

高教版 2019

全国硕士研究生
| 招生考试 |

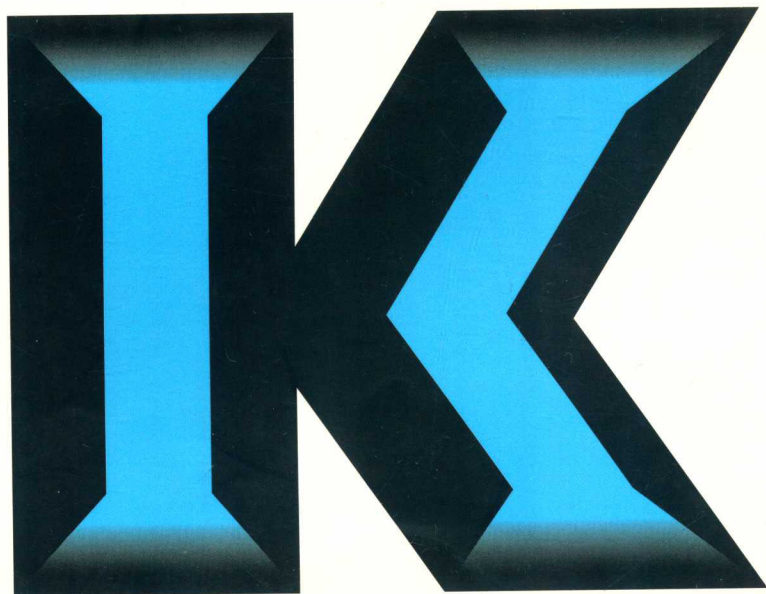
数学

考试分析

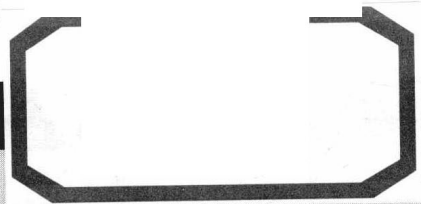
(2019年版)

教育部考试中心

高等教育出版社



高教版 2019



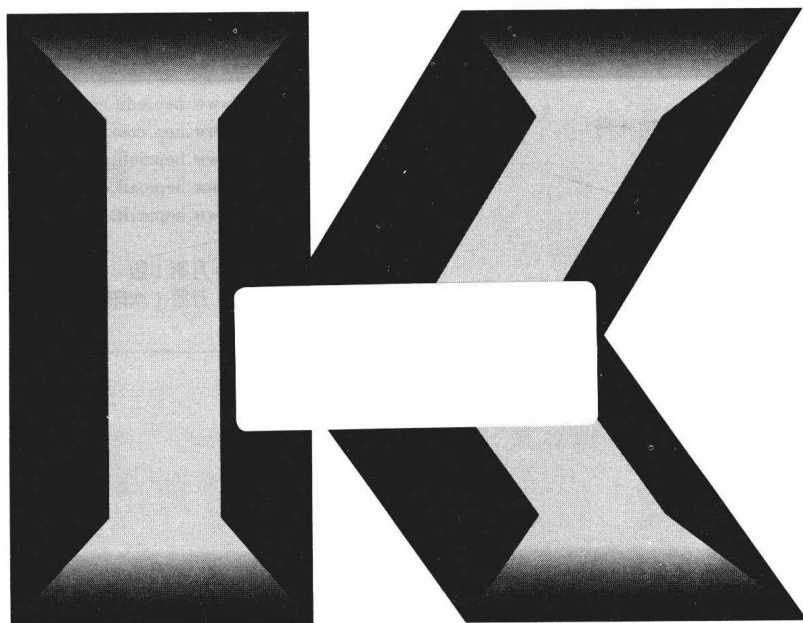
全国硕士研究生
| 招生考试 |

数学

考试分析
(2019年版)

教育部考试中心

高等教育出版社·北京



图书在版编目(CIP)数据

全国硕士研究生招生考试数学考试分析：2019年版 /
教育部考试中心编. -- 北京：高等教育出版社, 2018.9
ISBN 978-7-04-050358-6

I. ①全… II. ①教… III. ①高等数学-研究生-入
学考试-自学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第177743号

全国硕士研究生招生考试数学考试分析(2019年版)

QUANGUO SHUOSHI YANJIUSHENG ZHAOSHENG KAOSHI SHUXUE KAOSHI
FENXI (2019 NIAN BAN)

策划编辑 杨挺扬 责任编辑 雷旭波 封面设计 王洋 版式设计 马云
责任校对 王雨 责任印制 赵义民

出版发行	高等教育出版社	网 址	http://www.hep.edu.cn
社 址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印 刷	中国农业出版社印刷厂		http://www.hepmall.com
开 本	787mm×1092mm 1/16		http://www.hepmall.cn
印 张	12.75	版 次	2018年9月第1版
字 数	310千字	印 次	2018年9月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定 价	36.00元
咨询电话	400-810-0598		

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物料号 50358-00

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任；构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人进行严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话 (010)58581999 58582371 58582488

