文都教育®

2020
考研数学

接力题典1800

通关 高分 夺冠常备

策划◎文都考研数学命题研究组
编著◎汤家凤

数学二

【解答册】

基础篇：第一轮复习使用，掌握基础更牢

提高篇：强化复习使用，解题能力提升快

超值服务：全书免费网络答疑

中国原子能出版社

文都教育®

2020
考研数学

接力题典1800

通关 高分 夺冠常备

策划◎文都考研数学命题研究组
编著◎汤家凤

数学二

解答册

基础篇: 第一轮复习使用，掌握基础更牢

提高篇: 强化复习使用，解题能力提升快

超值服务: 全书免费网络答疑

中国原子能出版社

图书在版编目(CIP)数据

考研数学接力题典1800. 数学二 / 汤家凤编著. —
北京：中国原子能出版社，2019.1(2019.4重印)
ISBN 978-7-5022-7110-7

Ⅰ. ①考… Ⅱ. ①汤… Ⅲ. ①高等数学-研究生-入
学考试-题解 Ⅳ. ①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2019)第024850号

考研数学接力题典1800. 数学二

出版发行	中国原子能出版社(北京市海淀区阜成路43号　100048)
责任编辑	王　青
特约编辑	何妍妍
印　　刷	大厂回族自治县彩虹印刷有限公司
经　　销	全国新华书店
开　　本	787mm×1092mm　1/16
印　　张	31　　**字　数**　774千字
版　　次	2019年1月第1版　2019年4月第5次印刷
书　　号	ISBN 978-7-5022-7110-7　　**定　价**　72.00元

网址：http://www.aep.com.cn　　**E-mail：atomep123@126.com**
发行电话：010-68452845

郑重声明

买正版图书　听精品课程

文都考研数学独家师资汤家凤老师编著的《考研数学接力题典1800.数学一》《考研数学接力题典1800.数学二》《考研数学接力题典1800.数学三》等系列图书因其独特的编写切入点以及对学科命题特点的独到把握而深受广大考生欢迎。

但当前某些机构和个人非法盗印汤家凤老师的图书,这类图书印制质量差,错误百出,不仅使考生蒙受金钱与精力的损失,而且误导考生,甚至毁掉考生的前程。

为了保障考生、作者及出版社等多方的利益,文都教育特发如下郑重声明:

1. 对制作、销售盗版图书的网店、个人,一经发现,文都教育将严厉追究其法律责任;

2. 凡文都图书代理商、合作单位参与制作、销售盗版图书的,立即取消其代理、合作资格,并依法追究其法律和相关经济责任;

3. 对为打击盗版图书提供重要线索、证据者,文都图书事业部将给予奖励;若举报者为参加考研的考生,文都图书事业部将免费提供考研图书资料和考前预测试卷。

全国各地举报电话:010-88820419,13488713672

电子邮箱:tousu@ wendu. com

为方便考生使用考研数学系列正版图书,特提供网上增值服务,考生登录文都教育在线(www. wendu. com)可听取汤家凤老师的精品课程。

中国原子能出版社

世纪文都教育科技集团股份有限公司

授权律师:北京市安诺律师事务所

刘　岩

2019 年 2 月

目录(解答册)

上篇　基础篇

中篇　提高篇

下篇　精选试题

[上篇]

基础篇

高等数学部分

一、函数、极限、连续

Ⅰ 入门练习

◇ 填空题

1.【解】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\dfrac{e^{2x}+1}{2}\right)^{\sin 2x}-1}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 2x\ln\frac{e^{2x}+1}{2}}-1}{\dfrac{1}{2}x^2}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x\ln\dfrac{e^{2x}+1}{2}}{x^2}$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{2x\ln\left(1+\dfrac{e^{2x}-1}{2}\right)}{x^2}=4\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{e^{2x}-1}{2}}{x}=4.$$

