



研究生高水平课程体系建设丛书

# 结构/机构可靠性设计基础

吕震宙 宋述芳 李璐祯 王燕萍 编著

西北工业大学出版社



研究生高水平课程体系建设丛书

上册本【全部内容】

# 结构/机构可靠性设计基础

吕震宙 宋述芳 李璐祎 王燕萍 编著

西北工业大学出版社

西安

ISBN 7-5612-3112-2  
 I. ①结... II. 吕... III. 结... IV. TB114.32  
 中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第018239号  
 定价: 35.00元

**【内容简介】** 本书全面系统地介绍了结构/机构可靠性分析与设计的基本理论和方法。主要包括：①静态可靠性和可靠性灵敏度分析的矩方法、各类数字模拟法和代理模型法；②时变可靠性分析的数字模拟法、跨越率法、包络函数法和代理模型法；③可靠性优化设计和稳健优化设计的基本方法。

本书主要用作高等学校硕、博士研究生和高年级本科生相关课程的教材，也可供从事结构/机构可靠性分析与设计的研究人员和工程技术人员阅读参考。

### 图书在版编目(CIP)数据

结构/机构可靠性设计基础 / 吕震宙等编著. —西安:西北工业大学出版社, 2019. 3

(研究生高水平课程体系建设丛书)

ISBN 978 - 7 - 5612 - 6349 - 5

I. ①结… II. ①吕… III. ①可靠性设计-研究生-教材 IV. ①TB114. 32

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 018239 号

JIEGOU/JIGOU KEKAOXING SHEJI JICHU

### 结构/机构可靠性设计基础

责任编辑:何格夫

策划编辑:何格夫

责任校对:朱辰浩

装帧设计:董小伟

出版发行:西北工业大学出版社

通信地址:西安市友谊西路 127 号

邮编:710072

电 话:(029)88491757, 88493844

网 址:www.nwpup.com

印刷者:兴平市博闻印务有限公司

开 本:787 mm×1 092 mm 1/16

印 张:22.75

字 数:597 千字

版 次:2019 年 3 月第 1 版

2019 年 3 月第 1 次印刷

定 价:72.00 元

如有印装问题请与出版社联系调换

# 前 言

结构/机构的可靠性分析与设计是一门古老而又年轻的学科,其发展最早源自于人们意识到影响结构/机构系统性能的因素是不完全可控的,这种不可控的影响因素导致了系统性能的不确定性。为了掌握不确定性因素影响下的系统性能,就有必要发展一种不可控、不确定性因素影响下结构/机构性能的分析与设计方法,于是结构/机构可靠性学科便逐渐发展了起来。近年来,随着工业技术和管理科学的发展,可靠性被应用到越来越多的领域,其理论体系得到了不断的完善,内涵日渐丰富,并且现代计算机软硬件技术的高速发展也为可靠性学科注入了新的活力。

传统的结构/机构可靠性分析与设计方法中一般采用随机性来描述不可控的不确定性因素,以概率密度来量化这种随机不确定性,其中可靠性分析的主要任务是将影响结构/机构性能的输入变量的随机不确定性传递给输出性能,以便掌握输出性能的取值规律,因而可以得出的结论是:可靠性分析就是将输入不确定性传递给输出并得到输出性能不确定性的过程,这种传递依赖于输出性能与输入变量之间的确定性关系。

关于可靠性分析主要任务中的这种不确定性的传递分析,最基本的传递就是依据输出和输入的关系将输入变量的随机不确定性的统计矩信息传递给输出性能,得到输出的统计矩信息,从而部分掌握输出性能的取值规律,并利用概率统计的基本理论由输出的统计矩近似得到结构/机构系统性能满足规定要求的安全概率。在可靠性分析理论中,最先发展的就是这种统计矩传递方法,包括一次二阶矩方法、二次二阶矩方法以及基于各种点估计的矩方法等。统计矩属于随机不确定性的局部统计特征,由输出性能的局部统计特征得到的安全概率或者是失效概率在很多情况(诸如高度非线性、高维变量、小失效概率等)下是不准确的,于是又发展了各种数字模拟方法来解决可靠性分析问题。

数字模拟可靠性分析方法中最基础的方法就是蒙特卡罗模拟法(Monte Carlo Simulation, MCS)。MCS的理论基础是大数定律,它利用失效事件的频率来近似失效事件的概率,这种近似解会随着样本数的增加而逐渐收敛于真值。MCS的显著优点是理论基础牢固,思路简单,编程容易,求解难度与变量的分布形式、维度以及极限状态方程的形式无关等,MCS的主要缺点是对小概率事件的计算量大。针对MCS方法的缺点又发展了收敛速度更高的数字模

拟方法,最主要的是重要抽样法。重要抽样法由于选取了使估计值方差更小的重要抽样密度函数,从而大大降低了相同样本数下估计值的方差,提高了 MCS 的计算效率。针对工程中常见的高维输入变量的问题,发展了更高效的数字模拟方法,包括子集模拟、线抽样和方向抽样等。其中子集模拟的主要特点是将稀有事件的小概率等价转换成一系列较大的条件概率的乘积,并利用马尔可夫链 Monte Carlo 法来抽取条件样本以高效计算转换后的条件概率,而线抽样和方向抽样则是利用降维的思想来提高高维小失效概率可靠性分析问题的效率。

虽然各种矩传递方法和数字模拟法的效率和精度在不断提高,但仍然无法满足工程中复杂隐式极限状态方程问题的计算效率要求,于是又促使可靠性研究人员发展了可靠性分析的代理模型法。代理模型法的基本思想就是希望通过少量的计算来建立一个在概率上能够近似原问题中隐式极限状态方程的显式代理模型,从而极大地减少可靠性分析的计算量。可靠性分析中的代理模型包括响应面法、支持向量机及 Kriging 模型等,随着如今机器学习算法的不断完善和提高,代理模型在可靠性分析中的应用研究也越来越广泛,并且也使得可靠性分析逐步能够真正地应用于工程中复杂隐式极限状态方程的问题。

