模糊数学和它的应用

杨和雄　李崇文　编著

MOHUSHUXUEHETADEYINGYONG

MOHUSHUXUE
HETADEYINGYONG

天津科学技术出版社

模糊数学和它的应用

杨和雄 李崇文 编著

天津科学技术出版社

津新登字（90）003号

责任编辑：宋淑萍

模糊数学和它的应用

杨和雄　李崇文　编著

*

天津科学技术出版社出版、发行

天津市张自忠路189号　邮编：300020

河北省雄县胶印厂印刷

*

开本 850×1168 毫米　1/32　印张 12　字数 298 000

1993年10月第1版

1993年10月第1次印刷

印数：1— 3 000

ISBN 7-5308-1547-4/O·70　定价：8.80元

前言

模糊数学顾名思义很容易会被人与经典数学相比，认为是一种模模糊糊的数学。其实恰恰相反，模糊数学是对客观实际中的模糊现象和活动，用精确化的手段加以描述和探讨。

模糊数学主要研究的是现实中带有模糊性的现象和活动。所谓模糊性，它与普遍性不同，普遍性是指一种可用来表达整个明确定义的现象和活动的特性。它也与随机性不同，随机性研究的活动与观察的对象是明确的，但由于条件的不充分，这些活动与现象在出现与否上是不明确的。而模糊性所表达的活动与现象本身就是不明确的。

模糊数学是一门新兴的学科，从它诞生至今不过 20 多年时间，它却在基本理论和现代科技、经济发展的应用方面，取得了十分丰硕的成果，特别是在自动控制、计算机科学、经济科学、社会学方面所获得的成就，更是令人瞩目的。

本书编写的目的是使初学者对模糊数学的各个主要领域有一个概括的了解，对它的实际应用和发展动态有一个基本的认识。

本书的特点是不追求深奥的理论证明，而力求理论与实际相结合、概念与方法相结合。即除了介绍一些必需的理论知识外，尽可能多地介绍一些实际应用及其方法，为今后读者利用模糊数学知识解决实际问题，打下初步的基础。

全书各章都有应用实例，且许多是新近研究成果，如模糊优选分析、模糊集与新三论等。本书也适宜作为教材，每章（除第十一章）都配备有一定数量的习题，便于读者自学以及教师检查学习效果。

本书在编写过程中，引用了国内、外一些作者的论述，特别对一些应用实例还作了删节，但均注明了相应出处。笔者谨在此对他们表示诚挚的谢意。

由于笔者水平所限，书中谬误之处在所难免，望读者不吝指教。

作　者

1993年1月

绪 言

任何新生事物的产生和发展，都要经过一个由弱到强，逐步成长壮大的过程。一种新理论、一种新学科的问世，往往一开始会受到许多人的怀疑甚至否定。模糊数学自 1965 年 L.A.Zadeh 教授开创以来所走过的道路，充分证实了这一点，然而，实践是检验真理的标准，模糊数学在理论和实际应用两方面同时取得的巨大成果，不仅消除了人们的疑虑，而且使模糊数学在科学领域中，占有了自己的一席之地。

经典数学是适应力学、天文、物理、化学这类学科的需要而发展起来的，不可能不带有这些学科固有的局限性。这些学科考察的对象，都是无生命的机械系统，大都是界限分明的清晰事物，允许人们作出非此即彼的判断，进行精确的测量，因而适于用精确方法描述和处理。而那些难以用经典数学实现定量化的学科，特别是有关生命现象、社会现象的学科、，研究的对象大多是没有明确界限的模糊事物，不允许作出非此即彼的断言，不能进行精确的测量。清晰事物的有关参量可以精确测定，能够建立起精确的数学模型。模糊事物无法获得必要的精确数据，不能按精确方法建立数学模型。实践证明，对于不同质的矛盾，只有用不同质的方法才能解决。传统方法用于力学系统高度有效，但用于对人类行为起重要作用的系统，就显得太精确了，以致于很难达到甚至无法达到。

精确方法的逻辑基础是传统的二值逻辑，即要求符合非此即彼的排中律，这对于处理清晰事物是适用的。但用于处理模糊性事物时，就会产生逻辑悖论。如判断企业经济效益的好坏时，用"年利税在 100 万元以上者为经济效益好企业"表达，否则，便是经济效益不好的企业。根据常识，显而易见：比经济效益好的企

业年利税少1元的企业，仍是经济效益好的企业”，而不应被划为经济效益不好的企业。这样，从上面的两个结论出发，反复运用经典的二值逻辑，我们最后就会得到，“年利税为0者仍为经济效益好企业”的悖论。类似的悖论有许多，历史上最著名的有“罗素悖论”。它们都是在用二值逻辑来处理模糊性事物时产生的。

