



“十三五”科学技术专著丛书

国家自然科学基金青年项目(No.11604009)

经典与量子相变的 典型模型

刘卯鑫 著

Typical models of classical and quantum
phase transitions

非
外
借



北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

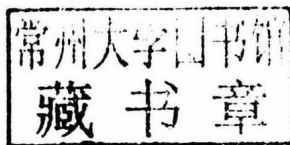


“十三五”科学技术专著丛书

国家自然科学基金青年项目(No. 11604009)

经典与量子相变的典型模型

刘卯鑫 著



北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

内 容 简 介

相变与临界现象在自然界中是非常普遍的。相变与临界现象的研究是物理学,特别是统计物理学的重要课题。过去几十年,人类在认识相变与临界现象方面获得了很多重要的进展。典型的相变模型是深入研究普遍相变与临界现象理论的良好切入点。本书将概要性地介绍相变与临界现象的一般理论以及涉及的相关数学和物理内容,同时着重以经典和量子相变的典型模型为例,来展示相变与临界现象的基本规律。经典伊辛模型、渗流模型和量子拉比模型是本书的主要内容,本书还将报道关于这些模型的前沿研究。本书可以作为学者关于相变与临界现象研究的学术参考书,也可以作为研究生学习相变与临界现象课程的参考书,或者本科生学习统计物理、量子力学课程的拓展读物。

图书在版编目(CIP)数据

经典与量子相变的典型模型 / 刘卯鑫著. -- 北京:北京邮电大学出版社, 2019. 8

ISBN 978-7-5635-5858-2

I. ①经… II. ①刘… III. ①量子—相变—研究 IV. ①O413

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 177899 号

书 名: 经典与量子相变的典型模型

作 者: 刘卯鑫

责任编辑: 毋燕燕

出版发行: 北京邮电大学出版社

社 址: 北京市海淀区西土城路 10 号(邮编:100876)

发 行 部: 电话: 010-62282185 传真: 010-62283578

E-mail: publish@bupt.edu.cn

经 销: 各地新华书店

印 刷: 北京玺诚印务有限公司

开 本: 720 mm×1 000 mm 1/16

印 张: 11.25

字 数: 206 千字

版 次: 2019 年 8 月第 1 版 2019 年 8 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-5858-2

定 价: 38.00 元

• 如有印装质量问题,请与北京邮电大学出版社发行部联系 •

序

相变与临界现象在自然界中普遍存在,而人类真正开始深入认识相变与临界现象的历史也仅仅百余年。相变与临界现象的理论得以建立是 20 世纪物理学的重要成就。至今,这一领域依然有诸多谜题,因此,总结这个领域的知识并继续探索是非常必要的。

经过近几十年的发展,相变与临界现象的理论已经既广且深。对于想要开始探索这一领域的研究者而言,一种值得推荐的“打开方式”或许是找几个本领域具体的例子入手。这样有利于以点带面,找到感觉,既可以对一些具体的问题进行更加深入的研究,也可以以此为基础探索相变与临界现象的一般理论。这正是作者决定写本书的出发点。

本书并不计划系统地罗列相变与临界现象理论中的要素,而是力求介绍尽可能少的和尽可能典型的几个相变与临界现象的模型。本书选取了三个相变模型:伊辛模型、渗流模型和量子拉比模型。它们都是相变与临界现象领域的典型模型,本书对每个模型的介绍都独立占据一章内容。伊辛模型是热力学相变的最典型模型之一,渗流模型是一种典型的几何相变模型,而量子拉比模型是量子光学中的基本模型,其量子相变研究也是近年来刚刚兴起的。在介绍这些具体模型之前,本书也以简述的形式回顾了一些必要的基础知识,这些基础知识包括热力学、统计物理、线性代数和量子力学的基础知识,以及相变与临界现象的概论,这些内容大多是作者给物理专业本科生讲授《热力学与统计物理》以及《量子与统计物理》课程的讲义精选。另外,具体模型介绍中有一些内容也

是作者本人的最新研究结果,例如广义 Achlioptas 过程的相变研究、量子拉比模型近似解、各向异性量子拉比模型的相变与普适性研究等。这些内容的选取都旨在分享,重在抛砖引玉。