反盗版举报传真 (010)82086060

反盗版举报邮箱 dd@hep.com.cn

通信地址 北京市西城区德外大街4号

高等教育出版社法律事务与版权管理部

邮政编码 100120

防伪说明及增值服务

高教版考试用书书后配有防伪标，该防伪标为高教版考试用书正版书的专用标识：

1. 广大读者可刮开防伪标上的卡号登录“高教考试在线”网址 <http://px.hep.edu.cn/>，用户注册后输入20位密码辨别图书真伪。对于大部分考试图书除提供防伪验证服务外，还为购买正版书考生提供：(1)部分图书配套增值视频或资料的下载、学习；(2)考试资讯；(3)在线课程的试听、缓存及购买等多项增值服务。(不同考试图书的增值服务请登录网站咨询)

2. 可将防伪二维码下的20位密码按从左到右、从上到下的顺序发送短信至106695881280，免费查询所购图书真伪。

3. 刮净防伪涂层，利用手机微信等软件扫描二维码，会跳转至防伪查询网页，获得所购图书详细信息。

反盗版短信举报

编辑短信“JB,图书名称,出版社,购买地点”发送至10669588128

防伪客服电话

(010)58582300

目 录

第一部分	数学科考试说明	1
	一、考试性质	1
	二、指导思想	1
	三、基本原则	2
	四、参考答案及评分参考的制订说明	2
	五、试题、试卷和考试质量的评价指标	3
第二部分	2018 年数学考试分析	6
	一、总体评价	6
	二、统计分析	7
	三、思考与建议	8
	四、数学(一)试题分析	10
	五、数学(二)试题分析	32
	六、数学(三)试题分析	55
第三部分	2017 年数学试题分析	77
	一、数学(一)	77
	二、数学(二)	97
	三、数学(三)	117
第四部分	2016 年数学试题分析	137
	一、数学(一)	137
	二、数学(二)	159
	三、数学(三)	177

第一部分

数学科考试说明

一、考试性质

全国硕士研究生招生考试数学科考试(以下简称数学考试)是为招收工学、经济学、管理学硕士研究生而设置的具有常模参照性的水平考试。

一方面,从数学考试成绩的使用功能上看,它是常模参照性的考试。所谓常模参照考试是指依据考生的成绩在全体考生成绩量表中的位置来评价考生成绩的优劣,离开考生群体解释考生的成绩意义不大。我国硕士研究生招生初试是从高分到低分择优确定参加复试人选,这种优胜劣汰的方式是常模参照考试的主要特征。数学考试成绩对于工学、经济学和管理学各专业的考生是否被录取起着至关重要的作用。从这个意义上讲,数学考试具有明显的选拔功能,是常模参照考试。

另一方面,从数学考试的测量功能上看,数学考试又是水平考试。水平考试是用来测量考生是否达到一定的水平,从而决定是否适应将来的某项任务的考试,其主要特征是命题不以《教学基本要求》或某一指定的教材为依据,而是以《考试大纲》为依据。《考试大纲》规定考试内容和考试要求,与《教学基本要求》没有直接的关系。数学考试是测量工学、经济学、管理学各专业的考生是否具备为完成相应专业研究生阶段的学习任务,以及胜任工作后的研究任务所必需的数学知识和能力。数学《考试大纲》规定的考试内容和考试要求与《教学基本要求》不完全相同,《教学基本要求》中规定的有些教学内容《考试大纲》不要求考查,而《考试大纲》中的有些考试要求要略高于《教学基本要求》。可见,数学考试也符合上述水平考试的特征,因而也是水平考试。

为了体现工学、经济学、管理学不同学科专业对硕士研究生入学应具备的数学知识和能力的不同要求,从2009年开始,数学考试分为三个卷种,即数学(一)、数学(二)和数学(三),对不同卷种的考试内容有不同的要求。这种对不同学科、不同专业的考生提出不同考试要求的特征也是水平考试的重要标志。

二、指导思想

根据数学考试的性质和目的,数学科考试的命题工作一直坚持两个“有利于”的指导思想:既有利于国家对高层次人才的选拔,又有利于高等学校各类数学课程教学质量的提高。在这两个“有利于”中,重点是有利于国家对高层次人才的选拔。

有利于国家对高层次人才的选拔,就是要求这项考试具有较高的信度和效度,能对考生群体进行有效的测量和甄别,从而区分出考生成绩的优劣,并将数学基础好、有发展潜力并具有一定创新能力的考生选拔出来,进入更高层次的教育阶段学习和深造。

有利于高等学校各类数学课程教学质量的提高,就是要求数学考试试题的编制能结合高等学校的教学实际,试题水平既能反映教学的实际水平,也能考查考生应当具备的知识和能力,同时,利用考试这根“指挥棒”正确引导高等学校的数学教学向培养学生应用数学能力的方向发展,使得学生学而有用,学而会用,从而对数学教学质量的提高起到积极的促进作用.

三、基本原则

(1) 严格按照《全国硕士研究生招生考试数学考试大纲》(简称《考试大纲》)规定的考试内容和考试要求进行命题.