本书主要介绍可靠性分析和设计的一些基本理论,包括静态/时变可靠性和可靠性灵敏度分析方法、基于可靠性的优化设计方法和基于稳健性的优化设计方法等。书中针对每一种理论方法都有相应的算例验证,并附有详细的算法流程和算法程序,以便学习各种理论后进行相应的练习,加深对理论知识的理解。为了便于每一章的阅读,本书基本上是每章自成一体,因此会出现一些不同章节中共同基础部分的少量重复。

本书共 13 章,写作分工如下:第 1,2,10,11,13 章由吕震宙执笔,第 3,4 章由王燕萍执笔,第 5,6,7 章由宋述芳执笔,第 8,9,12 章由李璐祎执笔。全书由吕震宙教授统稿并定稿。

笔者特别要感谢国家自然科学基金(51475370,51775439)和西北工业大学“双一流”研究生核心课程建设项目的资助,感谢本书编写过程中员婉莹、成凯、冯凯旋、凌春燕、肖思男等研究生的辛勤劳动。写作本书曾参阅了相关文献、资料,在此,谨向其作者深致谢忱。

尽管在编写过程中尽心尽力,但由于笔者能力所限,错误或不当之处恳请读者批评指正。

编著者

2018 年 12 月

# 目 录

<b>第 1 章 绪论</b> .....	1
1.1 结构/机构可靠性分析中的基本概念.....	1
1.2 结构/机构可靠性分析的研究进展.....	3
1.3 本书主要内容 .....	5
<b>第 2 章 可靠性和可靠性灵敏度分析的矩方法</b> .....	6
2.1 一次二阶矩方法(First Order and Second Moment, FOSM) .....	6
2.2 改进一次二阶矩可靠性分析方法(Advanced FOSM, AFOSM) .....	10
2.3 针对非正态变量的 Rackwitz - Fiessler(R - F)方法 .....	18
2.4 计算功能函数各阶矩的点估计方法.....	23
2.5 可靠性及可靠性灵敏度分析的四阶矩方法.....	30
2.6 系统可靠性及可靠性灵敏度分析的矩方法.....	33
2.7 相关变量的独立转换.....	37
2.8 基于点估计的矩方法进行可靠性及可靠性灵敏度分析的适用范围讨论.....	42
2.9 本章小结.....	43
参考文献 .....	43
<b>第 3 章 Monte Carlo 数字模拟法</b> .....	45
3.1 随机数发生器和随机变量的抽样原理.....	45
3.2 Monte Carlo 法可靠性分析及其收敛性 .....	48
3.3 Monte Carlo 法可靠性局部灵敏度分析及其收敛性 .....	51
3.4 相关正态变量情况下的可靠性及可靠性局部灵敏度分析的 Monte Carlo 法.....	52
3.5 本章小结.....	65
参考文献 .....	65
<b>第 4 章 重要抽样法</b> .....	67
4.1 基于设计点的重要抽样法.....	67
4.2 截断抽样和截断重要抽样法.....	86
4.3 自适应截断抽样可靠性与可靠性局部灵敏度分析 .....	100
4.4 本章小结 .....	105

参考文献	105
<b>第 5 章 子集模拟法</b>	107
5.1 子集模拟可靠性及可靠性局部灵敏度分析	107
5.2 子集模拟重要抽样可靠性及可靠性局部灵敏度分析	113
5.3 算例分析	120
5.4 本章小结	130
参考文献	131
<b>第 6 章 可靠性分析的线抽样方法</b>	132
6.1 单模式可靠性分析的线抽样方法	132
6.2 多模式可靠性分析的线抽样方法	140
6.3 相关正态变量情况下可靠性分析的线抽样方法	147
6.4 本章小结	153
参考文献	153
<b>第 7 章 可靠性分析的方向抽样法</b>	155
7.1 单模式方向抽样可靠性分析方法	155
7.2 多模式方向抽样可靠性分析方法	162
7.3 相关正态变量情况下可靠性分析的方向抽样法	167
7.4 本章小结	172
参考文献	172
<b>第 8 章 响应面法与支持向量机</b>	173
8.1 响应面法	173
8.2 支持向量机	184
8.3 本章小结	198
参考文献	198
<b>第 9 章 基于 Kriging 代理模型的可靠性和可靠性局部灵敏度分析方法</b>	200
9.1 Kriging 代理模型及可靠性分析的自适应学习函数	200
9.2 可靠性及可靠性局部灵敏度分析的 AK - MCS 法	206
9.3 可靠性及可靠性局部灵敏度分析的 AK - IS 法	216
9.4 可靠性及可靠性局部灵敏度分析的 Meta - IS - AK 法	225
9.5 本章小结	236
参考文献	236
<b>第 10 章 时变可靠性分析的基本方法</b>	238
10.1 时变可靠性分析的定义	238
10.2 时变可靠性分析的 Monte Carlo 法	239

10.3 时变可靠性分析的跨越率法	243
10.4 时变可靠性分析的极值法	247
10.5 时变可靠性分析的包络函数法	251
10.6 时变可靠性分析的代理模型法	262
10.7 本章小结	284
参考文献	284
<b>第 11 章 失效概率函数</b>	<b>286</b>
11.1 失效概率函数的定义及基本求解方法	286
11.2 失效概率函数求解的自主学习 Kriging 方法	287
11.3 失效概率函数求解的 Bayes 公式方法	299
11.4 本章小结	312
参考文献	313
<b>第 12 章 基于失效概率的全局灵敏度分析</b>	<b>314</b>
12.1 基于失效概率的全局灵敏度指标的定义	314
12.2 基于失效概率的全局灵敏度指标的新解释	320
12.3 基于贝叶斯公式和马尔可夫链的重要抽样法	322
12.4 本章小结	326
参考文献	326
<b>第 13 章 随机不确定性环境下的结构设计</b>	<b>328</b>
13.1 可靠性优化设计	328
13.2 稳健性优化设计	347
13.3 算例分析	351
13.4 本章小结	354
参考文献	355

