2020

线性代数

小白进阶高分指南

考研数学一、二、三通用

主编 ◎ 张松美

专为零基础小白、期末备考、考研复习者编写

在线秒答疑、扫码看视频、彻底吃透线代

零基础超解读
做题上手更易

疑难处秒回复
扫除备考障碍

重视归纳总结
温故举一反三

重视计算能力
小白高分必达

中国财经出版传媒集团
中国财政经济出版社

2020线性代数小白进阶高分指南

主编　张松美

中国财经出版传媒集团
中国财政经济出版社

图书在版编目(CIP)数据

2020 线性代数小白进阶高分指南/张松美主编. —北京:中国财政经济出版社，2019.1

ISBN 978-7-5095-8738-6

Ⅰ. ①2… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①线性代数-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 290320 号

责任编辑:张　军　　　　**责任校对**:杨瑞琦

封面设计:陈宇琰

群名称: 考研数学小白进阶高分

群　号: 785733425

中国财政经济出版社出版

URL:http://www.cfeph.cn

E-mail:cfeph@cfeph.cn

社址:北京市海淀区阜成路甲 28 号　邮政编码:100142

营销中心电话:010-88191537　北京财经书店电话:64033436　84041336

北京富生印刷厂印刷　各地新华书店经销

787×1092 毫米　16 开　14.75 印张　353 000 字

2019 年 3 月第 1 版　2019 年 3 月北京第 1 次印刷

定价:33.00 元

ISBN 978-7-5095-8738-6

(图书出现印装问题,本社负责调换)

本社质量投诉电话:010-88190744

打击盗版举报热线:010-88191661　QQ:2242791300

「二维码」操作流程

大学数学APP特色：逐题精讲，哪道不会扫哪道；疑难秒回复！

01

下载安装“大学数学”APP

02

进入APP界面

03

按要求注册并登陆

04

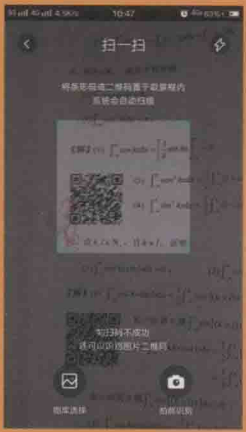
点击“答疑”界面

选择“扫一扫”

05

扫描书中二维码，观看

名师超解读视频



温馨提示

1. 若考生在扫码过程中遇到二维码失效、视频无法正常播放、题与讲解视频不符等一系列问题，请添加QQ群785733425“考研数学小白进阶高分”反馈，我们会及时帮您解决。
2. 本扫码技术仅支持Android、iOS手机系统，其他手机系统暂不支持。
3. APP实时更新升级，会增加些新性能，界面会发生些变化，考生注意实时更新并查看相关通知。
4. 本APP所有操作最终解释权归北京慧升科技有限公司所有。

图文仅供参考，以实际操作界面为准

本书价值1399元“快速提分大礼包”领取方式

1. 点击标签栏“答疑”

2. 点击答疑界面“我的课程”

3. 点击礼包课程

4. 点击底部“限时免费”

5. 点击底部“确定”

6. 点击按钮“观看视频”

注意：若领取过程中遇到问题，请添加官方QQ群

群号785733425

答疑示例

VIP高端学员★专享服务

S 题目

设α_1，α_2，β_1，β_2均是3维列向量，且α_1，α_2线性无关，β_1，β_2线性无关。当$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}$，$\alpha_2=\begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix}$，$\beta_1=\begin{bmatrix}-3\\2\\-5\end{bmatrix}$，$\beta_2=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$时，求非零向量$\gamma$，使得$\gamma$既可以由$\alpha_1$，$\alpha_2$线性表出，也可以由$\beta_1$，$\beta_2$线性表出。