2.【解】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\ln(1+x)}}{x\arcsin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\ln(1+x)}\cdot\dfrac{e^{x-\ln(1+x)}-1}{2x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x-\ln(1+x)}-1}{2x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{1}{1+x}}{4x}=\frac{1}{4}.$$

3.【解】$\lim\limits_{x\to 0}(e^{2x}+\sin x)^{\frac{1}{\tan x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left\{[1+(e^{2x}-1+\sin x)]^{\frac{1}{e^{2x}-1+\sin x}}\right\}^{\frac{e^{2x}-1+\sin x}{\tan x}}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1+\sin x}{\tan x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1+\sin x}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^{2x}-1}{x}+\frac{\sin x}{x}\right)}=e^3.$$

4.【解】$\lim\limits_{x\to 0}(2^x+x)^{\frac{1}{\arcsin 2x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left\{[1+(2^x-1+x)]^{\frac{1}{2^x-1+x}}\right\}^{\frac{2^x-1+x}{\arcsin 2x}}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x-1+x}{\arcsin 2x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x-1+x}{2x}}=e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^{x\ln 2}-1}{x}+1\right)}=e^{\frac{1}{2}(\ln 2+1)}=\sqrt{2e}.$$

5.【解】$\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{x}{\ln(1+x)}\right]^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left\{\left[1+\dfrac{x-\ln(1+x)}{\ln(1+x)}\right]^{\frac{\ln(1+x)}{x-\ln(1+x)}}\right\}^{\frac{1}{x}\cdot\frac{x-\ln(1+x)}{\ln(1+x)}}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{x-\ln(1+x)}{\ln(1+x)}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}}=e^{\frac{1}{2}}.$$

6.【解】$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+2\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x+2\sqrt{x}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}}$

$$=3\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{x}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}}=\frac{3}{2}.$$

7.【解】$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+1}{x-1}\cdot\sin\frac{2}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+1}{x(x-1)}\cdot x\sin\frac{2}{x}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+1}{x^2-x}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{1}{x}}=4\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{2}{x}}=4.$$

8.【解】由$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x\cos x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^b}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{1+x\cos x}+\sqrt{1+\sin x}}\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x^b}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^b}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{bx^{b-1}}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{-\sin x}{bx^{b-2}}$$

当$b-2=1$，即$b=3$时，极限存在为$-\frac{1}{6}$，

得$\sqrt{1+x\cos x}-\sqrt{1+\sin x}\sim-\frac{1}{6}x^3$，故$a=-\frac{1}{6}$，$b=3$.

9.【解】$\frac{n}{\sqrt{4n^2+n}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{4n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n^2+n}}\leqslant\frac{n}{\sqrt{4n^2+1}}$，

因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{4n^2+n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{n}}}=\frac{1}{2}$，　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{4n^2+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}}=\frac{1}{2}$，

所以由夹逼定理得$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n^2+n}}\right)=\frac{1}{2}$.

10.【解】$f(0-0)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=1$，　$f(0+0)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$，

因为$f(0-0)\neq f(0+0)$，所以$x=0$为$f(x)$的跳跃间断点.

11.【解】$f(0+0)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{3\arctan x+b\sin2x}{\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{3\arctan x+b\sin2x}{x}$

$$=3\lim_{x\to0^+}\frac{\arctan x}{x}+b\lim_{x\to0^+}\frac{\sin2x}{x}=3+2b,$$

$$f(0-0)=\lim_{x\to0^-}\frac{1-(1-x^2)^{\frac{1}{a}}}{x^2}=\lim_{x\to0^-}\frac{-\frac{1}{a}(-x^2)}{x^2}=\frac{1}{a},$$

因为$f(x)$在$x=0$处连续，所以$f(0-0)=f(0+0)=f(0)=1$，故$a=1$，$b=-1$.