本书选取的内容对于热力学、统计物理和量子力学理论而言是很好的扩充,因此可以作为本科生的拓展读物。同时,本书也可以当成一本研究生相关学习的入门材料,适于选取部分内容作为相变与临界现象入门课程的参考。

由于时间仓促以及个人水平限制,书中错误在所难免,因此诚挚欢迎各位同行及广大读者提出批评。

目 录

第 1 章 相变简述	1
1.1 热力学基础	1
1.1.1 热力学发展简史	1
1.1.2 热力学基本内容	3
1.1.3 状态方程	4
1.1.4 热力学的微分描述	6
1.1.5 卡诺循环	9
1.1.6 热力学第二定律	10
1.2 统计物理基础	11
1.2.1 统计物理基本原理	11
1.2.2 系综之间的关系	13
1.3 相变与临界现象	17
1.3.1 相变理论的发展历史	17
1.3.2 相变基础	19
1.3.3 临界现象基本概念	23
1.3.4 平均场——朗道相变理论	29
1.4 线性代数基础	31
1.4.1 矩阵及其运算	31
1.4.2 矩阵转置、共轭、转置共轭	32
1.4.3 方阵行列式	33
1.4.4 矩阵本征值	33
1.5 量子力学基础	34
1.5.1 量子系统概述——状态和力学量	34
1.5.2 源于实验的量子测量事实	35

1.5.3	经典解释面临困难	35
1.5.4	量子的真相	36
1.5.5	量子力学关于状态和力学量的数学描述	37
1.5.6	厄米算符、么正算符	39
1.5.7	态和算符用矩阵表示	39
1.5.8	表象变换	40
1.5.9	对易关系、坐标表象	42
1.5.10	时间演化、量子测量	43
1.6	谐振子	45
1.6.1	量子谐振子	45
1.6.2	因式分解	46
1.6.3	粒子数算符、产生算符、湮灭算符、本征值问题	47
1.6.4	算符和态在具体表象中的表示	50
1.6.5	相干态	52
	本章参考文献	53
第2章	伊辛模型	55
2.1	伊辛模型简介	55
2.2	伊辛模型的近似解、严格解、数值解	59
2.2.1	伊辛模型平均场近似	59
2.2.2	一维伊辛模型严格解	62
2.2.3	蒙特卡罗方法	64
	本章参考文献	66
第3章	渗流模型	67
3.1	渗流模型简介	67
3.1.1	定向渗流系统	68
3.1.2	爆炸式渗流系统	69
3.2	渗流模型的数值方法	70
3.2.1	搜索渗流构型中的最大团——深度优先	70
3.2.2	渗流的快速蒙特卡罗算法	71
3.3	复杂网络中相变研究简介	85

3.4 广义 Achlioptas 过程在二维格点上的临界行为	89
3.4.1 渗流模型	90
3.4.2 渗流的动力学过程	90
3.4.3 渗流模型的相变	91
3.4.4 渗流模型的有限尺度标度性	92
3.4.5 二维格点上的广义 Achlioptas 过程	92
3.4.6 小结	102
本章参考文献	102
第 4 章 量子拉比模型	110
4.1 量子拉比模型简介	110
4.1.1 量子拉比模型概述	110
4.1.2 量子拉比模型的哈密顿量	111
4.1.3 各向异性	111
4.2 平均光子数依赖的变分方法	112
4.2.1 截断哈密顿量	113
4.2.2 基于基矢的矩阵近似	116
4.2.3 基于波函数的想法	118
4.2.4 激发态	123
4.2.5 讨论	126
4.2.6 一些计算细节	127
4.3 频率重整的多极化展开方法	129
4.3.1 极化子图像	129
4.3.2 重写哈密顿量	130
4.3.3 频率重整的多极化展开方法	131
4.3.4 数值结果	132
4.3.5 频率重整的重要性	134
4.3.6 结论	134
4.3.7 一些计算细节	135
4.4 各向异性量子拉比模型相变研究简述	137
4.4.1 谐振子低频区域的新情况	137
4.4.2 关键因素——标度行为	138