Q 学生问题

无思路

A 慧升答疑

分析： 本题是求齐次方程组的升级版，为什么这么说呢？一般最简单的要求是给你现成的齐次方程组求通解，这个大家都会、都熟悉，但这里给你增加了点难度，没有现成的方程组了，需要你根据题干条件去构建出这么一组齐次方程组，分清哪是方程组的未知量，求解得出结果，这是本题的核心和突破口。

解答过程： $\because$非零向量γ既可以由α_1，α_2线性表出，也可以由β_1，β_2线性表出，所以可设常数

k_1,k_2,l_1,l_2，使$\gamma=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=l_1\beta_1+l_2\beta_2$。

又$\because$ $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}$，$\alpha_2=\begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix}$，$\beta_1=\begin{bmatrix}-3\\2\\-5\end{bmatrix}$，$\beta_2=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$，

$$\therefore \begin{bmatrix}k_1+2k_2\\-k_2\\2k_1+3k_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3l_1\\2l_1+l_2\\-5l_1+l_2\end{bmatrix}，即\begin{cases}k_1+2k_2=-3l_1\\-k_2=2l_1+l_2\\2k_1+3k_2=-5l_1+l_2\end{cases}$$

所以将k_1,k_2,l_1,l_2看做是未知量，通过移项得到要构造的方程组$\begin{cases}k_1+2k_2+3l_1=0\\-k_2-2l_1-l_2=0\\2k_1+3k_2+5l_1-l_2=0\end{cases}$。

接下来的问题就转化成了求解齐次方程组的常规问题了，结果为$\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\l_1\\l_2\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}2\\-1\\0\\1\end{bmatrix}$。

即$k_1=2k,k_2=-k$， 则$\gamma=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=k\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$，$k$为任意实数。

错题本收获： 如何利用题干条件自行构建齐次方程组。

本书编委会

主　编：张松美

编　委：何棒棒　李文鹏　毛丽君　朱庆宇

送给自己以及

比自己还重要的你

TO:

我们一起学习吧

年 月 日

前 言

为帮助各位考生在短期内能看懂并掌握历年真题，快速提高数学的应试成绩，作者在对真题进行深入研究的基础上，将其归纳、分类、整理，结合作者多年来在考研辅导班上的一线经验以及考生备考的特点及其成绩反馈，按照最新《考试大纲》的要求，对考试要求进行了详细解读，编写了这套考研数学小白进阶高分指南系列丛书。

在备考过程中，不少同学想走捷径，期望速成。导致的问题是：一方面自己想要考高分心情急迫，一方面要完成的学习任务太多，自己的能力和时间 hold 不住，无法化解期望和现实的巨大落差，引起自我满意度不断下降，造成浮躁的情绪，形成巨大的心理压力。并且，越是浮躁越是对自己学习不满，越是不满越浮躁，就越想找个捷径，期望功效如太上老君的仙丹，立马变神仙，急切地想结束这件事情。

那该怎么办呢？一是正视自己的现状，调低自己的期望；二是拿时间换成绩，一分耕耘一分收获。从这个角度出发，为化解考生的备考难题，我们编写了此书。

本书特色如下：

1. 零基础超解读，全书上手更易

在难度和要求上，考研数学课程不同于中学数学，前者入门难、技巧少，后者则入门容易、技巧较多。举个形象的例子来说明：学习高等数学就好比开飞机，本身能学会驾驶就已经很不容易了，所以只要能顺顺利利地从 A 飞到 B，再从 B 返回 A 就可以了，可不敢要求你表演空中杂技。而中学数学就像学骑自行车，几乎人人都能很快学会，但是要求做腾、挪、转、移各种杂技表演，各人水平自然参差不齐。因此，本书对于每道题的讲解均从读者已有的知识点出发，通过延伸、变换等引出最基本的概念、最基本的解法，让读者明白考点的来龙去脉，引导初学者快速入门，打牢基础，深刻理解考点的概念内涵和外延，把握重点难点，大幅提升解题实战能力。

