21世纪考研高等数学辅导通用系列教材

30年教学积淀 10载潜心编著

考研高等数学复习大全

主 编 王福海
副主编 王胜华 国宝华 李一哲

紧扣大纲 直击考点
层次渐进 基础过关
重点强化 预测点睛
精选习题 举一反三

中国石油大学出版社
CHINA UNIVERSITY OF PETROLEUM PRESS

考研高等数学
复习大全

主　编　王福海
副主编　王胜华　国宝华　李一哲

中国石油大学出版社
CHINA UNIVERSITY OF PETROLEUM PRESS

图书在版编目(CIP)数据

考研高等数学复习大全 / 王福海主编. 一东营：中国石油大学出版社，2018.11

ISBN 978-7-5636-6322-4

Ⅰ. ①考… Ⅱ. ①王… Ⅲ. ①高等数学一研究生一入学考试一自学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 249165 号

书　　名：考研高等数学复习大全
　　　　　KAOYAN GAODENG SHUXUE FUXI DAQUAN

主　　编：王福海

责任编辑：张　杰(电话 0532—86981539)

封面设计：赵志勇

出 版 者：中国石油大学出版社
　　　　　(地址：山东省青岛市黄岛区长江西路 66 号　邮编：266580)

网　　址：http://www.uppbook.com.cn

电子邮箱：zj123bm123@126.com

排 版 者：青岛天舒常青文化传媒有限公司

印 刷 者：青岛北琪精密制造有限公司

发 行 者：中国石油大学出版社(电话 0532—86983437)

开　　本：185 mm×260 mm

印　　张：22.75

字　　数：554 千

版 印 次：2018 年 11 月第 1 版　2018 年 11 月第 1 次印刷

书　　号：ISBN 978-7-5636-6322-4

定　　价：76.80 元

前言 Preface

数学，尤其是高等数学，是工科院校最重要的一门基础课，也是在研究生入学考试中起着决定性作用的一门课。任何一位有所作为的工程技术人员，无一不具备扎实的高等数学基础。为帮助广大学生学好高等数学，给他们备考研究生提供一份实用的复习资料，作者根据多年讲授高等数学课程和考研辅导的教学经验，编写了这本《考研高等数学复习大全》。本书有如下几个特点：

(1) 严格按照考研大纲编写，突出重点、热点、常考点，适用于数学一、二、三各类考生。只要求某类考生掌握的内容、习题均有注明，例如章节内容或题号右上角标注①的仅数学一要求，无标注的各类考生均需掌握。

(2) 本书各章节的编排与高等数学课程的教材和教学顺序完全一致，因此对大学一年级学习高等数学的初学者也是一部极好的高等数学同步辅导用书；对复习考研的学生则能做到循序渐进、由浅入深、夯实基础、逐渐提高，在大学数学与考研数学之间建立起有效的联结。

(3) 本书着重归纳了各种常见题型，总结了快速、简洁、实用的解题方法。试题是无限的，而题型是有限的，只有掌握了各种快速、简洁的解题方法才能在一定的答题时间内取得更好的成绩。内容新、题型全、方法好是这本书最突出的特点，在归纳和总结上条理清楚，层次分明，容易牢记。

(4) 中国有句古话叫“知己知彼，百战不殆”。对于考研的众多学子而言，“知彼”，就是要弄清考什么、怎么考，这在这本书的题型归纳与解题方法中非常清楚地告诉给了大家；“知己”，就是知道自己对重点题型和解题方法掌握的情况，为

此，本书在每章最后都配备了大量的习题并给出了参考答案，用于检验大家理解和掌握的情况。本书习题约 1 000 题，与 500 道左右的例题共同形成了一个完整的知识体系，覆盖了考研高等数学的所有题型。为了使读者提高分析问题、解决问题的能力，习题有一定的难度，但尽量避免出现偏题、怪题。数学水平的提高是一个循序渐进的过程，不论你有多么远大的理想，都要脚踏实地地从点滴做起，上好每一堂课，做好每一道题。

本书在编写过程中参阅了相关书籍，引用了一些例子和习题，恕不一一指明出处，在此一并向有关作者致谢。

本书在编写过程中得到了靳渤文同志的很多帮助和建议，在此表示衷心的感谢！

尽管作者有着多年从事高等数学和考研辅导的教学实践，但由于水平有限，加之时间仓促，书中难免有不足之处，恳请读者不吝指正。

王福海

2018 年 10 月

目录 Contents

第一章

极限与连续

§1.极限的概念与性质

一、极限的概念问题

（一）数列的极限

1.极限的描述性定义

$\lim\limits_{n\to\infty}X_n=a\Leftrightarrow$当 n 无限增大时，数列 X_n 无限接近常数 a，此时也称数列 X_n 收敛于 a；如果 X_n 没有极限，则称数列 X_n 发散.