《考试大纲》主要包括以下内容:考试性质、考查目标、试卷分类及使用专业、考试形式和试卷结构、考试内容和考试要求、题型示例及参考答案等,它是法规性文件,是命题工作和考生复习的唯一依据.

按照《考试大纲》命题是指考查的内容不超过大纲的规定,各科目在试卷中的占分比例、题型比例与大纲要求基本一致,试卷的难易度与题型示例的难易度基本一致,试卷中不出现超纲题、偏题和怪题.

(2) 试题以考查数学的基本概念、基本方法和基本原理为主,在此基础上加强对考生的运算能力、抽象概括能力、逻辑思维能力、空间想象能力和综合运用所学知识解决实际问题能力的考查.

(3) 试题编制要符合各种题型编制原则.

(4) 保持历年试题难度的稳定.

(5) 试题编制应科学、公正、规范.

四、参考答案及评分参考的制订说明

制订参考答案及评分参考是命题工作的一个重要组成部分,它为全国范围内统一的评卷工作提供了一个公正、科学的量表和尺度,是考试公平性的重要保证.

数学填空题要求答案是确定的和唯一的,参考答案只给出应填的结果,不给出推导计算过程.一般每题4分,答对4分,答错0分.对于四选一的选择项有A、B、C、D四个备选项,其中三个是干扰项,一个是正确选项,参考答案只给出正确选项前的字母,不给出推导过程.选对得满分,选错得0分,不倒扣分,鼓励考生在不会作答时猜测选项.对于计算题、证明题以及其他解答题,一般提供一至两种参考解答或证明方法,有些试题有更多的解法甚至包括初等解法,但所提供的参考解答必须是与《考试大纲》规定的考试内容和考试目标相一致的解法和证明方法.参考答案的文字表述必须规范,推理过程必须表述清楚,避免因参考答案表述不清而造成评分误差.每份分值的设置与完成该题所花费的平均时间以及考核目标的层次有关.一般地说,综合性较强的试题、推理过程较多的试题和应用性的试题赋分的权重较大,分值较高;基本计算题、常规性试题和简单应用题的分值较低.各题的分值设定之后,就需要确定评分参考,即运算过程中关键步骤的赋分权重.计算题和证明题的评分标准是按照计算或推理的过程连续赋分的,比如,完成一道分值为10分的计算题需要三个关键步骤,完成到第一个步骤给3分,完成到第二个步骤给6分,三个步骤全部完成给10分.对于文科试题常常是按照要点单独赋分.为什么数学题不宜按每个步骤单独给分呢?这是考虑到对于数学计算或证明题,只有做对了前面的步骤,才能完成后面的步

骤这一特点.对于有多个解法的试题,一般到达同一结果即给相同的分数,每一步骤分值的给定不是随意的,如同确定每题的分值一样,需要考虑该步骤在解答和证明过程中的复杂和重要程度,关键的步骤分值较高,反之较低.

参考答案与评分参考是评分的原则依据,一般各地在试卷评阅前要组织专家依照参考答案与评分参考对部分考卷进行试评,对评分参考做进一步的细化,制订评分细则,使评卷工作更具可操作性.

评分参考的制订直接关系到试卷的平均分,一份由很难的试题构成的试卷,可以通过较松的评分使其平均分较高,反之亦然.因此,评分参考制订的科学性和逐年稳定性是试卷质量的重要组成部分.

五、试题、试卷和考试质量的评价指标

根据全国硕士研究生招生数学考试的性质,它是常模参照性的水平考试.对于常模参照考试,通常用难度和区分度评价试题的质量;用平均分和标准差反映考生成绩的分布情况,同时也作为评价试卷质量的重要指标;用信度和效度评价考试的质量.

1. 试题的评价指标

试题难度是反映试题难易程度的指标,它是考生在该题上的得分率,即考生在该题上的平均得分与该题满分之比,通常以小写的 p 表示,取值范围在 0 与 1 之间.由于不同的考生群体水平是有差异的,他们在同一题上的平均得分也不同,因此,同一题目相对于不同的考生群体,其难度值是不同的,也就是说题目难度依赖于考生样本.

但对于全国统一考试而言,由于参加考试的考生群体的水平是相对稳定的,可以把每年的考生群体视作基本不变的(实际上每年考生水平是存在一定差异的),这样试题的统计难度值或估计值就可以用于比较和控制试卷质量.

对于数学考试而言,难度值在 0.3 以下的为难题,难度值在 0.3~0.8 的视为中等难度的试题,难度值在 0.8 以上的视为易题.试卷难度一般控制在 0.5 左右,一份试卷中难、中、易试题要有一个合适的比例.

在命题过程中,为了保证试题的质量,需要估计题目难度.根据难度的定义,估计难度不仅要考虑题目自身的内容难度,而且要考虑考生群体的水平以及该题的评分参考的设计.

试题区分度是指题目对不同水平的考生加以区分的程度或鉴别的能力.区分度通常表示某一群体的全体考生在该题上的得分与他们的试卷总分之间的相关系数,用 D 表示,一般 $-1 < D < 1$.对于主观性试题,一般用积矩相关系数;对于客观性试题,如填空题和选择题,一般用双列相关计算公式.该公式比较复杂,可参考有关教育测量书籍,在此不做介绍.