2. 疑难处秒回复，扫除备考障碍

本书为读者提供了对应的二维码扫码课程（收费），我们的老师不仅讲解题目如何做，而且还会告诉你为什么老师能想得到，而你却想不到。题目考查的是哪个考点，怎么考查，还有哪些考查的方向，如何应对，视频讲解中都会提醒到位。同时，增加了倍速功能，真正做到

“哪里不会点哪里”，提升效率，节省时间。我们为这套书籍配备了多位专门负责答疑的老师，读者可在视频下方直接提问。12 年以上教龄的老师主要回答综合类的问题，他们经验丰富，能一针见血地指出初学者的症结所在，提供个性化的解决方案。

3. 重视归纳总结，温故举一反三

考试大纲规定的知识点 200 多个，一共 23 道题，3 个小时的做题时间，分析历年真题，可以看出每一道考题均涉及三个及三个以上知识点，综合性较强，且很大程度上是考查考生的条件反射能力，因此本书将知识点进行归纳总结，将零散的知识点归结成块，遇到类似题目能瞬间想到应对方案一、二、三，这样条理清晰，便于掌握，快速拿分。在备考时建议大家：第一遍是甄别，先看题目，做不出来看老师讲解，要是看了视频还是不会，就在视频底下提问，看明白了，合上书本视频，自己独立做一遍，做好错题本，第二天复习新东西之前，重做一遍，看能否做出来，若是做出来的话，就隔三天再做，若是三天后仍能做出就隔一星期再做一遍，若是还能做出来，那就隔两个星期再做一遍，以此类推，把题目弄熟。怎么样才算做熟题目了呢，就是做每道题时都要有个 deadline，小题不能超过 4 分钟，大题不能超过 10 分钟。并将题目按以下类别分类出来：(1)规定时间内顺利做出来的；(2)做出来但超时(标准小题不超过4 分钟，大题不超过 10 分钟)；(3)计算出错；(4)题目技巧没想到；(5)公式、结论记错的；(6)没有思路的；(7)做半截卡壳的。这样把会的全部剔除，不再看，减轻工作量，不会的做错的，重点刻意练习，练熟了再说；第二遍是刻意练习出问题的题目：练习顺序(2)⇨(7)⇨(5)⇨(4)⇨(6)⇨(3)，重点是(2)以及(7)。

4. 重视计算能力，小白高分必达

数学是客观性很强的一门学科，无论是选择题、填空题还是解答题，答案具有唯一性，说一不二，所以提高计算能力是取得高分的关键环节。计算能力的提高离不开大量习题的练习，只有通过做一道道的题目才能发现自己在计算方面存在的问题，比如最常见的上下数字抄错、遗漏负号、计算错误、看错数字、记错公式结论等，因此本书配置了适量的题目，一方面能有效提高考生的计算能力，另一方面也有利于考生学会在题目中运用知识点做题。

本书的写作，参阅了有关书籍，引用了一些例子，恕不一一指明出处，在此向有关作者表示感谢！感谢参编的每位老师，特别感谢朱庆宇老师的无私奉献和大力支持！感谢图书出版的每位工作人员，尤其是张军社长，在本书的出版中给予极大的支持和指导，对每一个细节严格把控，深表感谢。本书是考生考研路上的一块垫脚石，望考生利用好本书。

读者对象：

所有需要巩固基础的考研复习的考生，尤其是在职考研及跨专业考研的考生；

所有基础薄弱、想迅速提升数学解题能力的初学者及爱好者；

所有考研辅导机构用于提高授课能力的教师。

致读者：

本书由北京慧升教育科技有限公司的张松美老师编写。慧升教育是一家专业从事软件开发、教育培训以及软件教育资源整合的高科技公司。本书的主要参编人员有朱庆宇、毛丽君、何棒棒、李文鹏。