◇ 解答题

12.【解】(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-3x\sin x}{x^2+x\cos\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3-3\frac{1}{x}\sin x}{1+\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}}=3.$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\frac{2\ln(1+x)}{x}}-e^2}{x}=e^2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\frac{2\ln(1+x)}{x}-2}-1}{x}=2e^2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{\ln(1+x)}{x}-1}{x}$

$$=2e^2\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=e^2\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{x}=-e^2.$$

(3) $\lim\limits_{x\to0}(1-2x^2)^{\frac{1}{1-\sqrt{1-x^2}}}=\lim\limits_{x\to0}[(1-2x^2)^{-\frac{1}{2x^2}}]^{\frac{-2x^2}{1-\sqrt{1-x^2}}}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-2x^2}{1-\sqrt{1-x^2}}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-2x^2}{-\frac{1}{2}(-x^2)}}=e^{-4}.$$

13.【解】(1) $4\leqslant(2^n+3^n+4^n)^{\frac{1}{n}}\leqslant3^{\frac{1}{n}}\cdot4$,

因为$\lim\limits_{n\to\infty}3^{\frac{1}{n}}\cdot4=4$,所以由夹逼定理得$\lim\limits_{n\to\infty}(2^n+3^n+4^n)^{\frac{1}{n}}=4$.

(2) $\dfrac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+n}\leqslant\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\leqslant\dfrac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1}$,

因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1}=\dfrac{1}{2}$,

所以由夹逼定理得$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)=\dfrac{1}{2}$.

14.【解】由$(1+x\sin2x)^a-1\sim ax\sin2x\sim2ax^2$,$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$得

$2a=\dfrac{1}{2}$,故$a=\dfrac{1}{4}$,

15.【证明】由$a_{n+1}=\dfrac{2(1+a_n)}{2+a_n}=1+\dfrac{a_n}{2+a_n}$得$a_n\geqslant1(n=1,2,3,\cdots)$;

又由$a_{n+1}=\dfrac{2(1+a_n)}{2+a_n}=2-\dfrac{2}{2+a_n}$得$a_n\leqslant2(n=1,2,\cdots)$,故数列$\{a_n\}$有界;

又由$a_{n+1}-a_n=2(\dfrac{1}{2+a_{n-1}}-\dfrac{1}{2+a_n})=\dfrac{2(a_n-a_{n-1})}{(2+a_{n-1})(2+a_n)}$得$a_{n+1}-a_n$与$a_n-a_{n-1}$同号,

即数列$\{a_n\}$单调,故$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在.

令$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$,$a_{n+1}=\dfrac{2(1+a_n)}{2+a_n}$两边取极限得$A=\dfrac{2(1+A)}{2+A}$,解得$A=\sqrt{2}$.

16.【解】$x=0,x=1,x=\pi$为$f(x)$的间断点.

$f(0-0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{|\sin x|}{x}\cdot\dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}}{x-\pi}=\dfrac{1}{\pi e}$, $f(0+0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{|\sin x|}{x}\cdot\dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}}{x-\pi}=-\dfrac{1}{\pi e}$,

由$f(0-0)\neq f(0+0)$得$x=0$为跳跃间断点;

$f(\pi-0)=\lim\limits_{x\to\pi^-}\dfrac{|\sin x|}{x-\pi}\cdot\dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}}{x}=-\lim\limits_{x\to\pi^-}\dfrac{\sin(x-\pi)}{x-\pi}\cdot\dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}}{x}=-\dfrac{e^{\frac{1}{\pi-1}}}{\pi}$,

$$f(\pi+0)=\lim_{x\to\pi^+}\frac{|\sin x|}{x-\pi}\cdot\frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{x}=\lim_{x\to\pi^+}\frac{\sin(x-\pi)}{x-\pi}\cdot\frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{x}=\frac{e^{\frac{1}{\pi-1}}}{\pi},$$

由 $f(\pi-0)\neq f(\pi+0)$ 得 $x=\pi$ 为跳跃间断点；

由 $f(1-0)=0,f(1+0)=-\infty$ 得 $x=1$ 为第二类间断点.