4.4.3	简单的解析分析	138
4.4.4	序参量	139
4.4.5	各向异性的研究	139
4.4.6	J-C 线的谜团	140
4.4.7	相图	141
4.4.8	普适性	142
4.4.9	各向异性与热力学极限的关系	142
4.5	临界区域的解析方法	143
4.5.1	谐振子在坐标表象下的解析处理	143
4.5.2	Schrieffer-Wolff 变换	149
	本章参考文献	152
第 5 章	相变与临界现象的延伸讨论	155
5.1	相变与临界现象研究的理论背景	155
5.1.1	研究相变与临界现象的一般性原则	155
5.1.2	统计物理的愿景	156
5.1.3	量子力学拾零	157
5.1.4	相变为何重要	161
5.2	相变与临界现象研究的一般性挑战	161
5.2.1	有限与无限	162
5.2.2	临界现象拾零	164
5.2.3	重整化群	166
5.2.4	有限尺度标度性	168
5.3.5	实验和结语	170

第 1 章 相变简述

本章概要性地介绍关于相变的基础知识,包括热力学、统计物理、线性代数、量子力学的一些基本思想和内容,也将介绍相变与临界现象理论的历史和发展。

1.1 热力学基础

1.1.1 热力学发展简史

热力学的建立在很大程度上得益于人类生产力的进步。热力学的辉煌成就是在 19 世纪中期达成的,标志性的成果是热力学第二定律的建立。我们将回顾热力学直到其第二定律建立的历史,同时回顾这一段历史进程中的重要物理学家。物理学是建立在实验基础上的科学,而热力学的测量又大致可以分为温度的测量和热的测量,所以关于热力学的历史回顾也将分为两部分——关于温度和热的认知。

1. 温度

每当谈到温度,作者都会想起一个很有意思的青年物理学家朋友。这位朋友喜欢在夏天穿短袖,并且一直保持这样凉爽的状态直到秋天。等到天气转凉,他就会直接在短袖外面套个暖和的棉衣过冬。直到来年深春天气转热,他将再一次穿回短袖。仿佛在他的感官里只有两个温度。书本里都会告诉我们,温度是描述物体冷热程度的物理量,但是仅仅这样描绘温度还不够定量和科学,因为温度并不是

只有冷和热两种状态——就像这位朋友一样，体验到的不是冷就是热。事实上，生活的经验会告诉我们，冷热是可以“连续”变化的。同时，用感官去体验冷热又是主观的，所以，如果可以定量描述冷热，并引入相应的物理量，那么冷热就会拥有客观而定量的刻画。完成这一任务的物理量就是温度。事实上，可以引入温度并不是理所当然的，它涉及热力学、统计物理中很多最根本的认知。也可以说，存在温度这样的物理量，充分反映了我们所处客观世界的热力学性质。

鉴于本书并不是讨论热力学与统计物理基本问题的专著，我们不妨将存在温度这样的物理量当作一个先验假设承认下来。那么接下来重要的事情就是要定量测量它。测量温度本质上是要找到温度所导致的可观测物理效应，比如力学效应，如我们熟知的热胀冷缩。在测量温度的历史上，力学效应是最早被考虑的。这也得益于力学是物理各个分支里较早得以良好的发展。

温度测量的历史至少可以追溯到实验物理开山鼻祖伽利略的工作。1593年，伽利略发明了第一支空气量温器。注意，这还不是真正的温度计。伽利略的装置可以根据热胀冷缩效应，通过空气体积定性示意冷热。但是这样的装置较为粗糙，并且受气压影响较大。这是因为空气的体积不仅决定于温度，也依赖于压强，所以伽利略的装置在山脚和山顶的表现很不相同。后来人们在伽利略空气量温器的基础上制造了气体温度计。

伽利略之后，Grossherzog Ferdinand II（伽利略的学生）发明了温度计。这种最早的温度计介质材料为酒精。酒精替代空气，在很大程度上排除了压强的干扰因素，但是酒精的缺点也很明显：它的沸点低于水的沸点。

酒精温度计的改进版本就是水银温度计。水银温度计已经使用到了今天。华氏（Daniel Fahrenheit, 1686—1736）在1714年，摄氏（Anders Celsius, 1701—1744）在1742年分别研制了水银温度计，而且给出了各自的温标，就是今天我们常用的摄氏温标和华氏温标。摄氏温标以一个大气压下冰点为 0°C ，水的沸点为 100°C ，之间按照水银的热胀冷缩均匀分割为100份。