感谢您购买本书，希望本书能成为您学习路上的好帮手。"零门槛"学习考研数学，一切皆有可能。祝您学习愉快！

由于编写时间仓促、编者水平有限，本书难免存在错误或不妥之处。如果您在使用本书的过程中发现书中的错误之处，可以反馈到"慧升考研微信公众号"，反馈错误超过 10 个的，我们将免费送您其余两本教材中的任意一本。有关本书错误之处的更改，请留意微信公众平台。

关于本书配套资源，请使用慧升考研 APP 扫描下方二维码观看详细的操作说明。关注张松美老师的新浪微博领取个性化一对一复习计划的订制服务。

张松美老师微博　　慧升考研微信公众号　　使用说明观看二维码

目　录

第 1 章　行列式

【导言】

行列式是研究线性代数的重要工具之一，很适合作为线性代数的入门章节. 我们后面研究矩阵、线性方程组、特征值、特征向量抑或二次型都会用到行列式. 通过行列式的计算，我们可以迅速判断出矩阵是否为可逆矩阵，线性方程组是否有唯一解，以及判断 n 阶矩阵的特征值，特征向量的一些性质. 所以，学好行列式是学好线性代数的基础.

【考试要求】

考试要求	科目	考试内容
了解	数学一	逆序数、行列式的概念，行列式的性质
	数学二	
	数学三	
理解	数学一	行列式的性质
	数学二	
	数学三	
会用、掌握	数学一	利用行列式的性质和行列式按行（列）展开定理计算行列式，余子式、代数余子式及 n 阶行列式的计算
	数学二	
	数学三	

【知识网络图】

- 行列式
  - 行列式的概念
    - 逆序数
    - n 阶行列式
    - 两种定义方式
  - 行列式的性质
  - 行列式的计算
    - 数字型行列式的计算
    - n 阶抽象型行列式的计算

【内容精讲】

关于 n 阶行列式的定义，目前通行教材有两种不同的引入方式：一种是从全排列和逆序数出发，定义行列式运算中的每一项及其符号，然后求出 $n!$ 项代数和的方式，比较有代表性的教材见同济大学第六版《线性代数》；另一种方法是递归定义，即先定义一阶行列式、二阶

行列式、三阶行列式，然后利用递归方法定义一般的 n 阶行列式，这种定义方式常见于欧美引进的教材，如 Lay D. C.《线性代数及其应用》. 这两种定义方式各有优缺点：第一种方法细致、精确，容易得到一些准确的理论结果和一些精巧的行列式的结果，但不太容易掌握，且耗时较多；第二种方法只要知道递推公式的概念就可以一步一步地完成，相对简单，费时少，但在一些精巧刻画上不如第一种定义. 因为同济大学《线性代数》在国内使用最为广泛，我们选择第一种定义方式.

行列式具体的几何背景：不共线或不共面的几何向量，可以被刻画为所生成的平行四边形的面积或平行六面体的体积不为 0.

几何向量不共线或不共面，推广为 n 维空间中的向量线性无关. 能不能将平行四边形面积和平行六面体体积推广为“n 维平行体体积”，用来刻画和判定 n 维向量线性无关.

n 阶行列式就是“n 维平行体体积”. 我们先根据平行四边形面积与平行六面体体积的代数运算性质得出它们的算法，再将代数算法推广到 n 维空间，定义 n 阶行列式.

求方阵的行列式也是矩阵的一种运算，它将一个方阵与一个数相对应，这个数值将告诉我们矩阵是否可逆. 这个数可以给出该方阵的其他信息，因此行列式是与矩阵密切相关的内容，它已经成为研究矩阵性质的一种工具.

在历史上，行列式是日本数学家 S. Takakazu(1642—1708) 在 1683 年提出并使用，而矩阵由 J. J. Sylvester 在 1850 年首次使用，而在逻辑上应是矩阵先于行列式.