# 第 1 章 绪 论

结构/机构通常需要在其服役期内安全可靠地完成规定的任务,然而由于加工制造的误差、外部载荷的差异以及人为失误等因素,会导致实际中的结构/机构可能无法完全安全可靠地完成规定的任务。我们将这些导致结构/机构无法完成规定任务的因素统称为不确定性因素。为了有效地进行结构/机构的安全设计以及性能评估,研究人员在过去的 40 多年里逐渐发展起了可靠性分析方法。可靠性分析方法在充分考虑不确定性因素的基础上,能够对结构/机构的安全程度及性能进行量化,从而有助于工程人员充分掌握产品的性能并进行性能的设计。

经典的可靠性分析方法可以看作是一种系统行为满足规定要求的概率分析,它采用概率理论对不确定因素进行描述,进而通过不确定性传递分析量化响应量的不确定性,得到结构/机构的可靠度(或失效概率)。可靠性分析的基本框图如图 1-1 所示。此外,也有学者采用非概率的方法对不确定性因素进行描述,进而提出了非概率可靠性分析方法。本书主要针对结构/机构的概率可靠性分析方法进行介绍。

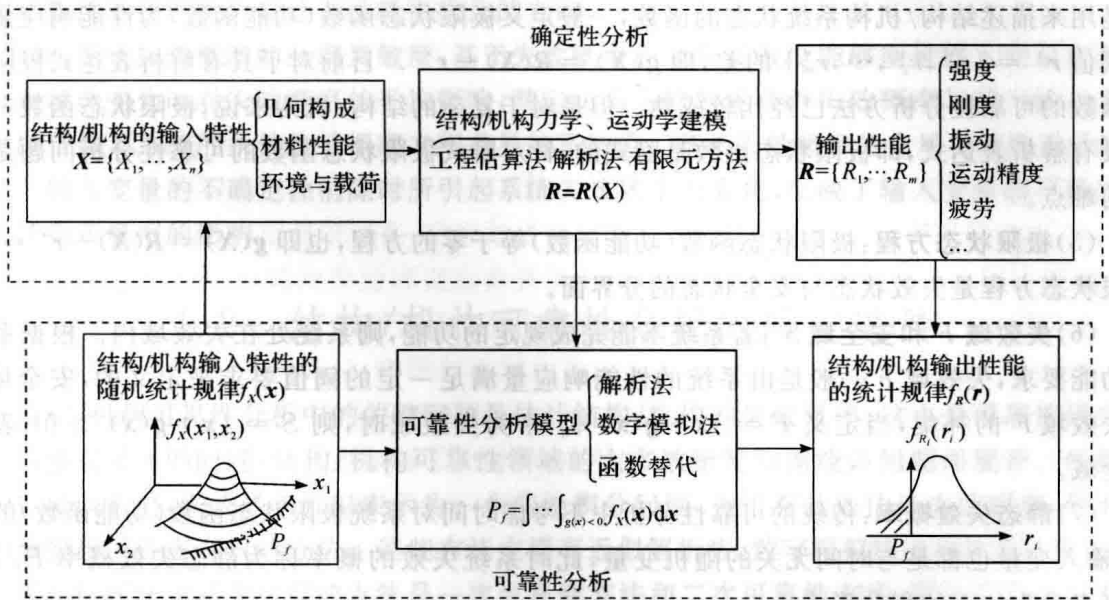


图 1-1 结构/机构可靠性分析基本框图

## 1.1 结构/机构可靠性分析中的基本概念

首先介绍结构/机构可靠性分析中所涉及的一些基本概念。

(1) 输入变量  $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ : 在结构/机构的可靠性分析中,将影响结构/机构系统

行为(或称为性能响应量)的不确定性因素称为输入变量,输入变量的不确定性决定了性能响应量的不确定性。输入变量的不确定性通常采用概率密度函数  $f_X(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_X)$  (其中  $\boldsymbol{\theta}_X$  表示输入变量的分布参数)进行定量描述,  $f_X(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_X)$  表示了输入变量的随机取值规律。在一般的结构/机构可靠性分析中,输入变量包括结构/机构的几何构成、材料性能以及外部载荷等,这些输入变量的统计规律在进行可靠性分析之前必须是已知的。如果不了解输入变量的统计规律,就无法得到作为输入变量函数的性能响应量的统计规律,因此输入变量统计规律的获取是可靠性分析与设计中的基本问题。

(2) **性能响应量  $\mathbf{R} = \{R_1, R_2, \dots, R_m\}$** : 在结构/机构可靠性分析中,响应量是用来描述结构/机构系统行为特性的,它可以是位移、应力、寿命、振动特征量和运动学特征量等。性能响应量是输入变量的函数,即  $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{X})$ ,输入变量与性能响应量之间的函数关系是由自然规律确定的。可靠性分析的目的就是要得到性能响应量的统计规律,并且性能响应量的统计规律是由输入变量的统计规律以及输入变量-性能响应量之间的函数关系确定的,因此由自然规律确定的输入变量-性能响应量之间的函数关系是采用概率论的手段进行结构/机构可靠性分析的前提。

(3) **不确定性传递**: 在结构/机构可靠性分析中,关键是要得到性能响应量的统计规律,将输入变量的统计规律通过输入变量-性能响应量之间的函数关系传递得到性能响应量的统计规律称为不确定性传递。不确定性传递是可靠性分析的主要问题,常用的方法主要有(近似)解析法、数字模拟法和代理模型法等。

