Theory for EIV Model Parameter Estimation and
Its Applications in Surveying and Mapping Data Processing



EIV模型参数估计理论与其在测绘数据处理中的应用

陶叶青/著

EIV

科学出版社

EIV 模型参数估计理论与其在测绘数据处理中的应用

陶叶青　著

科 学 出 版 社

北　京

内 容 简 介

本书阐述能够顾及模型随机性质的 EIV 模型参数估计理论，重点对有粗差的 EIV 模型参数估计、不适定 EIV 模型的正则化、附有约束条件的 EIV 模型参数估计等理论进行论述，并结合测绘数据处理中的典型算例讨论经典模型参数估计理论与 EIV 模型参数估计理论在解决不同测绘数据处理问题上的差异，力图将 EIV 模型参数估计理论的创新研究成果与其在测绘数据处理中的应用呈现给读者。

本书适用于从事测量平差与测绘数据处理研究工作的研究人员和测绘科学与技术类专业学生使用，同时也可供相关从业人员作为参考资料使用。

图书在版编目（CIP）数据

EIV 模型参数估计理论与其在测绘数据处理中的应用 / 陶叶青著. —北京：科学出版社，2019.9

ISBN 978-7-03-062319-5

Ⅰ. ①E… Ⅱ. ①陶… Ⅲ. ①线性模型–参数估计–应用–测绘–数据处理–研究 Ⅳ. ①O212 ②P208

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2019）第 198551 号

责任编辑：王 倩 / 责任校对：樊雅琼

责任印制：吴兆东 / 封面设计：无极书装

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京虎彩文化传播有限责任公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2019 年 9 月第 一 版 开本：787×1092 1/16

2019 年 9 月第一次印刷 印张：8 3/4

字数：260 000

定价：148.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　言

测绘数据处理理论与观测技术的发展使得空间信息获取的方法发生改变，随着信息科学理论与技术的变革，传统作业手段与数据处理方法已经不能满足人们对高精度空间信息获取的需求。为获得精确、可靠的地理空间数据，空间信息技术被广泛应用在测绘数据获取中，测绘数据的采集与处理方法随着信息技术的应用而发生改变。但是，测绘数据处理的理论与方法仍然以传统数据处理方法为基础，这并不符合测绘数据处理模型的实际特征，也不能满足数据处理的实际要求。

以最小二乘准则（least squares criterion，LS）与高斯-马尔可夫模型（Gauss-Markov model，G-M）为例，传统测绘数据处理方法是在最小二乘准则下建立高斯-马尔可夫模型，获得参数的估值，并对其精度进行评定。传统应用最小二乘准则建立测绘数据处理模型的方法是对模型的观测向量中含有的误差附加约束，但是，在大地测量反演、沉降区变形监测、滑坡体监测、外方位元素解算、坐标系统转换等测绘数据处理中，模型系数矩阵中的元素也是由观测数据或者观测数据的函数组成的，此时，不仅模型的观测向量中含有误差，其系数矩阵中也不可避免地含有误差。此类模型参数估计问题称为变量中含有误差（errors-in-variables，EIV）的模型参数估计，测绘数据处理中广泛存在 EIV 模型参数估计问题。由于传统的最小二乘算法无法顾及观测向量与系数矩阵中同时含有误差的 EIV 模型参数估计问题，参数的最小二乘解不再具有最优、无偏的统计特性。为同时实现对模型的观测向量与系数矩阵中含有的误差进行最小化约束，最小二乘准则被拓展为总体最小二乘准则（total least squares criterion，TLS）。总体最小二乘准则能够解决测绘数据处理中存在的 EIV 模型参数估计问题，在测绘数据处理中引起广泛关注。

目前，应用较为广泛的 EIV 模型参数估计算法有奇异值分解算法与基于极值函数的迭代算法。基于奇异值分解的参数估计算法无法顾及 EIV 模型的随机性质，算法获得的参数估值是基于数值逼近理论的总体最小二乘解，并不是具有统计意义的总体最小二乘解。在测绘数据处理中，普遍存在观测数据精度不等的情况，基于数值逼近理论的 EIV 模型参数估计算法无法获得具有统计意义的模型参数的最佳估值。鉴于此，本书重点阐述能够顾及模型随机性质的 EIV 模型参数估计理论，并对含有粗差的 EIV 模型参数估计、不适定 EIV 模型的正则化、附有约束条件的 EIV 模型参数估计等理论进行论述，并结合测绘数据处理中的典型算例讨论经典模型参数估计理论与 EIV 模型参数估计理论在解决不同测绘数据处理问题上的差异，力图将 EIV 模型参数估计理论与其在测绘数据处理中的应用呈现给读者。