虽然行列式是在求解特殊的线性方程组时提出来的，规律性很强，容易记住. 最初引入行列式就是为了此目的，后来独立发展成为一门行列式理论，在其他很多地方会用到. 如多重积分的变量替换、二次曲线或二次曲面的主轴问题以及在计算方阵的特征值时也起着重要的作用，它已经发展成为一门理论.

需要大家注意的是，矩阵是一个数表，用“(　)”表示，而行列式是由方阵得到的一个数，用“|　|”表示，这种表示方法在 1841 年由 Arthur Cayley 引入.

1.1　逆序数

1.1.1　定义

定义 1.1.1.1　设 n 个互不相等的正整数任意一种排列为 $i_1 i_2 \cdots i_n$，规定由小到大为标准次序，当某两个元素的先后次序与标准次序不同时，就说有一个逆序数，该排列全部逆序数的总和用 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$ 表示，例如：

$$\tau(31254) = 2+0+0+1+0 = 3$$

$$\tau(263451) = 1+4+1+1+1 = 8$$

$$\tau(12345) = 0+0+0+0+0 = 0$$

【例 1.1】 求逆序数：(1) $\tau[135\cdots(2n-1)246\cdots 2n]$

(2) 已知 $\tau(x_1 x_2 \cdots x_{n-1} x_n) = k$，求 $\tau(x_n x_{n-1} \cdots x_2 x_1)$

【解】(1) $\tau[135\cdots(2n-1)246\cdots 2n] = (n-1)+(n-2)+\cdots+1+0 = \dfrac{n(n-1)}{2}$

比如2，前面比它大的数为3，5，…，$2n-1$，共有 $n-1$ 个，其余类推.

(2) 在排列 $x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$ 任取两个数 x_k 和 $x_l(k<l)$，则数对 (x_k,x_l) 要么为逆序数，要么为顺序数，而该排列共有 C_n^2 个数对，已知 $x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$ 的顺序数为 C_n^2-k，它正好就是 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 的逆序数，故

$$\tau(x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1)=C_n^2-k=\frac{n(n-1)}{2}-k.$$

1.2　n 阶行列式

行列式的表示——英文名称为 determinant，故常常把 D_n 写成 $\det(a_{ij})$.

行——row，一般用 $r_1\leftrightarrow r_2$ 表示第一行与第二行对换，余类推.

列——column，用 $c_2\leftrightarrow c_7$ 表示第二列与第七列对换，余类推.

1.2.1　n 阶行列式的定义

$$D_n=\sum_{j_1,\cdots,j_n}^{n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}=\sum_{i_1,\cdots,i_n}^{n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}$$

其中 a_{1j_1}（其中 $j_1=1,2,\cdots,n$）代表第1行的全部元素，a_{i_11}（其中 $i_1=1,2,\cdots,n$）代表第1列的全部元素，余类推，不要错误理解为一个元素. 在这个定义中，行列式共有 n^2 个元素，展开后构成 n 次齐次多项式，且该齐次多项式共有 $n!$ 项，其中每一项都是不同行不同列的 n 个元素的乘积，且每一项必须含有且只能含有行列式中的不同行不同列的元素，带正号的项和带负号的项各占一半. $j_1,\cdots,j_n$ 或 $i_1,\cdots,i_n$ 分别表示由 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个数构成的一个 n 元排列. 或者说，这 n 个元素要来自于行列式的每一行和每一列. 把这 n 个元素按第1行、第2行、…、第 n 行的次序放置，那么这 n 个元素的列标排列的逆序数 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$ 就决定了该项的正负. 例如，一个5阶行列式表示的算式共有 $5!$ 项，若已知 $a_{15}a_{53}a_{21}a_{4j}a_{34}$ 是其中的一项，那么分析其列标，可以发现缺少第2列，因此必有 $j=2$. 现在把这5个元素按第1行、第2行、…、第5行的次序重新放置为 $a_{15}a_{21}a_{34}a_{42}a_{53}$，此时列标排列的逆序数为 $\tau(51423)=6$，则该项所带符号为正号.