事实上，一个大气压的测量并不容易。而温度计温标确定的核心问题在于固定压强。为了追求精密，1954年第10届国际计量大会决定采用水三相点，这样一个一个固定点，来定义温标。

2. 热

除了温度之外，热力学的另一个重要概念就是热。人类最终能够正确认识热经历了漫长的历史。早先机械唯物论认为热本身就是一种物质。历史上关于热比

较流行的观点曾经有所谓的燃素说、热质说等。事实证明燃烧和热并不是物质。虽然物理学历史充满了唯物论战胜唯心论的例子,但关于热的认识的历史则不同,它是一种更为生动的唯物论战胜机械死板唯物论的范例。这种幸运在某种程度上得益于热这个概念一开始就吸引了各种行业研究者和富有创造性的劳动人民的兴趣。

最终人们认识到:热是一种运动形式。基于这样的认识人们建立起了力学第一定律,即能量守恒。能量守恒早期的代表人物是迈耶(Julius Robert Mayer, 1814—1878)。之后焦耳(James Prescott Joule, 1818—1889)于 1840—1850 做了大量的实验,测定了热的功当量。由此论证了在转移能量这一点上,热和功是等效的。

法国工程师卡诺(Sadi Carnot, 1796—1832)的工作在热力学发展历史上可谓承上启下。他深入研究了热机效率的理论极限,并于 1824 年提出卡诺定理:两个热源之间工作的可逆热机效率高于不可逆热机。遗憾的是,他的思想建立在热质说和能量守恒基础上。事实上热质说并不正确。然而卡诺的结论是正确的,而且为热力学第二定律的建立奠定了最为重要的基础。

之后最为重要的事情是热力学第二定律的建立。热力学第二定律的代表人物开尔文(Lord Kelvin, William Thomson, 1824—1907)于 1848 年提出了绝对温标。克劳修斯(Rudolf Clausius, 1822—1888)于 1850 年提出了熵的概念,而且两人对热力学第二定律有各自的陈述。

1.1.2 热力学基本内容

1. 热力学定律

热力学主要是由热力学定律作为框架建立起来的。以下为热力学定律。

热力学第零定律:如果两个热力学系统中的每一个都与第三个热力学系统处于热平衡(温度相同),则它们彼此也必定处于热平衡。

热力学第一定律:热量可以从一个物体传递到另一个物体,也可以与机械能或其他能量互相转换,但是在转换过程中,能量的总值保持不变。

热力学第二定律有所谓的克劳修斯表述和开尔文表述。克劳修斯表述为:不可能把热量从低温物体传向高温物体而不引起其他变化。开尔文表述为:不可能制成一种循环动作的热机,从单一热源取热,使之完全变为功而不引起其他变化。

该两种表述等价。

热力学第三定律:热力学系统的熵在温度趋近于绝对零度时趋于定值。这个定值可以取为零。

2. 热力学系统的描述——平衡态与状态变量

平衡态:在系统与环境间以及系统内部无宏观物质和能量交换情况下,其宏观性质不随时间变化的状态叫平衡态。

状态变量:虽然热力学系统包含极大的数目(10^{23})粒子的复杂运动,其平衡态只需要少数几个参数即可完全描述,这些变量叫状态变量。

状态变量可以分为如下两个变量。

- (1) 广延量:随系统大小的变化而变化。如 N, V, S 等。
- (2) 强度量:与系统大小无关。如 P, T 等。

热力学功

$$W = -PdV$$

由广义力 P (强度量)和广义位移 V (广延量)共同确定, P 与 V 成对出现。更多的状态变量如下。

广义力:磁场强度 H ;极化强度;张力 J ;表面张力 σ ;化学势 μ 。

广义位移:磁化强度 M ;电场强度 E ;长度 L ;面积 A ;粒子数 N 。

另外,还有一类描述系统热力学行为的状态变量,也是可测量量。

- (1) 热响应函数:热容量

$$C = \frac{dQ}{dT}$$

这里要注意的是定义热容必须规定过程。

- (2) 力学响应函数:压缩系数

$$\kappa = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$$

- (3) 磁响应函数:磁化率

$$\chi = \frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial H} \right)_T$$