17.【解】 当 $x<1$ 时，$f(x)=1$；

当 $x=1$ 时，$f(1)=\frac{2}{3}$；

当 $x>1$ 时，$f(x)=\frac{x^2}{2}$，

即 $f(x)=\begin{cases}1,x<1,\\ \frac{2}{3},x=1,\\ \frac{x^2}{2},x>1.\end{cases}$

因为 $f(1-0)=1,f(1+0)=\frac{1}{2},f(1-0)\neq f(1+0)$，所以 $x=1$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点.

Ⅱ 基础练习

◇ 填空题

1.【解】 $\varphi(x)=\arcsin(1-x^2)$，定义域为 $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

2.【解】 由 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{(b-\cos x)\sqrt{a+x^2}}=1$，得 $b=1$，

则 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{(b-\cos x)\sqrt{a+x^2}}=\frac{2}{\sqrt{a}}=1$，故 $a=4$.

3.【解】 $\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}=\frac{1+x\arcsin x-\cos x}{\sqrt{1+x\arcsin x}+\sqrt{\cos x}}\sim\frac{3}{4}x^2$，则 $a=\frac{3}{4}$.

4.【解】方法一 由 $xe^x=x[1+x+o(x)]=x+x^2+o(x^2),\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$，

得 $xe^x-\ln(1+x)\sim\frac{3}{2}x^2$，故 $\lim\limits_{x\to0}\frac{xe^x-\ln(1+x)}{x^2}=\frac{3}{2}$.

方法二

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{xe^x-\ln(1+x)}{x^2}&=\lim_{x\to0}\frac{xe^x-x}{x^2}+\lim_{x\to0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}\\&=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}+\lim_{x\to0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}\\&=1+\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}=\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

5.【解】 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1+x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x^2\ln(1+2x)}}=\lim\limits_{x\to0}\left[\left(1+\frac{x-\sin x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1+\sin x}{x-\sin x}}\right]^{\frac{1}{1+\sin x}\cdot\frac{x-\sin x}{x^2\ln(1+2x)}}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{1+\sin x}\cdot\frac{x-\sin x}{x^2\ln(1+2x)}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^2\ln(1+2x)}}=e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}}=e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}}=e^{\frac{1}{12}}.$$

6.【解】 $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\sin2x}=\lim\limits_{x\to0^+}e^{\sin2x\ln x}$，

由 $\lim\limits_{x\to0^+}\sin2x\ln x=2\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin2x}{2x}\cdot x\ln x=2\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x$

$$=2\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=2\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-2\lim_{x\to0^+}x=0,$$

得 $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\sin2x}=e^0=1$.

7.【解】 $\lim\limits_{x\to2}(2-x)\tan\frac{\pi}{4}x\xlongequal{2-x=t}\lim\limits_{t\to0}t\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}t\right)=\lim\limits_{t\to0}t\cot\frac{\pi}{4}t=\lim\limits_{t\to0}\frac{t}{\tan\frac{\pi}{4}t}=\frac{4}{\pi}$.

8.【解】 $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sin^2\pi x}{(x-1)\ln x}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\sin^2\pi x}{(x-1)\ln[1+(x-1)]}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\sin^2\pi x}{(x-1)^2}$

$$\xlongequal{x-1=t}\lim_{t\to0}\frac{\sin^2(\pi+\pi t)}{t^2}=\lim_{t\to0}\frac{\sin^2\pi t}{t^2}=\lim_{t\to0}\frac{(\pi t)^2}{t^2}=\pi^2.$$

9.【解】 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2-x^3\sin\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}x^3\left(\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x}\right)\xlongequal{\frac{1}{x}=t}\lim\limits_{t\to0}\frac{t-\sin t}{t^3}=\lim\limits_{t\to0}\frac{1-\cos t}{3t^2}=\frac{1}{6}$.

