	26
8.1 定积分的概念与性质	26
8.1.1 引例与定义	26
8.1.2 定积分的性质	31
8.2 微积分基本定理	35
8.2.1 变上限积分的定义与性质	35
8.2.2 微积分基本定理	37
8.3 定积分的计算	39
8.3.1 换元法求定积分	39

8.3.2	分部法求定积分	41
8.4	定积分存在的条件	44
8.4.1	达布和的定义	44
*8.4.2	上和与下和的性质	45
8.4.3	可积的充要条件	48
8.4.4	可积函数类	53
8.5	积分中值定理	56
8.5.1	积分第一中值定理	56
*8.5.2	积分第二中值定理	58
	小结	61
	复习题	62
第 9 章	定积分应用和反常积分	65
9.1	定积分应用的两种常用格式	65
9.2	平面图形的面积	67
9.2.1	直角坐标情形	67
9.2.2	参数方程情形	68
9.2.3	极坐标情形	69
9.3	由平行截面面积求体积	71
9.3.1	由平行截面面积计算体积	71
9.3.2	旋转体体积	73
9.4	平面曲线的弧长	75
9.4.1	平面曲线弧长的概念	75
9.4.2	平面曲线弧长的计算	75
9.5	旋转曲面的面积	78
9.5.1	旋转曲面面积的概念	78
9.5.2	旋转曲面面积的计算	79
*9.6	定积分在某些物理问题中的应用	82
9.6.1	变力做功	82
9.6.2	压力	83
9.6.3	力矩与重心	83
9.7	反常积分的概念与基本性质	85
9.7.1	反常积分的概念与统一定义	85

9.7.2	反常积分的基本性质	89
9.8	反常积分的敛散性	91
9.8.1	反常积分的 Cauchy 收敛准则	91
9.8.2	反常积分的绝对收敛与条件收敛	92
9.8.3	反常积分的比较判别法	92
9.8.4	Dirichlet 判别法与 Abel 判别法	96
	小结	99
	复习题	101
第 10 章	数项级数	104
10.1	数项级数的概念与性质	104
10.1.1	数项级数的概念	104
10.1.2	级数的 Cauchy 收敛准则	106
10.1.3	级数的基本性质	107
10.2	正项级数	110
10.2.1	正项级数收敛性的一般判别法	111
10.2.2	根值法与比值法	116
*10.2.3	其他判别法	118
10.3	一般项级数	123
10.3.1	绝对收敛与条件收敛	123
10.3.2	交错级数	123
10.3.3	Dirichlet 判别法和 Abel 判别法	125
*10.4	绝对收敛级数与条件收敛级数的性质	129
10.4.1	收敛级数的可结合性	130
10.4.2	收敛级数的重排	130
10.4.3	级数的乘积	132
	小结	135
	复习题	135
第 11 章	函数项级数	138
11.1	函数列一致收敛的概念与判定	138
11.1.1	逐点收敛与一致收敛的概念	138
11.1.2	函数列一致收敛的判定	142
11.2	一致收敛函数列的性质	147

11.3	函数项级数一致收敛的概念及其判定	153
11.3.1	函数项级数一致收敛的概念	153
11.3.2	一致收敛的判别法	156
11.4	和函数的分析性质	161
*11.5	处处不可微的连续函数	166
	小结	167
	复习题	169
第 12 章	幂级数与 Fourier 级数	171
12.1	幂级数的收敛域与和函数	171
12.1.1	幂级数的定义和收敛域	171
12.1.2	幂级数和函数的分析性质	176
12.1.3	幂级数的运算	181
12.2	函数的幂级数展开	183
12.2.1	Taylor 级数与余项公式	184
12.2.2	几个常用的初等函数的幂级数展开	188
12.3	三角级数与 Fourier 级数	195
12.3.1	三角级数的概念	195
12.3.2	以 2π 为周期的函数的 Fourier 级数	197
12.3.3	以 $2l$ 为周期的函数的 Fourier 级数	199
12.3.4	任意区间 $[a, b]$ 上的 Fourier 级数	202
12.4	Fourier 级数的收敛性	205
12.4.1	Fourier 级数的收敛判别法	205
*12.4.2	Dirichlet 积分	208
*12.4.3	Riemann 引理与 Fourier 级数收敛判别法的证明	210
*12.4.4	Fourier 级数的分析性质	211
*12.4.5	Fourier 级数的平方平均收敛	215
	小结	217
	复习题	219
	习题答案或提示	221
	参考文献	233
	附录 不定积分表	234
	索引	238

第7章 不定积分

7.1 原函数与不定积分的概念

7.1.1 原函数和不定积分的定义

如果函数 $f(x)$ 在某区间上可微, 根据第 4 章的知识, 它有微分 $f'(x)dx$ 或导函数 $f'(x)$, 这是微分学解决的问题. 在科学实践中, 也常常遇到相反的问题, 即已知一个函数的微分或导函数, 要求出该函数, 这是积分学要解决的问题. 由此引入原函数与不定积分的概念.