2.极限的精确定义

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow$对任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，$|x_n-a|<\varepsilon$.

（二）函数的极限

对于函数的极限也有与上述类似的描述性和精确性定义，下面只给出精确性定义.

1. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow$对任意的给定的 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$.

2.左极限：$f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A\Leftrightarrow$对任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，当 $-\delta<x-x_0<0$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$.

3.右极限：$f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A\Leftrightarrow$对任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，当 $0<x-x_0<\delta$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow$对任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在 $M>0$，当 $|x|>M$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$.

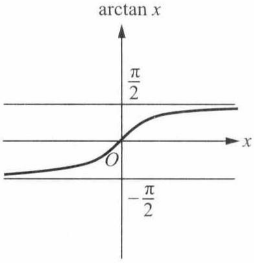
5. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A\Leftrightarrow$对任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在 $M>0$，当 $x>M$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$.

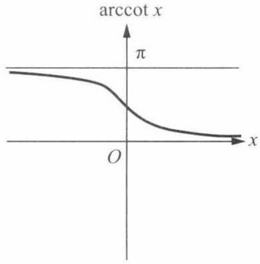
6. $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A\Leftrightarrow$对任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在 $M>0$，当 $x<-M$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$.

例 1　用极限的描述性定义说明：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arccot} x=\pi$.

解





由上述图形及极限的描述性定义易知：

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2},\ \lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\operatorname{arccot} x=0,\ \lim_{x\to-\infty}\operatorname{arccot} x=\pi.$$

例 2　用极限的精确性定义说明：当 $|a|<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}a^n=0$.

解　对任意给定的 $\varepsilon>0$，因为 $|X_n-0|=|a^n-0|=|a|^n$，所以要使 $|X_n-0|<\varepsilon$，只要 $|a|^n<\varepsilon$. 由 $n\ln|a|<\ln\varepsilon$，可得 $n>\frac{\ln\varepsilon}{\ln|a|}$. 因此取 $N=\left[\frac{\ln\varepsilon}{\ln|a|}\right]$，则当 $n>N$ 时，就有 $|a^n-0|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}a^n=0$.

注：取整函数 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数. 如：$[1.3]=1$.

例 3　下列结论错误的是（　　）.

(A) 若 $a\neq0$，$\lim\limits_{n\to\infty}|X_n|=|a|$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}X_n=a$

(B) 若 $a\neq0$，$\lim\limits_{n\to\infty}X_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}|X_n|=|a|$

(C) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}X_n=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}|X_n|=0$

(D) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}|X_n|=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}X_n=0$

解　应选(A).

反例：$X_n=(-1)^n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}|X_n|=1$，但 $\lim\limits_{n\to\infty}X_n$ 不存在.

(B) 的证明：因 $\lim\limits_{n\to\infty}X_n=a$，故对任意的给定的 $\varepsilon>0$，存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，$|X_n-a|<\varepsilon$，而 $\big||X_n|-|a|\big|<|X_n-a|$，因此 $\big||X_n|-|a|\big|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}|X_n|=|a|$，(C)(D)的证明类似.

注：以上三个例题的结论在做题时可直接用，望同学们牢记.

例 4　(2014 年) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\neq0$，则当 n 充分大时，下列结论正确的是（　　）.

(A) $|a_n|>\frac{|a|}{2}$　　(B) $|a_n|<\frac{|a|}{2}$　　(C) $a_n>a-\frac{1}{n}$　　(D) $a_n<a+\frac{1}{n}$

解　应选(A).

因为对给定的 $\varepsilon=\frac{|a|}{2}$，存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，$||a_n|-|a||\leqslant|a_n-a|<\varepsilon=\frac{|a|}{2}$，即当 n 充分大时，$-\frac{|a|}{2}<|a_n|-|a|<\frac{|a|}{2}$，故有 $|a_n|>\frac{|a|}{2}$.

注：在极限定义中，(1) ε 取定后不能再变，(2) 当 ε 取定后，N 由 ε 确定（由例 2 可知）. 本题有的同学取 $\varepsilon=\frac{1}{n}$，则当 n 充分大时，$|a_n-a|<\frac{1}{n}$，从而推出 $a_n>a-\frac{1}{n}$，这是不对的.