10.【解】 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\left[1+\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)\right]^{\frac{1}{\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1}}\right\}^{x\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)},$$

而 $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)\xlongequal{\frac{1}{x}=t}\lim\limits_{t\to0}\frac{\sin t+\cos t-1}{t}=1$，

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x=e$.

11.【解】 $\lim\limits_{x\to0}(1+x-\sin x)^{\frac{1}{x^2\ln(1+x)}}=\lim\limits_{x\to0}\left[(1+x-\sin x)^{\frac{1}{x-\sin x}}\right]^{\frac{x-\sin x}{x^2\ln(1+x)}}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^2\ln(1+x)}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}}=e^{\frac{1}{6}}.$$

12.【解】 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}\cos t\,dt}{\ln(1+x^2)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}\cos t\,dt}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2x\cos x^2}{2x}=1$.

13.【解】 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]^n$

$$=\lim_{n\to\infty}\ln\left\{\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]^{n(1-2a)}\right\}^{\frac{1}{1-2a}}=\frac{1}{1-2a}.$$

14.【解】 $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+4x+1}+x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(1-\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)=-\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}-1}{\frac{1}{x}}$

$$=-\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{1+4t+t^2}-1}{t}=-\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{2}(4t+t^2)}{t}=-2.$$

15.【解】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(e^{2x}+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left[e^{2x}\left(1+\frac{x}{e^{2x}}\right)\right]}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x+\ln\left(1+\frac{x}{e^{2x}}\right)}{x}$

$$=2+\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{x}{e^{2x}}\right)}{x}=2+\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{e^{2x}}}{x}=2+\lim_{x\to 0}\frac{1}{e^{2x}}=3.$$

16.【解】 当 $x\to 0$ 时，

因为$\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1=e^{x\ln\frac{2+\cos x}{3}}-1\sim x\ln\left(1+\dfrac{\cos x-1}{3}\right)\sim\dfrac{x(\cos x-1)}{3}\sim-\dfrac{1}{6}x^3$，

所以$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^3}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]=-\dfrac{1}{6}$.

17.【解】 由 $\sin\sqrt{4n^2+1}\,\pi=\sin(\sqrt{4n^2+1}-2n)\pi=\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{4n^2+1}+2n}$，得

$$\lim_{n\to\infty}n\sin\sqrt{4n^2+1}\,\pi=\lim_{n\to\infty}n\sin\frac{\pi}{\sqrt{4n^2+1}+2n}=\lim_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{\sqrt{4n^2+1}+2n}\Big/\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\pi}{\sqrt{4n^2+1}+2n}=\frac{\pi}{4}.$$

18.【解】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\sin t\,dt-\ln\sqrt{1+x^2}}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\frac{x}{1+x^2}}{4x^3}=\dfrac{1}{4}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x^2)\sin x-x}{x^3(1+x^2)}$，

因为 $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)$，所以当 $x\to 0$ 时$(1+x^2)\sin x-x\sim\dfrac{5}{6}x^3$，故原式$=\dfrac{5}{24}$.

19.【解】 $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-4x+1}+x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-4x+1}{\sqrt{x^2-4x+1}-x}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-4+\frac{1}{x}}{-\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}-1}=2.$$

20.【解】 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x}=\frac{1}{2}.$$

21.【解】 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{\cos^2 x}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\sin^2 x\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x\cos^2 x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin x\cos x}{x}\cdot\frac{x-\sin x\cos x}{x^3}$$

$$=2\lim_{x\to0}\frac{x-\frac{1}{2}\sin 2x}{x^3}=2\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{3x^2}=\frac{4}{3}.$$

22.【解】 $\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{x}{e^{x^2}-1}\right]=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1-x\ln(1+x)}{(e^{x^2}-1)\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1-x\ln(1+x)}{x^3}$,

由 $e^{x^2}=1+x^2+\frac{x^4}{2!}+o(x^4)$ 及 $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$,得

$$e^{x^2}-1=x^2+\frac{x^4}{2}+o(x^4),\quad x\ln(1+x)=x^2-\frac{x^3}{2}+o(x^3),$$

从而 $e^{x^2}-1-x\ln(1+x)=\frac{x^3}{2}+o(x^3)$,

所以 $\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{x}{e^{x^2}-1}\right]=\frac{1}{2}$.