定义 7.1.1 设 $f(x)$ 在区间 I 上有定义. 若存在 I 上的函数 $\Phi(x)$, 使对任意 $x \in I$ 有

$$d\Phi(x) = f(x)dx \quad \text{或} \quad \Phi'(x) = f(x),$$

则称 $\Phi(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数. 函数 $f(x)$ 在区间 I 上的全体原函数称为 $f(x)$ 在 I 上的不定积分, 记作

$$\int f(x)dx, \quad (7.1.1)$$

其中称 $f(x)$ 为被积函数, 称 $f(x)dx$ 为被积表达式, 称 x 为积分变量.

例 1 试问: 函数 $\frac{1}{5}x^5, -\cos x, e^x$ 分别是哪个函数在 $(-\infty, +\infty)$ 上的原函数?

解 因为对任意 $x \in (-\infty, +\infty)$ 有

$$\left(\frac{1}{5}x^5\right)' = x^4, \quad (-\cos x)' = \sin x, \quad (e^x)' = e^x,$$

所以根据定义 7.1.1 得, 函数 $\frac{1}{5}x^5, -\cos x, e^x$ 分别是 $x^4, \sin x, e^x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的原函数. \square

注 由定义 7.1.1 知不定积分与原函数是总体与个体的关系. 于是存在原函数与存在不定积分是等价的说法.

关于原函数, 有如下两个理论问题:

(1) 原函数的存在性问题, 即满足什么条件的函数必定存在原函数? 这里先给出结论: 若 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 则 $f(x)$ 在区间 I 上存在原函数. 其证明将在

8.2 节给出.

(2) 原函数的结构: 如果已知某个函数的原函数存在, 那么它的任何两个原函数之间有什么关系? 下面的定理回答了这个问题.

定理 7.1.1 设 $\Phi(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数, 则对于任意实常数 C , $\Phi(x) + C$ 也是 $f(x)$ 在 I 上的一个原函数, 并且 $\{\Phi(x) + C | C \in \mathbb{R}\}$ 就是 $f(x)$ 在 I 上的全部原函数.

证明 (1) 对于任意实常数 C , 因为

$$[\Phi(x) + C]' = \Phi'(x) = f(x), \quad x \in I,$$

所以 $\Phi(x) + C$ 也是 $f(x)$ 在 I 上的一个原函数.

(2) 设 $\Psi(x)$ 是 $f(x)$ 在 I 上的任一原函数, 则 $\Psi'(x) = f(x) (\forall x \in I)$, 于是

$$[\Psi(x) - \Phi(x)]' = \Psi'(x) - \Phi'(x) = f(x) - f(x) \equiv 0, \quad \forall x \in I.$$

根据推论 5.2.1 得

$$\Psi(x) - \Phi(x) \equiv C, \quad \forall x \in I,$$

故 $\Psi(x) \equiv \Phi(x) + C (x \in I)$, 从而 $\{\Phi(x) + C | C \in \mathbb{R}\}$ 就是 $f(x)$ 在 I 上的全部原函数. \square

注 定理 7.1.1 说明要求全体原函数, 只需求出任意一个原函数, 因此, 若 $\Phi(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $f(x)$ 的不定积分是一个函数族 $\{\Phi(x) + C | C \in \mathbb{R}\}$. 为方便起见, 写作

$$\int f(x) dx = \Phi(x) + C. \quad (7.1.2)$$

这时又称 C 为积分常数. 由此可得导数 (或微分) 与不定积分的如下关系:

$$d \int f(x) dx = d[\Phi(x) + C] = f(x) dx, \quad (7.1.3)$$

$$\left[\int f(x) dx \right]' = [\Phi(x) + C]' = f(x), \quad (7.1.4)$$

$$\int \Phi'(x) dx = \Phi(x) + C. \quad (7.1.5)$$

这样由例 1 和 (7.1.2) 式可得

$$\int x^4 dx = \frac{1}{5} x^5 + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int e^x dx = e^x + C.$$