例 5　(1997 年)"对任意给定的 $\varepsilon\in(0,1)$，总存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n-a|\leqslant 2\varepsilon$"是数列 $\{X_n\}$ 收敛于 a 的(　　).

(A) 充分但非必要条件　　(B) 必要但非充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 非充分非必要条件

解　应选(C).

因为对任意给定的 $\varepsilon_1>0$，总存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n-a|\leqslant 2\varepsilon_1$，从而取 $\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{3}$，则有对任意给定的 ε，$|x_n-a|\leqslant 2\varepsilon_1=\frac{2}{3}\varepsilon<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}X_n=a$；反之，若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 N，当 $n>N$ 时，$|x_n-a|<\varepsilon<2\varepsilon$，即 $|x_n-a|\leqslant 2\varepsilon$.

二、极限的性质问题

内容提要

(一) 数列极限的性质

1. (唯一性) 极限存在必唯一.

2. (有界性) 收敛数列必有界.

3. (保号性) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$a>0$(或 $a<0$)，则存在正整数 N，当 $n>N$ 时，$x_n>0$(或 $x_n<0$)；反之，若从某项开始 $x_n>0$(或 $x_n<0$)，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则 $a\geqslant 0$(或 $a\leqslant 0$).

4. (子数列的性质) X_n 收敛于 $a\Leftrightarrow X_n$ 的任一子数列收敛于 a.

5. (极限与无穷小的关系) $\lim\limits_{n\to\infty}X_n=a\Leftrightarrow X_n=a+\alpha_n$. 其中 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$，$\alpha_n$ 称之为当 $n\to\infty$ 时的无穷小.

(二) 函数极限的性质

对于函数极限的 6 种极限形式，其极限性质与上述数列极限的性质类似，仅以 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 为例加以说明：

1. (唯一性) 极限存在必唯一.

2. (局部有界性) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则存在 $M>0$ 及 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)|\leqslant M$.

3. (局部保号性) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>0$(或 $A<0$)，则在 x_0 的某个去心邻域内 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$)；反之，若 $f(x)>0$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则 $A\geqslant 0$.

4.(左、右极限的性质)$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$.

5.(极限与无穷小的关系)$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha$,其中$\lim\limits_{x\to x_0}\alpha=0$($\alpha$称之为$x\to x_0$时的无穷小).

(三)数列极限与函数极限的关系

若$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$,则$\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=A$.

例1 已知$f(x)$在$x=0$的邻域有定义且$f(0)=0$,而$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-x^2}{x^3}=1$,则有( ).

(A) $x=0$是$f(x)$的极小值点　　(B) $x=0$是$f(x)$的极大值点

(C) $x=0$不是$f(x)$的极值点　　(D) $x=0$是否是极值点无法确定

解 应选(A).

由性质5可知:$\dfrac{f(x)-x^2}{x^3}=1+\alpha$从而$f(x)=x^2+x^3+\alpha x^3$.

因为当$x\to0$时,$\alpha\to0$,因此$|x^3+\alpha x^3|=x^2|x+\alpha x|<x^2$,故$f(x)>0=f(0)$,即$f(0)=0$是$f(x)$的极小值.

例2 (2015年)设$\{X_n\}$是数列,则下列命题不正确的是( ).

(A) 若$\lim\limits_{n\to\infty}X_n=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}X_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}X_{2n+1}=a$

(B) 若$\lim\limits_{n\to\infty}X_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}X_{2n+1}=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}X_n=a$

(C) 若$\lim\limits_{n\to\infty}X_n=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}X_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}X_{3n+1}=a$

(D) 若$\lim\limits_{n\to\infty}X_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}X_{3n+1}=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}X_n=a$

解 应选(D).

由数列极限的性质4可知:

$\lim\limits_{n\to\infty}X_{3n}=A\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}X_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}X_{3n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}X_{3n+2}=A$,而选项(D)中缺少$\lim\limits_{n\to\infty}X_{3n+2}=a$的条件.

例3 (2006年)$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=$________.

解 由极限性质可知:

$\lim\limits_{n\to\infty}X_n=a\Leftrightarrow\lim\limits_{k\to\infty}X_{2k}=\lim\limits_{k\to\infty}X_{2k+1}=a$,而$n$为偶数时:$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)=1$.

n为奇数时:$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{-1}=1$,因此原极限为1.

三、无穷小与无穷大的概念与性质问题

内容提要

(一)定义

1.以零为极限的函数叫无穷小.