一种近似的、适合于主观性试题区分度的计算方法是先将考生群体分出一个高分组和一个低分组,然后分别计算出高分组、低分组的得分率 $p(H)$ 、 $p(L)$, $D = p(H) - p(L)$.高分组一般是考生群体中成绩在前面的 27% 的考生,低分组一般是考生群体中成绩在后面的 27% 的考生.这种方法适合较小规模的考试,不适用于大规模的考试.

一般认为区分度在 0.3 以上的试题为合格,0.2~0.3 的试题应予以修正,0.2 以下的试题为不合格,应予以淘汰.

区分度与难度有一定的关系,难度较大或难度较小的试题其区分度通常较小,难度中等的试

题区分度通常较大.为了综合难度和区分度这两项指标对试题进行评价,我们通常将试题分为六类,如下表所示.

试题的六大类型分类表

特征 类型	p	D	试题特征
I	(0,0.3)	(0,0.3)	难度大且区分能力差
II	[0.3,0.8]	(0,0.3)	难度适中但区分能力差
III	(0.8,1)	(0,0.3)	难度小且区分能力差
IV	(0,0.3)	(0.3,1.0)	难度大但区分能力强
V	[0.3,0.8]	(0.3,1.0)	难度适中且区分能力强
VI	(0.8,1)	(0.3,1.0)	难度小但区分能力强

在上述分类中,我们没有考虑区分度小于零的情况,因为这种试题一般不会出现.我们认为,第V类试题是测量效果较好的试题,在试卷中应占较大比例(达80%以上).第I类试题属于“题太难谁都不会做”,第III类试题属于“题太易谁都会做”,它们在试卷中仅起到降低或提高平均分、降低标准差的作用,因此,命题中我们严格控制出现这两类试题.同时,我们也不要出现太多的第II类和第VI类试题.第IV类试题在选拔性的研究生招生数学考试中具有非常重要的作用,它对区分中、高水平的考生十分有效,通过多年对试题的分析,这类试题往往是考查考生综合应用能力的试题.

2. 试卷的评价指标

若将一份试卷看作一个题目,则像计算题目难度一样,也有一个试卷难度指标,即全体考生的平均分与试卷满分之比.在某项考试的满分逐年保持不变的情况下,全体考生的平均分成为衡量试卷难易程度的重要指标,试卷的平均分反映全体考生的平均得分.试卷的标准差是反映考生成绩离散程度的指标,标准差愈大,说明考生成绩分布得愈广,该考试将不同水平的考生区分开来的效果愈强;标准差愈小,说明考生成绩都集中在平均分附近,没有把不同水平的考生拉开.

试卷平均分和标准差是反映试题难易度是否稳定的非常重要的指标.因为不同年份的同一科试卷是否稳定主要看考后考生成绩的分布是否稳定,在大规模考试中,一般情况下考生的成绩近似服从正态分布,而正态分布由均值和标准差决定,试卷的平均分和标准差是考生成绩总体均值和标准差的良好估计.因此,控制试卷难易度的稳定性,关键是控制试卷的平均分和标准差.

试卷的平均分与构成试卷的试题的难度有一种确定的关系式,即试卷的平均分等于每题的题分乘以该题的难度值后的相加值,在命题过程中可以通过有经验的命题教师对试题难度进行估计,就可以利用上述关系式估计出试卷的平均分,从而达到控制试卷难度的目的.试题的区分度与试卷的标准差虽然没有确定的关系,但一般来说,试题的区分度愈大,该题对试卷标准差的贡献值就愈大.特别地,中等难度、区分度较大的第V类试题对标准差的贡献最大.因此,在命题中应尽量使第V类试题在试卷中占分比例较大.

试卷的及格率是指获得满分的60%以上成绩的考生占考生总人数的比例,若满分为150分,试卷的及格率是考生成绩分布曲线下大于90分的面积,此面积与成绩分布的均值和标准差有

关,在命题中难以单独控制,把它作为评价考试情况的一个粗略的指标是可以的,但一般情况下,不把它作为试卷质量的评价指标.

3. 考试质量的评价指标

教育测量学认为考试的信度和效度是评价考试质量的重要指标.信度是反映考试可靠性的指标,可形象地解释为:只要测量对象本身没有变化,用同样的“尺子”去测量总可以得到相同的结果.常用的信度类型主要有再测信度、复本信度、分半信度和内部一致性信度.由主观性试题构成的考试的内部一致性系数又称为 α 系数.目前我们采用的是分半信度和 α 系数.效度反映一个考试是否测量了想要测量的东西.常用的效度类型主要有内容效度、效标关联效度和构想效度.关于信度和效度的计算公式可参照有关教育测量书籍.

在后面的试卷分析和试题分析部分将应用上述关于试题和试卷的评价指标.