客观实际中存在众多的模糊性事物和现象，促使人们寻求建立一种适于描述模糊事物和现象的逻辑模式。模糊集合理论便是在这种形势下应运而生的。模糊方法的逻辑基础是连续值逻辑，它是建立在[0，1]上的。如若我们把年利税在100万元以上者的属于“经济效益好”的企业的隶属度规定为1，那末，相比之下，年利税少1元的企业，属于“经济效益好”的企业的隶属度就应相应减少一点，比如为0.99999。依此类推，企业的年利税每减少1元，它属于“经济效益好”的企业的隶属度就要相应减少一点。这样下去，当企业的年利税为0时，它属于“经济效益好”的企业的隶属度也就为0了。显然，模糊方法的这种处理方式，是符合于人们的认识过程的，连续值逻辑是二值逻辑的合理推广。

现代科学发展的总趋势是，从以分析为主对确定性现象的研究，进到以综合为主对不确定性现象的研究。各门科学在充分研究了本领域中那些非此即彼的典型现象之后，正在扩大视域，转而研究那些亦此亦彼的非典型现象。自然科学不同学科之间，社会科学不同学科之间，自然科学和社会科学之间，相互渗透的趋势日益加强，原来截然分明的学科界限一个个被打破，边缘科学大量涌现出来。随着科学技术的综合化、整体化，边界不分明的对象，亦即模糊性对象，以多种多样的形式普遍地、经常地出现在科学的前沿。

模糊集合理论自诞生以来，获得了长足的发展，每年全世界发表的研究论文的数量，以指数级速度增长。研究范围从开始时的模糊集合，发展为模糊数、模糊代数、模糊测度、模糊积分、模糊规划、模糊图论、模糊拓扑……等众多的分枝。

和模糊集合理论的发展速度相比，模糊技术的应用虽稍迟一步，但也取得了令人可喜的进展。自 1980 年第一例应用模糊技术的产品问世以来，有关这方面的研究报告已逾 7000 多篇，制造出近千种模糊产品，如计算机、电饭煲、摄像机、微波炉、洗衣机、空调器等。如日本松下公司研制的智能化家用空调器，可根据内置的传感器提供的室内空气温度数据，在室温高或低于 25℃时，会自动地“稍稍”调节空调器的阀门，进行 4608 种不同状态设定选择，从而获得最佳开启状态和尽可能少的消耗。而这种“稍稍”的程度，只有通过有经验的人的感觉来决定。

模糊技术方法不是对精确的摒弃，而是对精确更圆满的刻画。它通过模糊控制规划，利用人类常识和智慧，理解词语的模糊内涵和外延，将各方面专家的思维互相补充。虽然，目前要使模糊技术接近于人的思维，尚难以做到，但正如日本夏普公司电子专家日吉考庄所说：一个普遍应用模糊技术的时代，不久就会到来。

我国自 70 年代开始模糊数学研究以来，成就突出，已形成了 2000 至 3000 人的世界最庞大的研究队伍，并在高速模糊推理研究等领域，居世界领先地位。但同时在其它方面，也存在着一些差距，尤其突出的是实验室里的成果，还有许多未转化成经济效益。需要在政府和工业界的支持和参与下，成立专门的开发实体，制定规划，并积极开展国际交流，为我国 21 世纪的技术发展和科学腾飞奠定基础。

目前，世界上模糊数学理论应用于实际方面，较为先进的国家如日本、荷兰等，也仅限于机器人、家用电器等方面，且仍处于初级阶段。我国研制工作已进入试用阶段的有车床模糊控制、管理模糊信息系统等，但显得面窄、量小，影响不大。模糊自动控制即人工智能将是模糊数学的一个大有作为的领地。

目录

对于偏重实际应用的读者或在教学时数不足的情况下，可略去带"*"号的章节不阅。

第一章　模糊集合的基本知识

世界上的现象真是千奇百怪、五花八门，但就其特性而论，不外乎确定现象、随机现象、模糊现象三种。前面两种现象人们早就注意到，并在经典数学中作了比较详细、深入的研究。而模糊现象直到 1965 年才由美国 L.A.Zadch 教授首先提出，并开始在全世界范围内加以系统的研究。

具有模糊性的现象称做模糊现象，它在客观实际中是大量存在着的。如大型企业、先进生产者、信号强、灵敏度高、可靠性好、这人年轻、消费超前……。这些现象之所以称作模糊现象，其根本原因在于与这些现象所对应的概念，其外延是不确定的。而所谓一个概念的外延，就是指的符合此概念的那些对象的全体。因此，实际上外延就是一个集合。如"某高校的全体师生员工"，指的就是该校的全体人员，多一个或少一个均不行。因此，这的概念的外延可看作是一个普遍集合，并且它是确定的。但"某高校的全体年轻人"，这一概念其外延便不是确定的而是模糊的了。原因在于无法划定一条界限来区分"年轻"或"不年轻"(请读者试着寻找这样的一条合理界限)。