2.在某一极限过程下绝对值无限增大的函数叫无穷大量,简称无穷大.

例如:$\left\{\dfrac{n}{n^2+1}\right\}$当$n\to\infty$时为无穷小.

$\frac{1}{x}$当 $x\to 0$ 时为无穷大，当 $x\to\infty$时为无穷小.

(二) 性质

1. 有界函数与无穷小的积为无穷小.

2. 在某一极限过程中，如果$\frac{1}{f(x)}$是无穷大，则 $f(x)$是无穷小.

例 1　(2005 年)$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{2x^2+1}\arctan(1+\sin x)=$ ________.

解　因为$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{2x^2+1}=0$，$|\arctan(1+\sin x)|<\frac{\pi}{2}$，所以由性质 1 可知原极限为 0.

例 2　若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot y_n=0$，则必有(　　).

(A) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ 或$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$　　(B) 若 x_n 有界，则 y_n 必有界

(C) 若 x_n 有界，则 y_n 必为无穷小　　(D) 若$\frac{1}{x_n}$为无穷小，则 y_n 必为无穷小

解　应选(D).

因$\frac{1}{x_n}$为无穷小，从而 x_n 为无穷大. 若$\lim\limits_{n\to\infty}y_n\neq 0$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot y_n=\infty$与$\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot y_n=0$ 矛盾.

(A)的反例：$x_n=\begin{cases}n, & n\text{ 为奇数},\\ 0, & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$ $y_n=\begin{cases}0, & n\text{ 为奇数},\\ n, & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$

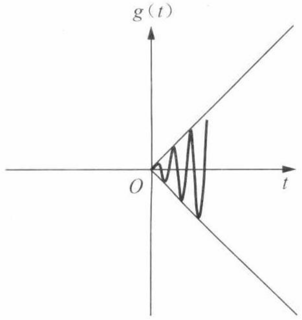
(B)、(C)的反例：$x_n=0$，$y_n=n$.

例 3　当 $x\to 0^+$ 时，$f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$是(　　).

(A) 无穷大量　　(B) 无穷小量　　(C) 有界变量　　(D) 无界变量

解　应选(D).

令$\frac{1}{x}=t$，则 $f(x)=g(t)=t\sin t$. 其函数图像如下图所示：



当 $x\to 0^+$ 时，$t\to+\infty$，由上图可知 $t\to+\infty$时 $g(t)$只能是无界变量.

§2. 极限的计算方法

常用结果：

1. $|a|<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}a^n=0$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$.

   $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arccot} x=0$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arccot} x=\pi$.

3. $a>1$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}a^{\frac{1}{x}}=\begin{cases}+\infty, & x\to 0^+,\\ 0, & x\to 0^-.\end{cases}$

4. $a>0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

证明：因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}}$，所以由洛必达法则有 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}}=e^0=1$，从而$\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=1$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

证明：由洛必达法则，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{1}=1$.

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$.

证明：由洛必达法则，$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}}\overset{\frac{1}{x}=t}{=}e^{\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{\ln(1+t)}{t}}=e^{\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{\frac{1}{1+t}}{1}}=e^1=e$.

类似可证 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$.

一、利用极限的四则运算法则求极限

定理：设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，则有：

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}$，当 $B\neq 0$ 时成立.

注：1. 上述结论对数列极限及 6 种函数极限均成立.

2. 上述结论必须是有限个函数.

3. 上述结论必须是各个函数的极限均存在且商的情况中分母极限不能为零.

例 1　求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2}$.

解　因为$1+2+3+\cdots+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$,

所以
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots(n-1)}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)}{2n^2}=\frac{1}{2}.$$

例 2　求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\times2}+\dfrac{1}{2\times3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right)$.

解　因为$\dfrac{1}{(k-1)\cdot k}=\dfrac{1}{k-1}-\dfrac{1}{k}$,

所以
$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]\\&=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.\end{aligned}$$

注:n 项和的极限处理方法之一——化简.

例 3　$|a|<1$ 时,求$\lim\limits_{n\to\infty}(1+a)(1+a^2)(1+a^4)\cdots(1+a^{2^n})$.

解　因为$(1-a)(1+a)=1-a^2$,所以$(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})=\dfrac{1-a^{2^{n+1}}}{1-a}$,

从而原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-a^{2^{n+1}}}{1-a}=\dfrac{1}{1-a}$.

例 4　求$\lim\limits_{x\to0}\left\{\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}\right\}$.