第二部分

2018 年数学考试分析

一、总体评价

2018 年全国硕士研究生招生考试的数学(一)、数学(二)、数学(三)试卷严格依据教育部颁布的《2018 年全国硕士研究生招生考试数学考试大纲》命制,没有超纲试题.三套试卷中均无科学性问题,每道试题所给条件准确、充分,所求或所证的结论清楚、没有歧义,题目用语简洁、规范.参考答案科学、合理,给出的都是一般解法,解答过程简洁完整,解题步骤书写规范.试卷中无偏题、怪题和技巧性很强的题目,每套试卷所考查的内容都是各门课程考生应知应会的重点.三套试卷难度设置合理,都具有较好的区分度,体现了选拔性考试的特点,有利于不同水平学校的招生.

1. 考查基础知识

2018 年三套试卷考查的均是各门考试课程的基础知识和主干内容,考查的都是核心概念、基本理论和常规方法.

在高等数学课程中,考查的主要内容有:

(1) 极限与连续

数学(一)的第 9 题与第 19 题考查的是极限求值和判断极限是否存在的问题;数学(二)的第 1 题和第 9 题考查的是极限求值问题,第 3 题考查的是连续概念问题;数学(三)的第 15 题考查的是极限运算问题.

(2) 导数与微分的概念、运算及应用

数学(一)的第 1 题、第 10 题和第 19 题分别考查了可导的概念、导数的几何意义和利用导数研究函数的问题;数学(二)的第 4 题、第 10 题、第 12 题、第 16 题、第 18 题、第 20 题,主要考查的是导数的运算、导数的几何意义、导数的物理意义、利用导数研究函数的性质等问题;数学(三)的第 4 题、第 12 题考查的是导数在经济学中的应用和微分的概念.

(3) 一元函数积分学

数学(一)的第 4 题、第 10 题、第 15 题,考查的是定积分的性质、定积分和不定积分的基本积分方法;数学(二)的第 11 题、第 16 题、第 20 题,考查的是反常积分的求值、定积分的换元积分法、变限定积分求导、定积分的几何应用等问题.

(4) 多元函数微分学

数学(一)的第 2 题、第 11 题、第 16 题分别考查了偏导数的几何应用、向量场的旋度、多元函数的极值等问题;数学(二)的第 13 题考查了偏导数的运算问题.

(5) 重积分、曲线积分与曲面积分

数学(一)的第12题、第17题分别考查了第一型曲线积分和第二型曲面积分的计算问题;数学(二)的第6题、第17题和数学(三)的第16题,考查的是二重积分的计算问题.

(6) 无穷级数

数学(一)的第3题考查的是简单数项级数求和问题;数学(三)的第18题考查的是简单函数的麦克劳林级数展开与级数相等问题.

(7) 微分方程

数学(一)的第18题考查的是微分方程求解和研究微分方程解的性质问题;数学(二)的第16题、数学(三)的第12题考查的是微分方程的应用和求解问题;数学(三)的第11题考查的是差分方程求解问题.

在线性代数课程中,三套试卷题目基本相同,考查的主要内容有:数学(一)的第5题、第6题、第13题,考查了相似矩阵的概念和性质、矩阵秩的性质、矩阵的特征值和特征向量的概念、行列式与特征值的关系;数学(一)的第20题考查了线性方程组的求解和化二次型为规范形等问题,第21题考查了矩阵初等变换的性质、矩阵方程的求解等问题.

在概率统计课程中,数学(一)与数学(三)只有一道选择题不同,主要考查了随机事件概率的计算(数学(一)第7题、第14题)、假设检验(数学(一)第8题)、随机变量的概率分布(数学(三)第8题)、二元随机变量(数学(一)第22题)和最大似然估计(数学(一)第23题).

2. 突出能力立意

2018年的三套试卷在考查基本内容的基础上,坚持能力立意的命题思想,注重学科内容的内在联系和综合运用.如数学(一)的第12题、第18题、第19题,数学(二)的第4题、第17题、第20题,数学(三)的第11题、第18题等,这些试题都体现了对考生能力的较高要求.关于数学(三)试卷中的第11题“差分方程 $\Delta^2 y_x - y_x = 5$ 的通解为_____”,利用差分定义,本题可将 $\Delta^2 y_x - y_x = 5$ 转化为 $y_{x+2} - 2y_{x+1} = 5$ 进行求解,综合考查了差分方程的概念和一阶差分方程的求解方法,符合大纲中对差分方程的内容要求.

3. 强调重点内容

2018年的三套试卷都涵盖了相应考试要求的绝大部分内容,并做到了重点内容重点考查,如高等数学中连续函数的概念和性质,导数的运算和应用,定积分的性质、计算和应用;线性代数中的矩阵运算,线性方程组的求解,相似矩阵,二次型;概率统计中的概率分布,假设检验,概率密度,最大似然估计等内容都得到了考查.

二、 统计数据分析

1. 难度分析

2018年数学各卷种的抽样统计数据见表1.从表中可以看出,三套试卷的难度稍高,数学(一)、数学(二)、数学(三)整卷难度分别为0.434、0.401和0.417,与2017年相比难度有所提高.各卷种难度均符合选拔性考试的要求,有利于不同类型的院校选拔不同层次的考生.在每份试卷中,大多数试题都属于中等难度的试题,对于能力要求较高的题目,在设问上也做了处理,采取分步设问的方法,为考生答题铺设了台阶.