(4) **极限状态函数  $g(\mathbf{X}) = \{g_1(\mathbf{X}), g_2(\mathbf{X}), \dots, g_m(\mathbf{X})\}$** : 极限状态函数也称为功能函数,它是用来描述结构/机构系统状态的函数,一般定义极限状态函数(功能函数)为性能响应量与其阈值  $\mathbf{r}^* = \{r_1^*, r_2^*, \dots, r_m^*\}$  的差,即  $g(\mathbf{X}) = \mathbf{R}(\mathbf{X}) - \mathbf{r}^*$ 。目前对于具有解析表达式极限状态函数的可靠性分析方法已经比较成熟。但是对于复杂的结构/机构来说,极限状态函数一般都没有解析表达式,即极限状态函数是隐式的,针对隐式极限状态函数的可靠性分析问题是目前的难点。

(5) **极限状态方程**: 极限状态函数(功能函数)等于零的方程,也即  $g(\mathbf{X}) = \mathbf{R}(\mathbf{X}) - \mathbf{r}^* = 0$ ,极限状态方程是失效状态与安全状态的分界面。

(6) **失效域  $F$  和安全域  $S$** : 若系统不能完成规定的功能,则系统处在失效域内。根据系统的功能要求,失效域  $F$  一般是由系统的性能响应量满足一定的阈值要求来定义的,安全域  $S$  为失效域  $F$  的补集,当定义  $F = \{\mathbf{x} : g(\mathbf{x}) \leq 0\}$  为失效域时,则  $S = \{\mathbf{x} : g(\mathbf{x}) > 0\}$  表示安全域。

(7) **静态失效概率**: 传统的可靠性分析中不考虑时间对系统极限状态函数(功能函数)的影响,输入变量也都是与时间无关的随机变量,此时系统失效的概率称为静态失效概率  $P_f$ ,它可以表示为如下的积分形式:

$$\begin{aligned} P_f &= P\{F\} = P\{g(\mathbf{x}) \leq 0\} \\ &= \int_F f_X(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_X) d\mathbf{x} = \int_{g(\mathbf{x}) \leq 0} f_X(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_X) d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (1-1)$$

(8) **时变失效概率**: 在可靠性分析中,系统的极限状态函数(功能函数)以及输入变量都有可能与时间相关,此时,系统的极限状态函数(功能函数)可以表示为  $g(\mathbf{X}, \mathbf{Y}(t), t)$ ,其中  $\mathbf{X}$  表示与时间无关的输入变量,  $\mathbf{Y}(t)$  表示与时间相关的输入变量,  $t$  表示时间变量。时变失效概

率定义为系统在给定时间段  $[t_0, t_s]$  内失效的概率,它可以表示为

$$P_f(t_0, t_s) = P\{g(\mathbf{x}, \mathbf{y}(t), t) \leq 0, \exists t \in [t_0, t_s]\} \quad (1-2)$$

此时的时变失效域可以表示为  $F = \{\mathbf{x}, \mathbf{y}(t) : g(\mathbf{x}, \mathbf{y}(t), t) \leq 0, \exists t \in [t_0, t_s]\}$ , 时变安全域可以表示为  $S = \{\mathbf{x}, \mathbf{y}(t) : g(\mathbf{x}, \mathbf{y}(t), t) > 0, \forall t \in [t_0, t_s]\}$ 。

(9) **单失效模式与多失效模式**: 失效模式是与系统的极限状态方程相对应的, 当系统只有一个极限状态方程时, 则称系统具有单个失效模式。对于单个失效模式的问题, 单个极限状态函数的统计规律就是系统的统计规律, 单失效模式的失效概率就是系统的失效概率。当系统具有多个极限状态方程时, 则称系统具有多个失效模式。对于多失效模式的问题, 系统的失效与模式的失效具有一定的逻辑关系, 如串联关系、并联关系或混联关系等, 在确定了系统与各模式失效的关系以及各模式极限状态函数的统计规律后, 就可以确定系统的统计规律和系统的失效概率了。单失效模式的可靠性分析问题较为简单, 多失效模式的可靠性分析方法是建立在单失效模式可靠性分析基础上的更为复杂的分析方法。

(10) **失效概率函数**: 由式(1-1)可以看出, 失效概率  $P_f$  的值会随着输入变量分布参数  $\theta_x$  取值的变化而变化。当输入变量分布参数  $\theta_x$  为变量时, 失效概率  $P_f$  将成为输入变量分布参数  $\theta_x$  的函数, 即  $P_f(\theta_x)$ 。 $P_f(\theta_x)$  可以反映出不同分布参数的取值对应的失效概率, 高效计算  $P_f(\theta_x)$  可以为结构的可靠性优化设计奠定基础。

(11) **可靠性局部灵敏度**: 可靠性局部灵敏度定义为输入变量分布参数的变化引起失效概率变化的比率, 它在数学上可以表示为失效概率  $P_f$  对输入变量分布参数  $\theta_{x_i}$  的偏导数, 即  $\partial P_f / \partial \theta_{x_i}$ 。可靠性局部灵敏度表示的是输入变量分布参数在给定点  $\theta_x^*$  对失效概率的影响程度, 它可以为结构可靠性的梯度优化设计方法提供优化的方向。

(12) **基于失效概率的全局灵敏度**: 基于失效概率的全局灵敏度能够衡量输入变量在其整个分布域内变化时对失效概率的平均影响, 其定义为系统的无条件失效概率与某一输入变量固定的条件下系统的条件失效概率之间差异的平均值。基于失效概率的全局灵敏度表示的是当某一输入变量的不确定性消除时所引起系统失效概率的变化, 反映了输入变量的不确定性对系统失效概率的影响。

## 1.2 结构/机构可靠性分析的研究进展

结构/机构可靠性分析中的关键问题是估计结构/机构的失效概率, 这也是可靠性研究人员一直重点关注的问题, 结构/机构可靠性领域的大多数研究均围绕该问题而展开。根据式(1-1)可以看出, 失效概率可以表示为一个高维积分问题, 为了有效地估计失效概率, 研究人员相继提出了许多有效的方法。这些方法主要有近似解析法、数字模拟法以及代理模型法。