23.【解】 由 $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$ 得

当 $x\to0$ 时,$x^2-x\ln(1+x)=\frac{x^3}{2}+o(x^3)\sim\frac{x^3}{2}$,

则 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^2-x\ln(1+x)}=2\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$

$$=2\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\frac{1}{\cos x}-1}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

24.【解】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2+i^2}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}.$$

25.【解】 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)f\left(\frac{2}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n-1}{n}\right)f(1)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\ln f\left(\frac{1}{n}\right)+\ln f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+\ln f\left(\frac{n}{n}\right)\right]}=e^{\int_0^1\ln f(x)dx}$.

26.【解】 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5\Rightarrow a=1$,

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{e^x-1}(\cos x-b)=5\Rightarrow b=-4.$$

27.【解】 $\sqrt{4+x^2}-\sqrt{4-x^2}=2\left[\sqrt{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}-\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}\right]$

$$=2\left\{\left[\sqrt{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}-1\right]-\left[\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}-1\right]\right\},$$

而当 $x\to0$ 时,$\sqrt{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}-1\sim\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{x^2}{8}$, $\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}-1\sim-\frac{x^2}{8}$,

所以当 $x \to 0$ 时，$\sqrt{4+x^2}-\sqrt{4-x^2} \sim \dfrac{x^2}{2}$，又 $k\sin^2 x \sim kx^2$，所以 $k=\dfrac{1}{2}$.

28.【解】 由 $e^{x^2}=1+x^2+o(x^2)$，　$\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+o(x^2)$ 得

$$e^{x^2}-\cos x=\frac{3}{2}x^2+o(x^2)\sim\frac{3}{2}x^2,$$

又 $\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t \xlongequal{x-t=u} \int_x^0 f(u)(-\mathrm{d}u)=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$，

于是 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}{e^{x^2}-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{\frac{3}{2}x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{3x}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\dfrac{1}{3}f'(0)=\dfrac{2}{3}$.

29.【解】 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x^2+e^{ax^2}-1}{\ln(1+2x^2)}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\arcsin 2x^2}{2x^2}+\dfrac{e^{ax^2}-1}{2x^2}\right)=1+\dfrac{a}{2}$，$f(0)=a$，

因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，所以 $1+\dfrac{a}{2}=a$，故 $a=2$.

30.【解】 因为 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left\{[1+(\cos x-1)]^{\frac{1}{\cos x-1}}\right\}^{2\frac{\cos x-1}{x\arctan x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}2\frac{\cos x-1}{x\arctan x}}=e^{-1}$，

所以 $a=e^{-1}$.

31.【解】 $\lim\limits_{x\to 0}F(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+a\sin x}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x}+a\,\frac{\sin x}{x}\right]=f'(0)+a=a+b,$$

因为 $F(x)$ 在 $x=0$ 处连续，所以 $A=a+b$.

32.【解】 $\dfrac{2}{3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x+xf(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\tan 2x-2x}{x^3}+\dfrac{2x+xf(x)}{x^3}\right]$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x-2x}{x^3}+\lim_{x\to 0}\frac{2+f(x)}{x^2},$$

由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x-2x}{x^3}=8\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x-2x}{(2x)^3}\xlongequal{2x=t}8\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\tan t-t}{t^3}$

$$=8\lim_{t\to 0}\frac{\sec^2 t-1}{3t^2}=\frac{8}{3}\lim_{t\to 0}\frac{\tan^2 t}{t^2}=\frac{8}{3},\text{得}$$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2+f(x)}{x^2}=\dfrac{2}{3}-\dfrac{8}{3}=-2$.