1.1.3 状态方程

状态方程:描述平衡态系统状态变量之间的函数关系。

一般而言,热力学系统的宏观参量 P, V, T 等并不独立。它们之间的函数关系就是状态方程,即

$$f(P, V, T) = 0$$

取微分

$$0 = df(P, V, T) = \frac{\partial f}{\partial P} dP + \frac{\partial f}{\partial V} dV + \frac{\partial f}{\partial T} dT$$

于是

$$dP = - \left(\frac{\partial f}{\partial V} dV + \frac{\partial f}{\partial T} dT \right) / \left(\frac{\partial f}{\partial P} \right)$$

得

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T = - \left(\frac{\partial f}{\partial V} \right) / \left(\frac{\partial f}{\partial P} \right)$$

同理

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = - \left(\frac{\partial f}{\partial T} \right) / \left(\frac{\partial f}{\partial V} \right)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_V = - \left(\frac{\partial f}{\partial P} \right) / \left(\frac{\partial f}{\partial T} \right)$$

最后得到

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_V = -1$$

1. 理想气体状态方程

(1) 单成分

$$PV = nRT$$

其中, n 表示摩尔数; T 表示温度; P 表示压强; $R = 8.314 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$ 。

(2) 多成分

$$PV = \sum_{i=1}^m n_i RT$$

其中, n_i 为第“ i ”种成分的摩尔数。

2. 非理想气体状态方程

(1) 维里展开:

$$P = \left(\frac{nRT}{V} \right) \left[1 + \frac{n}{V} B(T) + \left(\frac{n}{V} \right)^2 C(T) + \dots \right]$$

其中, $B(T)$ 表示第二维里系数; $C(T)$ 表示第三维里系数。

对于理想经典气体,全部维里系数为零;在粒子间存在相互作用时,维里系数

不为零。理想量子气体(玻色-爱因斯坦气体或费米-狄拉克气体)的维里系数不为零,这是因为量子关联导致了有效的相互作用。

(2) 范德瓦尔斯状态方程

$$P = \frac{nRT}{V-nb} - a\left(\frac{n}{V}\right)^2 = \frac{nRT}{V} \left[1 + \frac{n}{V} \left(b - \frac{a}{RT} \right) + \left(\frac{nb}{V} \right)^2 + \dots \right]$$

1.1.4 热力学的微分描述

1. 内能作为热力学状态量的函数

对于一个 $\{P, V, T\}$ 系统,如果这三个量确定了,系统的状态就唯一确定了。所以内能可以写成以它们三者作为变量的函数,即

$$U = U(P, V, T)$$

然而由于状态方程的存在,这三个变量只有两个是独立的,所以内能只依赖于两个独立变量。它可以写成如下三种形式

$$U = U(P, V)$$

$$U = U(P, T)$$

$$U = U(V, T)$$

热力学主要研究这些函数的微分及相关的各种关系。例如,最后一个函数的全微分为

$$dU(V, T) = \frac{\partial U(V, T)}{\partial V} dV + \frac{\partial U(V, T)}{\partial T} dT$$

2. 热容

根据热力学第一定律,有

$$dU = dQ + dW = dQ - PdV$$

热容是要依赖于过程的。比如等体积热容根据定义可以表达为

$$C_V = dQ/dT|_V = \frac{\partial U(V, T)}{\partial T}$$

而等压热容可以表达为

$$\begin{aligned} C_P &= dQ/dT|_P = \frac{dU(P, T) + PdV}{dT} \\ &= \frac{\partial U(P, T)}{\partial T} + P \frac{\partial V(P, T)}{\partial T} \end{aligned}$$

为了表示等压热容方便,可以对内能做勒让德变换,引入状态函数焓

$$H=U+PV$$

其全微分为

$$\begin{aligned}dH &= dU + PdV + VdP = dQ - PdV + PdV + VdP \\ &= dQ + VdP\end{aligned}$$

因此,等压热容为

$$\begin{aligned}C_p &= dQ/dT|_P = \frac{\partial H(P, T)}{\partial T} \\ dV(P, T) &= \frac{\partial V(P, T)}{\partial P} dP + \frac{\partial V(P, T)}{\partial T} dT\end{aligned}$$