从表2各卷种在三种题型上的平均难度值可以看出,各卷种三种题型的平均难度值均在中等难度范围之内.为体现不同题型的不同考查功能,各题型的难度也有所差别,选择题较容易,填

空题次之,解答题难度相对较高.选择题主要考查考生对数学概念、数学性质的理解,要求考生能进行简单的推理、判定、计算和比较;填空题主要考查基本概念、基本理论、基本方法以及重要性质,一般来说计算不会过于复杂,以中、低难度的试题为主;解答题在考查基本知识的基础上,着重考查考生的计算、逻辑推理和综合运用等能力.试题的排列体现了一定的坡度,能力要求逐渐增高,试题难度逐步增大.

表 1 2018 年数学各卷种抽样统计数据

卷种	样本量	平均分	难度	标准差	α 信度
数学(一)	104 797	65.13	0.434	29.16	0.887 1
数学(二)	137 200	60.08	0.401	27.29	0.863 9
数学(三)	87 311	61.07	0.407	29.96	0.884 9

表 2 2018 年数学各卷种三种题型的难度值

卷种	选择题难度	填空题难度	解答题难度
数学(一)	0.513	0.433	0.408
数学(二)	0.531	0.531	0.323
数学(三)	0.502	0.384	0.381

2. 区分度分析

2018 年数学各卷种的区分度分布见表 3.从表中可以看出,数学(一)区分度在 0.2 以下的试题有 2 道,区分度在 0.2~0.3 的试题有 2 道;数学(二)区分度在 0.2 以下的试题有 1 道,区分度在 0.2~0.3 的试题有 1 道;数学(三)区分度在 0.2 以下的试题有 1 道,区分度在 0.2~0.3 的试题有 2 道.数学(一)有 89.4%,数学(二)有 94.6%,数学(三)有 92%的试题均达到 0.3 以上的良好水平.从图 1 至图 3 的考生分数分布直方图可以看出,三套试卷的考生分数都呈正态分布.根据表 1 的统计数据,各卷种的标准差都在 28 左右,说明各卷种对考生的区分良好,有利于高等院校选拔新生.

表 3 2018 年数学各卷种区分度分布表

卷种	0.2 以下	0.2~0.3	0.3 以上
数学(一)	5.3%	5.3%	89.4%
数学(二)	2.7%	2.7%	94.6%
数学(三)	2.7%	5.3%	92%

三、思考与建议

从数据统计结果来看,2018 年三套试卷的总体难度都高于 2017 年,是近几年得分率较低的一次.尽管这种难度能把不同水平的考生区分开,也不影响招生单位的选拔,但从考生的答题情况看,还是有些现象值得关注.