近似解析法中最为典型的方法是一次可靠性方法和二次可靠性方法, 其主要思想是在输入变量的均值点或设计点(失效域内联合概率密度最大的点)采用超平面或二次超曲面来近似实际的极限状态函数。一次可靠度方法中的一次二阶矩法和改进一次二阶矩法是最为基本的方法, 它们具有计算效率高的优点, 但对于复杂的非线性可靠性分析问题, 其计算精度不足。矩方法是另一种估计失效概率的近似解析法, 该方法通过数值积分的方法先求得极限状态函数的前若干阶矩, 然后基于这些矩的信息并在合理的假设下估计出失效概率, 常用的矩方法主要有二阶矩法、三阶矩法和四阶矩法, 其中用于估计极限状态函数各阶矩的方法主要有点估计

法、降维积分法、无迹变换法以及稀疏网格积分法等。矩方法在低维输入条件下也具有较高的计算效率,但其具有较多的约束条件(包括输入变量的维度、极限状态函数的非线性程度以及分布等)。

数字模拟法是一种较为通用的估计失效概率的方法,该方法基于大数定律利用样本均值来近似估计母体均值[将式(1-1)求解失效概率积分转化成均值的形式],或者说是用失效的频率来估计失效的概率,只要有足够多的样本,那么所得到的估计值就会收敛于真实的失效概率。最基本的数字模拟法是蒙特卡罗模拟法,该方法首先根据输入变量的联合概率密度函数产生一组输入变量的样本,进而通过失效域内的样本数与总样本数的比值来近似估计失效概率。蒙特卡罗模拟法具有原理简单和适用范围广的特点,但其计算效率一般较低,特别是对于小失效概率的问题。为了提高蒙特卡罗模拟法的计算效率,研究人员又相继提出了一些改进的蒙特卡罗模拟法,如重要抽样法、子集模拟法、线抽样法以及方向抽样法等。这些改进的蒙特卡罗模拟法能在一定程度上提高计算效率,但其也面临着一些限制条件。作为一种比较通用的方法,数字模拟法一直受到研究人员的关注。

代理模型法是另外一种常用的估计失效概率的方法,其基本思想是通过回归或分类的方法构建一个能够近似真实极限状态函数的代理模型,进而在此基础上采用蒙特卡罗模拟法(或其他方法)估计失效概率。相对于真实的复杂物理模型,代理模型的计算代价非常小,因而可以有效提高失效概率的计算效率。常用的估计失效概率的代理模型法主要有响应面法、支持向量机法以及 Kriging 代理模型法等。近年来,基于代理模型的可靠性分析方法以及与数字模拟法有机结合的嵌入式代理模型方法得到了越来越多研究人员的关注。

相对而言,时变失效概率的估计比静态失效概率要更复杂一些,最直接的时变失效概率估计方法是蒙特卡罗模拟法,由于需要产生与时间相关的随机样本,因而其估计过程更为复杂。跨越率法也是一种常用的估计时变失效概率的方法,该方法根据极限状态函数从安全域进入失效域的跨越率来估计时变失效概率。跨越率法具有较高的计算效率,但其计算精度相对较低。另一类用以估计时变失效概率的方法是首先将时变可靠性分析问题转化为静态可靠性分析问题,进而采用静态失效概率方法来估计时变失效概率,这种转换使得已有的静态可靠性分析方法可以用于时变可靠性分析,这类方法主要有极值法和包络函数法等。时变可靠性分析更符合实际中的问题,因而时变失效概率的估计问题也逐渐得到了更多的关注与研究。

可靠性灵敏度分析旨在研究输入变量对失效概率的影响,从而帮助研究人员了解输入变量对失效概率的影响程度,进而有助于结构/机构的可靠性设计与优化。传统的可靠性灵敏度定义为失效概率对输入变量分布参数的偏导数,反映出了输入变量分布参数对失效概率的影响程度,其估计方法与失效概率的估计方法基本一致,如近似解析法(一次二阶矩法、矩方法)、蒙特卡罗模拟法等。基于偏导数的可靠性灵敏度只反映出了输入变量的一些特征量(如均值、方差)对失效概率的影响,为了更全面地衡量输入变量的不确定性对失效概率的影响,研究人员又提出了基于失效概率的全局灵敏度分析方法,该方法通过衡量系统的无条件失效概率与某一输入变量固定的条件下系统的条件失效概率之间差异的平均值来度量输入变量的不确定性对系统失效概率的影响。基于失效概率的全局灵敏度能够更全面地衡量输入变量的不确定性对系统失效概率的平均影响,有助于结构/机构地不确定性优化设计,也逐渐得到了越来越多的关注。

### 1.3 本书主要内容

本书主要介绍结构/机构的可靠性及可靠性灵敏度分析方法,主要内容包含可靠性及可靠性灵敏度分析的矩方法、数字模拟法(蒙特卡罗模拟法、重要抽样法、子集模拟法、线抽样法、方向抽样法)以及代理模型法(响应面法、支持向量机法、Kriging 代理模型法),此外,还将介绍时变可靠性分析的基本方法(蒙特卡罗模拟法、跨越率法、极值法、包络函数法、代理模型法)以及基于失效概率的全局灵敏度分析方法,最后简单地介绍随机不确定性环境下的结构优化设计方法。

本书主要介绍结构/机构的可靠性及可靠性灵敏度分析方法,主要内容包含可靠性及可靠性灵敏度分析的矩方法、数字模拟法(蒙特卡罗模拟法、重要抽样法、子集模拟法、线抽样法、方向抽样法)以及代理模型法(响应面法、支持向量机法、Kriging 代理模型法),此外,还将介绍时变可靠性分析的基本方法(蒙特卡罗模拟法、跨越率法、极值法、包络函数法、代理模型法)以及基于失效概率的全局灵敏度分析方法,最后简单地介绍随机不确定性环境下的结构优化设计方法。