对于具有一般性的确定问题，传统数学、经典集合论、二值逻辑是解决此类问题的有力工具。但对于破坏了"非此即彼"排中律的模糊现象，它们就显得力不从心了。为此，人们从多方面寻求更新、更科学的方法。如在计算机科学领域，目前已从二值逻辑发展为多值逻辑、连续值逻辑。模仿人脑细胞功能的神经网络系统的研究、各种形式智能计算机的开发，均有如雨后春笋般地蓬勃兴起。国外有人曾预言：谁掌握了模糊信息的计算机处理，谁就占领了人工智能领域的制高点。

不仅如此，在自然科学的其它领域里，在社会科学中，甚至

在人们的日常生活里，模糊现象也是到处可见、随处可闻的。因此，研究它的性质、掌握它的规律，使它为人类服务，便成为摆在人们面前的迫切任务。模糊数学便是在这种形势下产生，并且得到迅猛发展的。

模糊数学的理论基础是模糊集合论。本章将介绍模糊集合的基本知识，内容包括模糊集的定义和运算；模糊集的截集和凸集；以及模糊集理论的一些基本定理。

§1-1 普通集与模糊集

我们知道经典集合论是现代数学的基础，它是描述和表现各门学科的形式语言和系统。用集合可以表示概念，一个概念总有其内涵和外延，内涵指的是符合此概念的那些对象的共同属性，而外延则是具有此内涵的那些对象的全体。

为了便于理解模糊集，我们先来回顾一下普通集合。普通集合是一些具有某种性质的、确定的事物全体，常用A、B、C、U、V、W等大写字母表示。集合中的元素常用小写字母a、b、c、u、v、w表示。集合按元素的多少可分为空集、单元素集、有限集、无限集。

一、任意两集合 A、B 间的关系

1. 若任意$x\in A \Rightarrow x\in B$，则 $B\supseteq A$ 或 $A\subseteq B$；

2.若$A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则 $A=B$。

3.若$A\subseteq B$ 但 $A\neq B$，则 $B\supset A$ 或 $A\subset B$。

二、和集合运算有关的重要概念

1. 论域　作为研究对象被讨论的全体元素的集体，称作一个论域。

2. 幂集　设U是一个论域，由U的所有子集作元素而构成的集合，称作U的幂集，记作$P(U)$。

三、集合的运算和规律

1. 任意两集合A、B间可作下列运算:

(1) $A\bigcup B=\{u|u\in A$ 或 $u\in B\}$;

(2) $A\bigcap B=\{u|u\in A$ 且 $u\in B\}$;

(3) $A-B=\{u|u\in A$ 且 $U\bar{\in}B\}$;

(4) $A^C=\{u|u\in U$ 且 $u\bar{\in}A\}$.

2. 集合间有以下运算规律:

(1) 幂等律; (2)交换律; (3)结合律;

(4) 分配律; (5)吸收律; (6)0–1律;

(7) 复原律; (8)对偶律; (9)互补律.

这些运算规律的内容，我们将在介绍模糊集合的运算时加以说明。

四、集合间的函数关系

1. 给定集合U和V，若有一对应法则f存在，使得任意$u\in U$，有$f(u)\in V$与之对应，则称此法则f为从U到V的一个映射. 记作f: $U\to V$。并称U为f的定义域，

$f(U)=\{f(u)=v|u\in U\}\subseteq V$ 为 f 的值域。

2. 设$A\in P(U)$，定义映射ψ_A: $U\to\{0,1\}$，其中

$$\psi_A(u)=\begin{cases}1 & u\in A\\ 0 & u\bar{\in}A\end{cases}$$

称为集合A的特征函数。一个普通集合是由其特征函数唯一确定的。

普通集合的特征函数表达了这样一种观念：一个元素和一个集合(即一个研究对象和一个概念之间)的关系，要么是属于，要么就是不属于，非此即彼，别无选择。然而在现实世界中，确有许多这样的实例，如大企业、女强人、信号弱、灵敏度高……. 对于这些众多的模糊现象，如何确切地描述和处理它们，便成为摆在人们面前迫切需要解决的主要课题。

1965 年美国加里佛尼亚大学控制论学家 L.A.Zadeh 在论文

《模糊集合》FuzzySets)中，首先给出了以下定义.

[定义 1.1] 设在论域U上给定映射:

μ_A: $U \to [0, 1]$, 即 $u \to \mu_A(u)$, 则映射 μ_A 确定了 U上 的一个模糊集合$\underset{\sim}{A}$ 称μ_A 为$\underset{\sim}{A}$的隶属函数，$u_A(u)$ 表示 u 关于 A的隶属度，即u 属于 A的程度. 以下简记$\mu_A(u) = \underset{\sim}{A}(u)$.