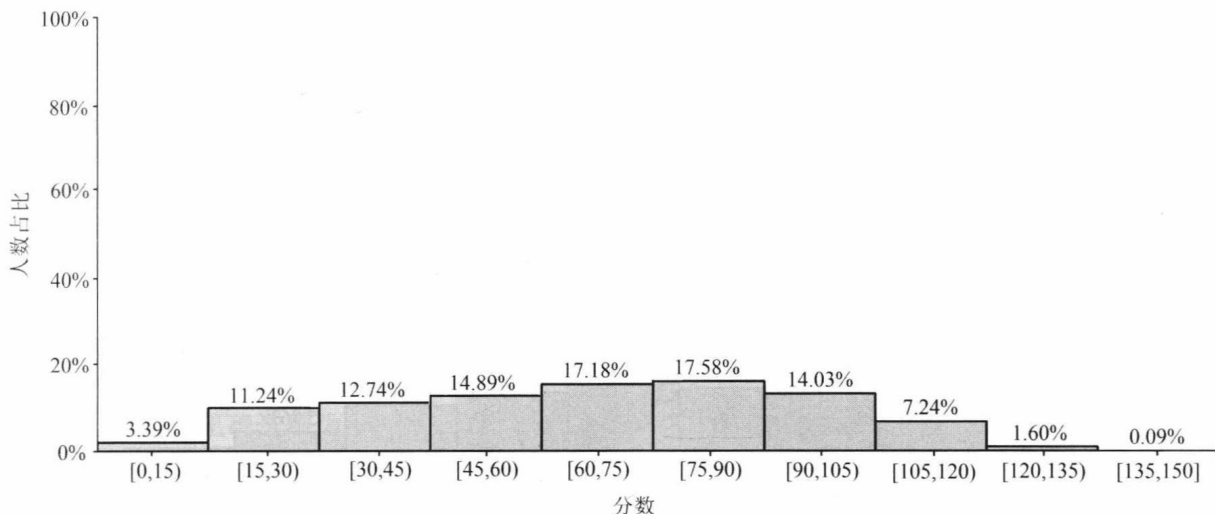


图1 数学(一)考生分数分布直方图

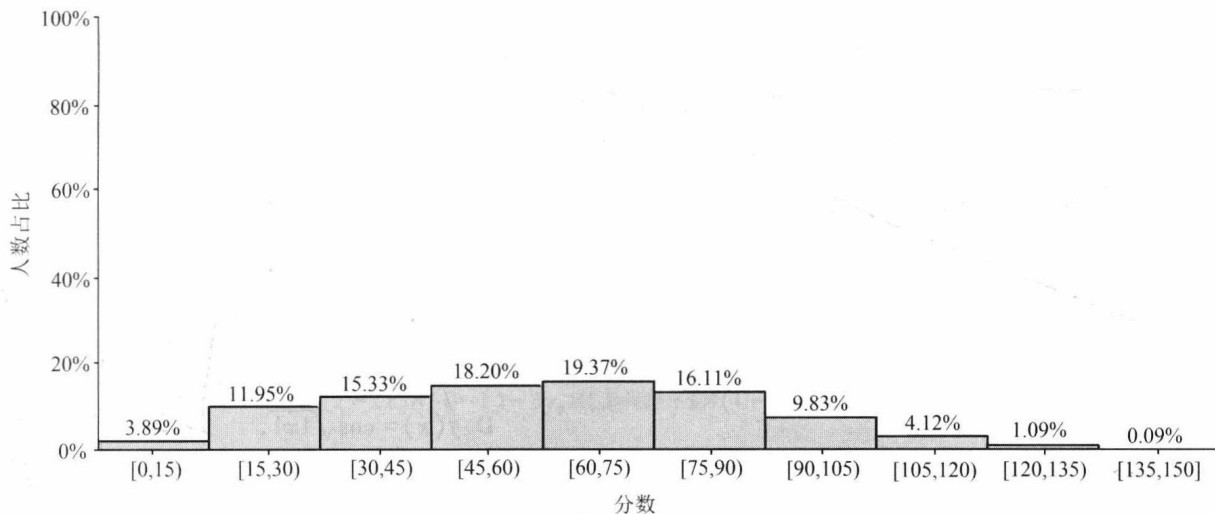


图2 数学(二)考生分数分布直方图

(1) 2018年试题难度偏高,整体得分率较低,而且不同试卷的考生水平差别明显.数学(二)与数学(一)有5道相同的解答题,数学(二)的得分率均低于数学(一),有的差距还较大.即使与数学(三)的考生相比,数学(二)的考生在相同题目上的得分率也较低.数学(三)的考生在相同题目上的得分率也低于数学(一)的考生.

(2) 从考试结果反映出部分考生的基础还不够扎实,对应考科目的基本内容理解得不到位,对于课程的基本思想方法并没有掌握,只是掌握了一些题型和解题套路.这主要体现在试卷中的题目只要是常见的类型,无论计算量大小,大部分考生都能解答,而且得分率也比较高;但只要不是常规的题目,很多考生就无法解答.因此,考生在学习与复习中要进一步加强对概念的理解,加强对基础知识和基本原理的掌握.

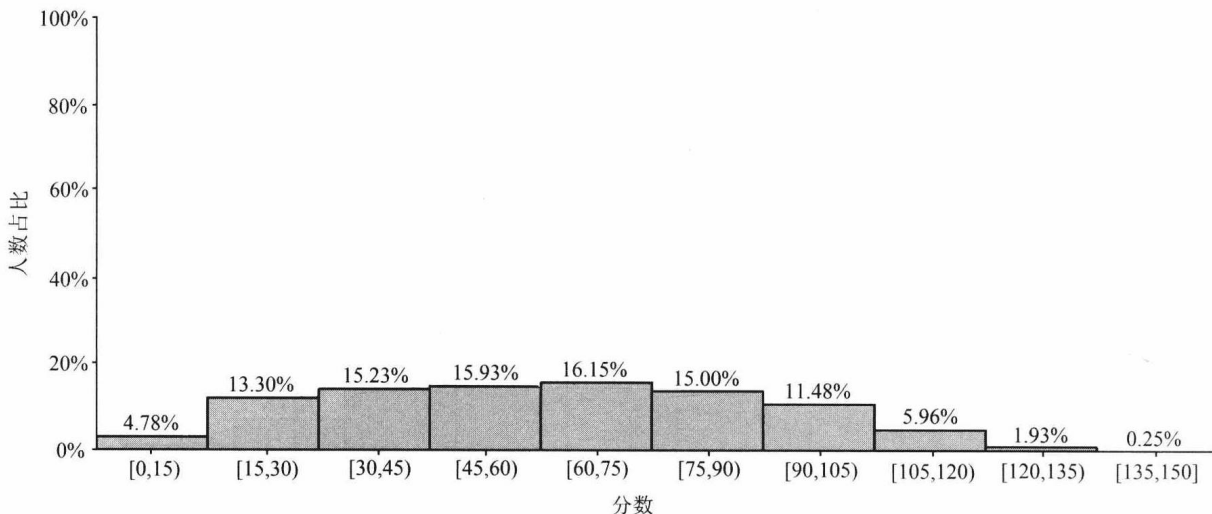


图3 数学(三)考生分数分布直方图

(3) 应进一步加强对学科主干知识的考查,围绕学科主干内容,加强对基本概念、基本思想方法的考查.对于数学基础知识的考查,要求既要全面,又要突出重点、注意层次.重点知识是支撑学科知识体系的主干内容,考查时要保持较高的比例,达到必要的深度.此外,应创新试题设计,摆脱已有复习资料的套路,引导考生关注数学本质,重视主干知识.