注 n 阶行列式的定义是一个难点，考生应该掌握：

(1) n 阶行列式是 $n!$ 项的代数和.

(2) 每一项又是 n 个元素的乘积，这 n 个元素要满足"不同行不同列".

(3) 每一项的正、负由这 n 个元素所在行列式中的位置决定.

【例 1.2】展开三阶行列式 $D_3=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2j_3}^{3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$.

【解】固定行号1，2，3；列号可任意排列 $j_1j_2j_3$，$j_1j_2j_3$ 所有可能排列共有6种，相应的逆序数如下（一般地，n 阶行列式由 n^2 个元素组成，展开后共有 $n!$ 项）：

$j_1\to j_2\to j_3\to(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}$

$$1 \to 2 \to 3 \to (-1)^{\tau(j_1j_2j_3)} = (-1)^{\tau(123)} = (-1)^0 = 1$$
$$1 \to 3 \to 2 \to (-1)^{\tau(j_1j_2j_3)} = (-1)^{\tau(132)} = (-1)^1 = -1$$
$$2 \to 1 \to 3 \to (-1)^{\tau(j_1j_2j_3)} = (-1)^{\tau(213)} = (-1)^1 = -1$$
$$2 \to 3 \to 1 \to (-1)^{\tau(j_1j_2j_3)} = (-1)^{\tau(231)} = (-1)^2 = 1$$
$$3 \to 1 \to 2 \to (-1)^{\tau(j_1j_2j_3)} = (-1)^{\tau(312)} = (-1)^2 = 1$$
$$3 \to 2 \to 1 \to (-1)^{\tau(j_1j_2j_3)} = (-1)^{\tau(321)} = (-1)^3 = -1$$

故 $$D_3 = \sum_{j_1j_2j_3}^{3} (-1)^{\tau(j_1j_2j_3)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$
$$= (-1)^0 a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^1 a_{11}a_{23}a_{32} + (-1)^1 a_{12}a_{21}a_{33} + (-1)^2 a_{12}a_{23}a_{31}$$
$$+ (-1)^2 a_{13}a_{21}a_{32} + (-1)^3 a_{13}a_{22}a_{31}$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

注 n 阶行列式展开项的特点：

n 阶行列式展开后，共有 $n!$ 项，每一项中唯一包含且必须包含每一行和每一列中的一个元素，不能重复也不能缺少，理解这一特点可以很快写出低阶行列式的展开式.

【例 1.3】（1）已知四阶行列式中 $a_{3j}a_{12}a_{41}a_{2k}$ 的符号为负，求 j,k；

（2）在五阶行列式中，确定项 $a_{12}a_{31}a_{54}a_{43}a_{25}$ 的符号；

（3）如果 n 阶行列式中等于零的元素大于 n^2-n 个，求 D_n.

【解】（1）由于列号 2,1 固定，故 j,k 只能取 3 或者 4，而 $a_{3j}a_{12}a_{41}a_{2k} = a_{12}a_{2k}a_{3j}a_{41}$

$$j = 3, k = 4 \Rightarrow \tau(2431) = 3 + 1 = 4 \Rightarrow (-1)^{\tau(2431)} = 1$$
$$j = 4, k = 3 \Rightarrow \tau(2341) = 3 = 3 \Rightarrow (-1)^{\tau(2341)} = -1$$
$$\therefore j = 4, k = 3$$

（2）$a_{12}a_{31}a_{54}a_{43}a_{25} = a_{12}a_{25}a_{31}a_{43}a_{54}$

$\tau(25134) = 1 + 3 + 0 + 0 = 4 \Rightarrow (-1)^{\tau(25134)} = 1$，取正号.

（3）n 阶行列式展开共有 $n!$ 项，等于零的元素大于 n^2-n 个，则不为零的元素小于 n 个，而行列式展开的每一项都是 n 个不同元素的乘积，故 $D_n = 0$.