正象普通集合可由特征函数的ψ_A所确定那样，模糊集合 $\underset{\sim}{A}$ 也可完全由其隶属函数 μ_A 所确定. 特别，当 μ_A 仅仅取值$[0, 1]$的两端点值 $\{0, 1\}$ 时，模糊集合$\underset{\sim}{A}$ 就退化成普通集合 A. 因此，模糊集合是普通集合的推广.

今后，在不致引起混淆的情况下，将把$\underset{\sim}{A}$简记作 A，相应的隶属度$\underset{\sim}{A}(u)$ 简记作 $A(u)$.

我们以下给出模糊集合的例子

[例 1.1] L.A.Zadeh 在年龄论域$U = [0,100]$上，给出了一个模糊集合Y = “年轻”，其隶属函数为:

$$Y(u) = \begin{cases} 1 & 0 \leqslant u \leqslant 25 \\ \left[1 + \left(\dfrac{u-25}{5}\right)^2\right]^{-1} & 25 < u \leqslant 100 \end{cases}$$

[例 1.2] (1)对企业论域$U = \{$ 甲,乙,丙,丁$\}$，现通过一批专家评估，得到U上的一个模糊集合

$$A = \text{“企业经济效益好”} = \frac{0.5}{\text{甲}} + \frac{0.8}{\text{乙}} + \frac{0.3}{\text{丙}} + \frac{0.6}{\text{丁}}$$

$$= 0.5 \quad 0.8 \quad 0.3 \quad 0.6).$$

其图像为:

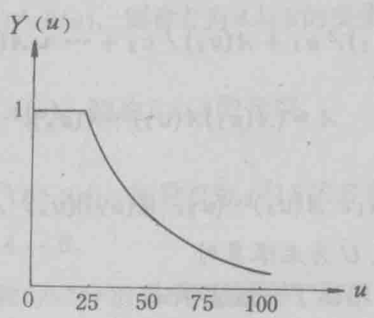

图 1-1

(2)光学中若以波长为论域$U=[400$ 微米，800 微米]，则U上有模糊集:

$$A=\text{“红色”},\quad A(\lambda)=\exp\left[-\left(\frac{\lambda-7000}{600}\right)^2\right]$$

$$B=\text{“绿色”},\quad B(\lambda)=\exp\left[-\left(\frac{\lambda-5400}{300}\right)^2\right]$$

$$C=\text{“蓝色”},\quad C(\lambda)=\exp\left[-\left(\frac{\lambda-4600}{200}\right)^2\right]$$

(3)某商店考察同等数量的几种商品的销售情况．设$U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$为所考察的商品论域，χ_i为商品u_i售完的总天数，取$M=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{x_i\}$、$1\leqslant i\leqslant n$,

$$A(u_i)=\frac{\chi_i}{M}=\mu_i,$$

则模糊集合$A=$“滞销商品”，$A(u)=(u_1,u_2,\cdots,u_n)$为$U$上的模糊集．

模糊集合有以下几种表示方法。

(一)当论域 U 为有限集时

(1)Zadeh 法

$$A = A(u_1)/u_1 + A(u_2)/u_2 + \cdots + A(u_n)/u_n;$$

(2)向量法

$$A = (A(u_1)A(u_2)\cdots A(u_n));$$

(3)序偶法

$$A = \{(u_1, A(u_1)\cdots(u_2, A(u_2))(u_n, A(u_n))\}.$$

(二)当论域 U 为无限集时

L.A.Zadeh 给出了一般表示式:

$$A = \int_U A(u)\mathrm{d}u.$$

对于无限论域上的模糊集合A，其隶属函数$A(u)$常表达为普通函数的形式。

由于在给定的论域U上可以有多个模糊集，所以可记U上模糊集的全体为$F(U)$，称做U上的模糊幂集。它与U上的普通幂集$P(U)$的关系显然有$P(U) \subseteq F(U)$。此外，还有：若任意$u \in U$，有 $A(u) = 0$，则称 A 为空集，即 $A = \Phi$;

若任意$u \in U$，有 $A(u) = 1$，则称 A 为全集，即 $A = U$。

§1–2　模糊集的运算

在普通集合中，我们已定义了并、交、差、余等运算，类似地在模糊集合中也有这些运算，这些运算和规律构成了模糊集合理论进一步深入，并且应用于实际问题的基础。

[定义 1.2]　在模糊幂集$F(U)$中定义了以下关系和运算:

设A、B、$C \in F(U)$，若任意 $u \in U$，有

(1) $A(u) \leqslant B(u)$，则称A含于B，记作$A \subseteq B$或$B \supseteq A$;