本书主要介绍结构/机构的可靠性及可靠性灵敏度分析方法,主要内容包含可靠性及可靠性灵敏度分析的矩方法、数字模拟法(蒙特卡罗模拟法、重要抽样法、子集模拟法、线抽样法、方向抽样法)以及代理模型法(响应面法、支持向量机法、Kriging 代理模型法),此外,还将介绍时变可靠性分析的基本方法(蒙特卡罗模拟法、跨越率法、极值法、包络函数法、代理模型法)以及基于失效概率的全局灵敏度分析方法,最后简单地介绍随机不确定性环境下的结构优化设计方法。

本书主要介绍结构/机构的可靠性及可靠性灵敏度分析方法,主要内容包含可靠性及可靠性灵敏度分析的矩方法、数字模拟法(蒙特卡罗模拟法、重要抽样法、子集模拟法、线抽样法、方向抽样法)以及代理模型法(响应面法、支持向量机法、Kriging 代理模型法),此外,还将介绍时变可靠性分析的基本方法(蒙特卡罗模拟法、跨越率法、极值法、包络函数法、代理模型法)以及基于失效概率的全局灵敏度分析方法,最后简单地介绍随机不确定性环境下的结构优化设计方法。

本书主要介绍结构/机构的可靠性及可靠性灵敏度分析方法,主要内容包含可靠性及可靠性灵敏度分析的矩方法、数字模拟法(蒙特卡罗模拟法、重要抽样法、子集模拟法、线抽样法、方向抽样法)以及代理模型法(响应面法、支持向量机法、Kriging 代理模型法),此外,还将介绍时变可靠性分析的基本方法(蒙特卡罗模拟法、跨越率法、极值法、包络函数法、代理模型法)以及基于失效概率的全局灵敏度分析方法,最后简单地介绍随机不确定性环境下的结构优化设计方法。

## 第 2 章 可靠性和可靠性灵敏度分析的矩方法

矩方法是当前应用十分广泛的一种可靠性分析方法,其基本思想是利用功能函数的一些特征点处的函数值计算得到功能函数的低阶矩(主要是一阶到四阶矩),然后根据各阶矩信息来近似失效概率。本章将给出矩方法的基本原理和实现过程以及在这些方法的基础上发展的可靠性灵敏度计算方法。由于一次二阶矩法也属于利用功能函数的一阶矩和二阶矩来进行可靠性分析的,因此该方法也归并在矩方法这一章中进行介绍。

### 2.1 一次二阶矩方法(First Order and Second Moment, FOSM)

#### 2.1.1 均值一次二阶矩可靠性分析方法

功能函数  $Y = g(\mathbf{X})$  是输入变量  $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}^T$  的函数,由概率论基本原理可知,当功能函数为输入变量的线性函数且输入变量服从正态分布时,功能函数也服从正态分布,并且功能函数的分布参数可以由输入变量的一阶矩和二阶矩简单推导求得。基于这一原理,均值一次二阶矩方法在输入变量的均值点处将非线性的功能函数用泰勒级数展开成线性表达式,以线性功能函数代替原非线性功能函数,求解线性功能函数的可靠度指标,从而得到原功能函数的近似失效概率<sup>[1-2]</sup>。

##### 1. 线性功能函数

设功能函数  $Y = g(\mathbf{X})$  是服从正态分布的  $n$  维输入随机变量  $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}^T$  的线性函数,即

$$Y = g(\mathbf{X}) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i X_i \quad (2-1)$$

其中  $a_i (i = 0, 1, \dots, n)$  为常数。

功能函数的均值  $\mu_g$  和方差  $\sigma_g^2$  可分别表示为

$$\mu_g = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \mu_{X_i} \quad (2-2)$$

$$\sigma_g^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_{X_i}^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_i a_j \text{Cov}(X_i, X_j) \quad (2-3)$$

其中  $\mu_{X_i}$  为  $X_i$  的均值,  $\text{Cov}(X_i, X_j)$  是  $X_i$  和  $X_j$  的协方差,  $\text{Cov}(X_i, X_j) = \rho_{X_i X_j} \sigma_{X_i} \sigma_{X_j}$ ,  $\rho_{X_i X_j}$  为  $X_i$  和  $X_j$  的线性相关系数。

当输入变量相互独立时,方差  $\sigma_g^2$  简化为

$$\sigma_g^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_{X_i}^2 \quad (2-4)$$

依据正态变量线性组合后仍然服从正态分布,且正态分布随机变量的密度函数由其均值和方差唯一确定的原理,可得到功能函数服从正态分布的结论,即

$$Y \sim N(\mu_g, \sigma_g^2) \quad (2-5)$$

将功能函数的均值  $\mu_g$  和标准差  $\sigma_g$  的比值记为可靠度指标  $\beta$ , 则有

$$\beta = \frac{\mu_g}{\sigma_g} = \frac{a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \mu_{X_i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_{X_i}^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n a_i a_j \text{Cov}(X_i, X_j)}} \quad (2-6)$$

由此便可得到一次二阶矩方法的可靠度  $P_r$  和失效概率  $P_f$  分别为

$$P_r = P\{Y > 0\} = P\left\{\frac{Y - \mu_g}{\sigma_g} > -\frac{\mu_g}{\sigma_g}\right\} = \Phi(\beta) \quad (2-7)$$

$$P_f = P\{Y \leq 0\} = P\left\{\frac{Y - \mu_g}{\sigma_g} \leq -\frac{\mu_g}{\sigma_g}\right\} = \Phi(-\beta) \quad (2-8)$$