33.【解】 由 $\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t\xlongequal{x-t=u}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$，

当 $x\to 0$ 时，$x-\arctan x=x-\left[x-\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)\right]\sim\dfrac{x^3}{3}$ 得

$\lim\limits_{x\to 0}g(x)=3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}=3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{2x}=\dfrac{3}{2}f'(0)=3$，

因为 $g(x)$ 在 $x=0$ 处连续，所以 $a=3$.

◇ 选择题

34.【解】$f[f(x)]=\begin{cases}1, & |f(x)|\leqslant 1,\\ 0, & |f(x)|>1,\end{cases}$因为 $|f(x)|\leqslant 1$,所以 $f[f(x)]=1$,

于是 $f\{f[f(x)]\}=1$,选(B).

35.【解】显然函数为偶函数,选(D).

36.【解】当 $x\to 0$ 时,$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$,$\sqrt{1-x^2}-1\sim-\frac{x^2}{2}$,因为$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sec^2 x}{3x^2}=-\frac{1}{3}$,

所以 $x-\tan x$ 是比其他三个无穷小阶数更高的无穷小,选(D).

37.【解】当 $x\to 0^+$ 时,$\ln(1+x^2)-x^2\sim-\frac{1}{2}x^4$,

$\sqrt{1+x^2}+\cos x-2=1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+o(x^4)+1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^4)-2\sim-\frac{1}{12}x^4$,

由$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\ln(1+t^2)\mathrm{d}t}{x^6}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\ln(1+x^4)}{6x^5}=\frac{1}{3}$,得当 $x\to 0$ 时,$\int_0^{x^2}\ln(1+t^2)\mathrm{d}t\sim\frac{1}{3}x^6$,

$\mathrm{e}^{x^2}-1-x^2=1+x^2+\frac{x^4}{2}+o(x^4)-1-x^2\sim\frac{x^4}{2}$,则$\int_0^{x^2}\ln(1+t^2)\mathrm{d}t$ 为最高阶无穷小,

选(C).

38.【解】当 $x\to 0$ 时,$\mathrm{e}^{x^n}-1\sim x^n$,因为 $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$,所以$(x-\sin x)\ln(1+x)\sim\frac{x^4}{6}$,

$$\text{又因为}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}\int_0^x(1-\cos^2 t)\mathrm{d}t}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x(1-\cos^2 t)\mathrm{d}t}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+\cos x)(1-\cos x)}{3x^2}=\frac{1}{3},$$

所以当 $x\to 0$ 时,$\frac{1}{x}\int_0^x(1-\cos^2 t)\mathrm{d}t\sim\frac{x^2}{3}$,于是 $n=3$,选(C).

39.【解】因为$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x+3^x-2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2^x-1}{x}+\frac{3^x-1}{x}\right)=\ln 2+\ln 3=\ln 6$,

所以 $f(x)$ 是 x 的同阶而非等价的无穷小,选(B).

40.【解】由$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x\frac{\sin^2 t}{t}\mathrm{d}t}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin^2 x}{x}}{2x}=\frac{1}{2}$ 得当 $x\to 0$ 时,$f(x)\sim\frac{1}{2}x^2$,

又 $g(x)=\int_0^x\sin^2(x-t)\mathrm{d}t\xlongequal{x-t=u}\int_x^0\sin^2 u(-\mathrm{d}u)=\int_0^x\sin^2 u\mathrm{d}u$,

由$\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{3x^2}=\frac{1}{3}$ 得当 $x\to 0$ 时,$g(x)\sim\frac{1}{3}x^3$,

故 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的高阶无穷小,应选(A).

41.【解】当 $x\to 0$ 时,$g(x)\sim\frac{x^5}{5}$,