3. 内能全微分用响应函数表示

内能是理论概念,而热容,相应函数等是有可能在实验上测量的。虽然实际上等体积热容也并不好测量,但是将内能的全微分跟热容等相应函数联系起来至少在原则上展示了内能跟可测量量之间的关系。

将内能从 $\{V, T\}$ 的函数变为 $\{P, T\}$ 的函数,有

$$\begin{aligned}U(V(P, T), T) &= \frac{\partial U(V, T)}{\partial V} dV + \frac{\partial U(V, T)}{\partial T} dT \\ &= \frac{\partial U(V, T)}{\partial V} \left[\frac{\partial V(P, T)}{\partial P} dP + \frac{\partial V(P, T)}{\partial T} dT \right] + \frac{\partial U(V, T)}{\partial T} dT \\ &= \frac{\partial U(V, T)}{\partial V} \frac{\partial V(P, T)}{\partial P} dP + \left[\frac{\partial U(V, T)}{\partial V} \frac{\partial V(P, T)}{\partial T} + \frac{\partial U(V, T)}{\partial T} \right] dT\end{aligned}$$

另一方面,内能作为 $\{P, T\}$ 的函数也可以表示为

$$dU(P, T) = \frac{\partial U(P, T)}{\partial P} dP + \frac{\partial U(P, T)}{\partial T} dT$$

比较后可以得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial U(P, T)}{\partial P} &= \frac{\partial U(V, T)}{\partial V} \frac{\partial V(P, T)}{\partial P} \\ \frac{\partial U(P, T)}{\partial T} &= \frac{\partial U(V, T)}{\partial V} \frac{\partial V(P, T)}{\partial T} + \frac{\partial U(V, T)}{\partial T}\end{aligned}$$

即

$$C_p - P \frac{\partial V(P, T)}{\partial T} = \frac{\partial U(V, T)}{\partial V} \frac{\partial V(P, T)}{\partial T} + C_v$$

因此

$$\frac{\partial U(V, T)}{\partial V} = \left[C_p - C_v - P \frac{\partial V(P, T)}{\partial T} \right] \frac{\partial T(P, V)}{\partial V}$$

综上,内能可以表示为

$$dU(V, T) = \left[\left(C_P - C_V - P \frac{\partial V(P, T)}{\partial T} \right) \frac{\partial T(P, V)}{\partial V} \right] dV + C_V dT$$

4. 绝热方程

绝热过程的代数方程一般而言并不容易得到。因此退而求其次,下面来探讨绝热过程的微分方程。

假设绝热过程由两个无穷小过程逼近。一个是等压过程 A,另一个是等体积过程 B。

$$A: (P, V) \rightarrow (P + dP_A, V)$$

$$B: (P + dP_A, V) \rightarrow (P + dP_A, V + dV_B)$$

根据热力学第一定律,有

$$dU_A = dQ_A$$

$$dU_B = dQ_B - P dV_B$$

两个过程加起来,有

$$dU = dU_A + dU_B = -P dV_B$$

另一方面,两个过程的内能微分总可以写成

$$\begin{aligned} dU_A(V, T) &= \frac{\partial U_A(V, T)}{\partial V} dV_A + \frac{\partial U_A(V, T)}{\partial T} dT_A \\ &= \frac{\partial U_A(V, T)}{\partial T} dT_A = C_V(V, T) dT_A \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} dU_B(P, T) &= \frac{\partial U_B(P, T)}{\partial P} dP_B + \frac{\partial U_B(P, T)}{\partial T} dT_B = \frac{\partial U_B(P, T)}{\partial T} dT_B \\ &= C_P(P, T) dT_B - P \frac{\partial V(P, T)}{\partial T} dT_B \end{aligned}$$

结合以上的公式得

$$C_V(V, T) dT_A + C_P(P, T) dT_B - P \frac{\partial V(P, T)}{\partial T} dT_B = -P dV_B$$

其中温度的微分又可以根据状态方程表示为

$$dT_A(P, V) = \frac{\partial T(P, V)}{\partial P} dP + \frac{\partial T(P, V)}{\partial V} dV = \frac{\partial T(P, V)}{\partial P} dP_B$$

和