式中  $\Phi(\cdot)$  为标准正态变量的累积分布函数。

## 2. 非线性功能函数

当功能函数为输入变量的非线性函数时,均值一次二阶矩方法将功能函数在输入变量的均值点  $\mu_x = (\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \dots, \mu_{X_n})$  处线性展开成泰勒级数,即

$$Y = g(X_1, X_2, \dots, X_n) \approx g(\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \dots, \mu_{X_n}) + \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial g}{\partial X_i} \right|_{\mu_x} (X_i - \mu_{X_i}) \quad (2-9)$$

其中  $\left. \frac{\partial g}{\partial X_i} \right|_{\mu_x}$  表示功能函数的导函数在均值点  $\mu_x$  处的函数值。

由式(2-9)的线性化功能函数,可近似得到功能函数的均值  $\mu_g$  和方差  $\sigma_g^2$  分别为

$$\mu_g = g(\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \dots, \mu_{X_n}) \quad (2-10)$$

$$\sigma_g^2 = \sum_{i=1}^n \left( \left. \frac{\partial g}{\partial X_i} \right|_{\mu_x} \right)^2 \sigma_{X_i}^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \left. \frac{\partial g}{\partial X_i} \right|_{\mu_x} \left. \frac{\partial g}{\partial X_j} \right|_{\mu_x} \text{Cov}(X_i, X_j) \quad (2-11)$$

当各输入变量相互独立时,上式  $\sigma_g^2$  简化为

$$\sigma_g^2 = \sum_{i=1}^n \left( \left. \frac{\partial g}{\partial X_i} \right|_{\mu_x} \right)^2 \sigma_{X_i}^2 \quad (2-12)$$

在非线性功能函数情况下,可靠度指标  $\beta$  和失效概率  $P_f$  分别为

$$\beta = \frac{\mu_g}{\sigma_g} = \frac{g(\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \dots, \mu_{X_n})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \left. \frac{\partial g}{\partial X_i} \right|_{\mu_x} \right)^2 \sigma_{X_i}^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \left. \frac{\partial g}{\partial X_i} \right|_{\mu_x} \left. \frac{\partial g}{\partial X_j} \right|_{\mu_x} \text{Cov}(X_i, X_j)}} \quad (2-13)$$

$$P_f = \Phi(-\beta) \quad (2-14)$$

### 2.1.2 均值一次二阶矩可靠性灵敏度分析方法

可靠性局部灵敏度简称为可靠性灵敏度,其定义为失效概率  $P_f$  对输入变量分布参数(正态分布时分布参数包括均值  $\mu_{X_i}$ 、标准差  $\sigma_{X_i}$  和相关系数  $\rho_{X_i X_j}$ )的偏导数。由失效概率  $P_f$  与可靠度指标  $\beta$  的关系,以及可靠度指标  $\beta$  与输入变量分布参数之间的关系,可利用下列的复合函数求导法则,求得可靠性灵敏度  $\partial P_f / \partial \mu_{X_i}$ 、 $\partial P_f / \partial \sigma_{X_i}$  和  $\partial P_f / \partial \rho_{X_i X_j}$  分别为

$$\frac{\partial P_f}{\partial \mu_{X_i}} = \frac{\partial P_f}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \mu_{X_i}} \quad (2-15)$$

$$\frac{\partial P_f}{\partial \sigma_{X_i}} = \frac{\partial P_f}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \sigma_{X_i}} \quad (2-16)$$

$$\frac{\partial P_f}{\partial \rho_{X_i X_j}} = \frac{\partial P_f}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \rho_{X_i X_j}} \quad (2-17)$$

由于

$$P_f = \Phi(-\beta) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\beta} \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) dt \quad (2-18)$$

则有

$$\frac{\partial P_f}{\partial \beta} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\beta^2\right) \quad (2-19)$$

将相应的可靠度指标与功能函数均值和方差代入式(2-19),可得

$$\frac{\partial P_f}{\partial \beta} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_g}{\sigma_g}\right)^2\right] \quad (2-20)$$

### 1. 输入变量独立情况

当正态输入变量相互独立且功能函数为线性时,由可靠度指标与输入变量分布参数的关系可得

$$\frac{\partial \beta}{\partial \mu_{X_i}} = \frac{a_i}{\sigma_g} \quad (2-21)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial \sigma_{X_i}} = -\frac{a_i^2 \sigma_{X_i} \mu_g}{\sigma_g^3} \quad (2-22)$$

进而最终可以得到可靠性灵敏度  $\partial P_f / \partial \mu_{X_i}$  和  $\partial P_f / \partial \sigma_{X_i}$  的完整结果分别为

$$\frac{\partial P_f}{\partial \mu_{X_i}} = \frac{\partial P_f}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \mu_{X_i}} = -\frac{a_i}{\sqrt{2\pi}\sigma_g} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_g}{\sigma_g}\right)^2\right] \quad (2-23)$$

$$\frac{\partial P_f}{\partial \sigma_{X_i}} = \frac{\partial P_f}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \sigma_{X_i}} = \frac{a_i^2 \sigma_{X_i} \mu_g}{\sqrt{2\pi}\sigma_g^3} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_g}{\sigma_g}\right)^2\right] \quad (2-24)$$

当输入变量相互独立且功能函数为非线性时,则可以得到相应的可靠性灵敏度  $\partial P_f / \partial \mu_{X_i}$  和  $\partial P_f / \partial \sigma_{X_i}$  的完整结果分别为

$$\frac{\partial P_f}{\partial \mu_{X_i}} = \frac{\partial P_f}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \mu_{X_i}} = -\frac{\partial g / \partial X_i |_{\mu_x}}{\sqrt{2\pi}\sigma_g} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_g}{\sigma_g}\right)^2\right] \quad (2-25)$$

$$\frac{\partial P_f}{\partial \sigma_{X_i}} = \frac{\partial P_f}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \sigma_{X_i}} = \frac{(\partial g / \partial X_i |_{\mu_x})^2 \sigma_{X_i} \mu_g}{\sqrt{2\pi}\sigma_g^3} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_g}{\sigma_g}\right)^2\right] \quad (2-26)$$