【例 1.4】设 n 阶行列式 $D = \Delta(a_{ij}) = m$，而行列式 $D_1 = \Delta(a_{ij}b^{i-j})$，$b \neq 0$，求 D_1.

【解】
$$D_1 = \sum (-1)^{\tau} a_{1j_1}b^{1-j_1}a_{2j_2}b^{2-j_2}\cdots a_{nj_n}b^{n-j_n}$$
$$= \sum (-1)^{\tau} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} b^{(1+2+\cdots+n)-(j_1+j_2+\cdots+j_n)}$$
$$= \sum (-1)^{\tau} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} b^0 = m$$

【例 1.5】在 $f(x) = \begin{vmatrix} x & x & 1 & 0 \\ 1 & x & 2 & 3 \\ 2 & 3 & x & 2 \\ 1 & 1 & 2 & x \end{vmatrix}$，求 x^3 项的系数.

【解】排列法:先固定行号顺序排列:$12\cdots n$,再根据定义排列可能的列标.

由定义知,行列式展开的每一项来源于原行列式每行每列只能取一个而且必须取一个元素的法则.如取 $a_{11}=x$,则其余项为相应取 $a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$ 形式,下面就是看 $j_2j_3j_4$ 可能的排列中那些符号要求.$j_2=2,j_3=3,j_4=4\Rightarrow$ 则为 x^4 项不合题意所求.其他取法均为 x^2 不合题意所求:

故取 $a_{11}=x$ 不成立.

同样的分析知,只有取 $a_{12}=x,a_{21}a_{33}a_{44}$ 才合题意,于是所求为:$(-1)^{\tau(2134)}=a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}=-x^3$.

【例 1.6】求 $D_4=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2 & 3\\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1 & 5\\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2\end{vmatrix}$ 的值.

【解】$x=\pm1$ 时前两行相等 $D_4=0$,故 D_4 展开式必含该两因式,$x=\pm2$ 时后两行相等,$x=\pm2,D_4=0$,故 D_4 展开式必含该两因式,由于是四阶行列式,最高次幂不大于 x^4,故

$$D_4=k(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$$

而 x^4 前的系数可由定义求出:含 x^4 幂的项的形式为:

$$a_{1j_1}a_{22}a_{3j_3}a_{44}(\text{其中 } a_{22}=2-x^2,a_{44}=9-x^2)$$

由于已经固定顺序行标 $1\to2\to3\to4$,列标有两个也被固定,即 $j_1\to2,j_3\to4$,根据行列式各项取自不同行不同列的规则:$j_1=1$ 或 3;$j_2=3$ 或 1,当 $j_1=1$ 时,必有 $j_3=3$,即存在含 x^4 幂

$$\begin{aligned}(-1)^{\tau(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}&=(-1)^0a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}\\&=1\cdot(2-x^2)\cdot1\cdot(9-x^2)=(2-x^2)(9-x^2)\end{aligned}$$

当 $j_3=1$ 时,必有 $j_1=3$,即存在含 x^4 幂

$$\begin{aligned}(-1)^{\tau(3214)}a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}&=(-1)^3a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}\\&=-2\cdot(2-x^2)\cdot2\cdot(9-x^2)=-4(2-x^2)(9-x^2)\end{aligned}$$

故 x^4 前的系数 $k=1-4=-3$.

注 该题有一个绝妙的方法:即划去$(2-x^2)$和$(9-x^2)$所在的行和列,剩下的数(不能含未知数 x,否则,只能用排列法.)组成行列式 $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-3$,就是 x^4 前的系数.

又如:已知 $f(x)=\begin{vmatrix}x & -1 & 0 & x\\ 2 & 2 & 3 & x\\ -7 & 10 & 4 & 3\\ 1 & -7 & 1 & x\end{vmatrix}$,求 $f''(x)$.易知 $f(x)$ 最高次幂为 x^2,故只要求出 x^2