解　因为
$$\begin{aligned}&\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\\&=\frac{1}{\sin\frac{x}{2^n}}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\cdot\sin\frac{x}{2^n}\\&=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2^n}}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-1}}\sin\frac{x}{2^{n-1}}\\&=\frac{1}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}\sin x,\end{aligned}$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}\cdot\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{\sin x}{x}$,故原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

注:n 项积的极限求法之一——化简.

例 5　求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sin(\sqrt{n^2+n}\,\pi)\right]^2$.

解　(1) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}=\dfrac{1}{2}$.

(2) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\sin\left[(\pi\sqrt{n^2+n}-n\pi)+n\pi\right]\right\}^2$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\sin\left[\pi(\sqrt{n^2+n}-n)\right]\right\}^2$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sin\frac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}+n}\right)^2=\sin\frac{\pi}{2}=1$$

注：出现根号加减的情况时先考虑有理化处理.

例 6　求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$；　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-\cos x}{x+\sin x}$；　　(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}+3^{n-1}}{2^n+3^n}$.

解　(1) 原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+x+x^2-3}{1-x^3}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-(x+2)}{1+x+x^2}=-1$.

(2) 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-\dfrac{\cos x}{x}}{1+\dfrac{\sin x}{x}}=\dfrac{2-0}{1+0}=2$.

(3) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+\dfrac{1}{3}}{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+1}=\dfrac{1}{3}$.

注：求极限＝变形＋化简＋观察极限值.

二、利用夹逼定理求极限

定理：

1. 若 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

2. 若 $g(x)$、$f(x)$、$h(x)$ 在 x_0 的某去心邻域有定义，$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=a$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$.

3. 对函数极限的其他情况有类似结论.

例 1　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

解　因为 $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}<\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}<\dfrac{1}{\sqrt{n^2}}+$

$\frac{1}{\sqrt{n^2}}+\cdots\frac{1}{\sqrt{n^2}}=1$,而$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}=\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}\to 1$,所以原极限为1.

注:n项和极限的求法之二——夹逼定理.除此之外,还有用定积分定义和级数的方法求n项和极限,详见定积分和级数.

例2　求$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n+4^n}$.

解　因为$4<\sqrt[n]{2^n+3^n+4^n}<\sqrt[n]{4^n+4^n+4^n}=\sqrt[n]{3}\cdot 4$,而$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}\cdot 4=4$,故原式$=4$.

常用结论:若$a_i\geqslant 0$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots a_k^n}=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$.

例3　(2008年)设$0<a<b$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^{-n}+b^{-n}}=$________.

解　因为$0<a<b$,所以$0<\frac{1}{b}<\frac{1}{a}$,从而$\max\left\{\frac{1}{a},\frac{1}{b}\right\}=\frac{1}{a}$,即原式$=\max\left\{\frac{1}{a},\frac{1}{b}\right\}=\frac{1}{a}$.

例4　当$x\geqslant 0$时,求$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}$的表达式.

解　$f(x)=\max\left\{1,x,\frac{x^2}{2}\right\}=\begin{cases}1,0\leqslant x\leqslant 1,\\ x,1<x\leqslant 2,\\ \frac{x^2}{2},x>2.\end{cases}$

例5　以$\left[\frac{1}{x}\right]$表示不超过$\frac{1}{x}$的最大整数,求$\lim\limits_{x\to 0^+}x\left[\frac{1}{x}\right]$.

解　令$\frac{1}{x}=t$,则$x\left[\frac{1}{x}\right]=\frac{[t]}{t}$,$x\to 0^+$时$t\to+\infty$,又$\frac{t-1}{t}\leqslant\frac{[t]}{t}\leqslant\frac{t}{t}=1$,而$\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t-1}{t}=1$,从而$\lim\limits_{x\to 0^+}x\left[\frac{1}{x}\right]=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{[t]}{t}=1$.

注:变量替换的思想在求极限中经常用到.

三、利用单调有界原理求极限

定理:单调有界数列必有极限.

注:(1) 数列X_n单调增加$\Leftrightarrow X_{n+1}\geqslant X_n$,$X_n$单调减小$\Leftrightarrow X_{n+1}\leqslant X_n$.

(2) 单调性的证明方法有归纳法,构造函数用导数的方法,推导$X_{n+1}-X_n$的正负,比较$\frac{X_n}{X_{n+1}}$与1的大小.

(3) 数列X_n有界$\Leftrightarrow$存在常数A、B使得$A\leqslant X_n\leqslant B$.