### 2. 输入变量相关情况

当输入变量相关且功能函数为线性时,可靠性灵敏度  $\partial P_f / \partial \mu_{X_i}$ 、 $\partial P_f / \partial \sigma_{X_i}$  和  $\partial P_f / \partial \rho_{X_i X_j}$  的最终解分别为

$$\frac{\partial P_f}{\partial \mu_{X_i}} = \frac{\partial P_f}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \mu_{X_i}} = -\frac{a_i}{\sqrt{2\pi}\sigma_g} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_g}{\sigma_g}\right)^2\right] \quad (2-27)$$

$$\frac{\partial P_f}{\partial \sigma_{X_i}} = \frac{\partial P_f}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \sigma_{X_i}} = \frac{\mu_g}{\sqrt{2\pi}\sigma_g^3} \left( a_i^2 \sigma_{X_i} + \sum_{j=1, j \neq i}^n a_i a_j \rho_{X_i X_j} \sigma_{X_j} \right) \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_g}{\sigma_g}\right)^2\right] \quad (2-28)$$

$$\frac{\partial P_f}{\partial \rho_{X_i X_j}} = \frac{\partial P_f}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \rho_{X_i X_j}} = \frac{a_i a_j \sigma_{X_i} \sigma_{X_j} \mu_g}{2\sqrt{2\pi}\sigma_g^3} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_g}{\sigma_g}\right)^2\right] \quad (2-29)$$

当输入变量相关且功能函数为非线性时,可靠性灵敏度  $\partial P_f/\partial \mu_{X_i}$ 、 $\partial P_f/\partial \sigma_{X_i}$  和  $\partial P_f/\partial \rho_{X_i X_j}$  的最终解分别为

$$\frac{\partial P_f}{\partial \mu_{X_i}} = -\frac{\partial g/\partial X_i|_{\mu_x}}{\sqrt{2\pi}\sigma_g} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_g}{\sigma_g}\right)^2\right] \quad (2-30)$$

$$\frac{\partial P_f}{\partial \sigma_{X_i}} = \frac{\mu_g}{\sqrt{2\pi}\sigma_g^3} \left[ \left(\frac{\partial g}{\partial X_i}\right)^2_{\mu_x} \sigma_{X_i} + \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{\partial g}{\partial X_i} \Big|_{\mu_x} \frac{\partial g}{\partial X_j} \Big|_{\mu_x} \rho_{X_i X_j} \sigma_{X_j} \right] \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_g}{\sigma_g}\right)^2\right] \quad (2-31)$$

$$\frac{\partial P_f}{\partial \rho_{X_i X_j}} = \frac{\partial g/\partial X_i|_{\mu_x} \partial g/\partial X_j|_{\mu_x} \sigma_{X_i} \sigma_{X_j} \mu_g}{2\sqrt{2\pi}\sigma_g^3} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_g}{\sigma_g}\right)^2\right] \quad (2-32)$$

均值一次二阶矩方法对于线性功能函数且输入变量为正态的问题可以得到失效概率的精确解。当输入变量的分布形式未知,但其均值(一阶矩)和标准差(二阶矩)已知时,由均值一次二阶矩方法可以求得失效概率的近似解。尽管均值一次二阶矩方法的适用范围非常有限,而且它还要求解功能函数的导函数,但由于其容易实现,且仅需要知道输入变量的一阶矩和二阶矩,因此在工程中有一定的应用价值。必须指出的是,该方法具有致命的弱点,那就是它对于物理意义相同而数学表达式不同的非线性问题有可能得到完全不同的失效概率,这就要求在选择功能函数时,应尽量选择线性化程度较好的形式,以便采用均值一次二阶矩法能够得到精度较高的解。此外,基于均值一次二阶矩法的可靠性灵敏度分析对于正态输入变量且功能函数为线性的情况,可以得到可靠性灵敏度的精确解;对于正态输入变量且非线性程度不大的功能函数,该方法得到的可靠性灵敏度近似解也是可以接受的;但对于高度非线性功能函数,该方法得到的可靠性灵敏度解将可能是完全错误的。

### 2.1.3 算例分析

**算例 2.1** 机翼的九盒段结构由 64 个杆元件和 42 个板元件构成,材料为铝合金。已知外载荷与各个单元的强度均为正态随机变量,且相互独立。外载荷  $P$  的均值和变异系数分别为  $\mu_p = 150\text{kg}$  和  $V_p = 0.25$  (变异系数定义为标准差与均值之比),第  $i$  个单元强度  $R_i$  的均值和变异系数分别为  $\mu_{R_i} = 83.5\text{kg}$  和  $V_{R_i} = 0.12$  ( $i = 68, 77, 78$ )。由失效模式的枚举方法可求得结构主要失效模式的极限状态函数为  $g(R_{68}, R_{77}, R_{78}, P) = 4.0R_{68} - 3.9998R_{77} + 4.0R_{78} - P$ 。

采用均值一次二阶矩法(FOSM)进行可靠性分析的过程如下:

由于各变量相互独立,此线性功能函数的均值  $\mu_g$  和方差  $\sigma_g^2$  分别为

$$\mu_g = 4.0 \times 83.5 - 3.9998 \times 83.5 + 4.0 \times 83.5 - 150 = 184.0167$$

$$\sigma_g^2 = 4.0^2 \times 10.02^2 + 3.9998^2 \times 10.02^2 + 4.0^2 \times 10.02^2 + 37.50^2 = 6.2253 \times 10^3$$

可靠性指标为

$$\beta = \frac{\mu_g}{\sigma_g} = \frac{184.0167}{\sqrt{6.2253 \times 10^3}} = 2.3323$$

则失效概率为

$$P_f = \Phi(-\beta) = 0.009842$$

根据式(2-25)和式(2-26),可得到可靠性灵敏度分析结果,见表 2-1。