四、数学(一)试题分析

1. 选择题

(1) 下列函数中,在 $x=0$ 处不可导的是

A. $f(x) = |x| \sin |x|$.

B. $f(x) = |x| \sin \sqrt{|x|}$.

C. $f(x) = \cos |x|$.

D. $f(x) = \cos \sqrt{|x|}$.

【答】 应选 D.

【分析】 本题考查一元函数的导数定义,考查极限的性质和运算,如等价无穷小量代换、有界变量与无穷小量的乘积仍是无穷小量等,是一道考查基本概念和简单运算的试题.

【解】 由导数定义可知 $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$, 所以本题就是看极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ 是否存在.

当 $f(x) = |x| \sin |x|$ 时,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| \sin |x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0;$$

当 $f(x) = |x| \sin \sqrt{|x|}$ 时,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| \sin \sqrt{|x|}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} \sqrt{|x|} = 0;$$

当 $f(x) = \cos|x|$ 时,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos|x| - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-|x|^2}{2x} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2} = 0;$$

当 $f(x) = \cos\sqrt{|x|}$ 时,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos\sqrt{|x|} - 1}{x} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{|x|})^2}{2x} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{2x},$$

又极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ 不存在, 所以 $f(x) = \cos\sqrt{|x|}$ 在 $x=0$ 处不可导.

综上所述, 正确选项为 D.

本题难度值为 0.442, 区分度为 0.431.

(2) 过点 $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, 且与曲面 $z = x^2 + y^2$ 相切的平面为

A. $z=0$ 与 $x+y-z=1$.

B. $z=0$ 与 $2x+2y-z=2$.

C. $x=y$ 与 $x+y-z=1$.

D. $x=y$ 与 $2x+2y-z=2$.

【答】 应选 B.

【分析】 本题考查多元微分学的几何应用, 即求曲面的法向量, 考查空间解析几何中的平面方程和偏导数的运算, 是一道考查基本运算的试题.

【解】 设切点为 (x_0, y_0, z_0) , 其中 $z_0 = x_0^2 + y_0^2$, 则法向量为

$$\left(\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)}, \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)}, 1 \right) = (-2x_0, -2y_0, 1).$$

由题设可知

$$\begin{cases} z_0 = x_0^2 + y_0^2, \\ -2x_0 \times (0-1) - 2y_0 \times (1-0) + 1 \times (0-0) = 0, \\ -2x_0 \times (x_0-1) - 2y_0 \times (y_0-0) + 1 \times (z_0-0) = 0, \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x_0 = 0, \\ y_0 = 0, \\ z_0 = 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_0 = 1, \\ y_0 = 1, \\ z_0 = 2, \end{cases}$$

所以要求的切平面方程是

$$z=0 \text{ 或 } -2(x-1) - 2(y-1) + z - 2 = 0,$$

即

$$z=0 \text{ 或 } 2x+2y-z=2.$$

故正确选项为 B.

本题难度值为 0.581, 区分度为 0.279.

$$(3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+3}{(2n+1)!} =$$

- A. $\sin 1 + \cos 1$.
C. $2\sin 1 + 2\cos 1$.

- B. $2\sin 1 + \cos 1$.
D. $2\sin 1 + 3\cos 1$.

【答】 应选 B.

【分析】 本题考查数项级数的性质,考查正弦函数和余弦函数的麦克劳林级数,是一道考查基本运算的试题.

【解】 因为

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+3}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{(2n+1)!},$$

且

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

所以
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+3}{(2n+1)!} = \cos 1 + 2\sin 1.$$

故正确选项为 B.

本题难度值为 0.720, 区分度为 0.438.

(4) 设 $M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+x)^2}{1+x^2} dx$, $N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+x}{e^x} dx$, $K = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sqrt{\cos x}) dx$, 则

- A. $M > N > K$.
C. $K > M > N$.
- B. $M > K > N$.
D. $K > N > M$.

【答】 应选 C.

【分析】 本题考查定积分的性质,如比较定理、奇函数在关于原点对称区间上的积分值为零等,考查凹曲线与其切线的位置关系,是一道简单综合试题.

【解】 因为 $\frac{2x}{1+x^2}$ 是奇函数,所以

$$M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+x)^2}{1+x^2} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{2x}{1+x^2} \right) dx = \pi.$$

当 $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ 时, $\sqrt{\cos x} \geq 0$ 且不恒等于零,所以 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x} dx > 0$, 从而

$$K = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sqrt{\cos x}) dx = \pi + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x} dx > \pi.$$

因为曲线 $y = e^x$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内是凹的,所以该曲线在它切线的上方. 又因为直线 $y = x+1$ 是曲线 $y = e^x$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线,所以 $e^x \geq x+1$, 即 $\frac{1+x}{e^x} \leq 1$ 且不恒等于 1, 故

$$N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+x}{e^x} dx < \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \pi.$$