本书是作者专业学习与研究工作的积累，在此基础上，结合作者在应用 EIV 模型参数估计理论探讨测绘数据处理等方面的工作，对 EIV 模型参数估计理论进行了梳理与总

结。本书将经典模型参数估计理论中存在的参数估计与精度评定、含有粗差的模型参数估计、不适定模型的正则化、附有约束条件的模型参数估计等问题系统地引入 EIV 模型参数估计理论中探讨，对经典模型参数估计理论与 EIV 模型参数估计理论之间的联系、差异，以及现有应用解决经典模型参数估计问题的相关思路解决 EIV 模型参数估计问题的方法进行讨论，并就其存在的不足，阐述作者的拙见。

感谢作者的博士生导师高井祥教授的培养，让作者具备较为完整的测绘数据处理理论基础，从而能跟得上 EIV 模型参数估计理论日新月异的发展。同时，作者关于 EIV 模型参数估计理论的拙见得到行业专家的肯定，相关研究工作相继得到国家自然科学基金项目“矿区测绘数据三类 EIV 模型的总体最小二乘理论研究”（41601501）、江苏省高校自然科学基金项目“含有粗差的测绘数据 EIV 模型参数估计理论研究”（16KJD420001）的资助，在此谨表谢意。本书的出版得到作者的工作单位淮阴师范学院的支持，感谢之情也记于此。EIV 模型参数估计理论丰富的研究成果为作者开展相关理论研究奠定了基础，虽然与国内外相关专家、学者素未谋面，但是他们纯粹的学术思想深深影响着作者，希望在本书出版后能够得到他们的指正，更希望广大读者提出宝贵意见。

陶叶青

2019 年 7 月

目　录

前言
第 1 章　绪论 1
1.1　研究现状 1
1.2　内容安排 4
第 2 章　测量平差模型与理论 6
2.1　数据处理模型 6
2.2　几种典型测绘数据处理模型 8
2.3　数据处理模型的讨论 13
第 3 章　EIV 模型与其参数估计算法 21
3.1　EIV 模型 21
3.2　模型参数的估计算法 23
3.3　EIV 模型在测绘数据处理中的应用 31
第 4 章　含有粗差的 EIV 模型参数估计理论 41
4.1　粗差与其处理方法 41
4.2　含有粗差的 EIV 模型参数估计算法 49
4.3　抗差估计理论在测绘数据处理中的应用 59
第 5 章　不适定 EIV 模型与其正则化理论 72
5.1　不适定模型 72
5.2　不适定 EIV 模型的正则化算法 79
5.3　正则化算法在测绘数据处理中的应用 85
第 6 章　附有约束条件 EIV 模型的参数估计理论 99
6.1　附有不等式约束的平差模型 99
6.2　附有约束条件模型的参数估计算法 103
6.3　附有约束条件模型在测绘数据处理中的应用 114
第 7 章　EIV 模型参数估计理论研究展望 128
参考文献 131

第1章 绪 论

1.1 研 究 现 状

变量中含有误差（errors-in-variables，EIV）的模型参数估计理论是指观测方程的观测向量与系数矩阵中的元素同时含有观测误差的情况下，获得模型参数的最优无偏估值，并对参数的估值进行精度评定。在大地测量反演、沉降区变形监测、滑坡体监测、外方位元素解算、坐标系统转换等测绘数据处理中，广泛存在 EIV 模型参数估计问题。由于传统的最小二乘算法无法顾及观测向量与系数矩阵中同时含有误差的 EIV 模型参数估计问题，参数的最小二乘解不再具有最优、无偏的统计特性。为同时实现对模型的观测向量与系数矩阵中含有的误差进行最小化约束，研究人员提出将 EIV 模型的观测向量与系数矩阵中含有的残差的平方和最小作为数据处理准则（Golub and Van Loan，1980），称为总体最小二乘准则（total least squares criterion，TLS）。总体最小二乘准则能够解决测绘数据处理中存在的 EIV 模型参数估计问题，在测绘数据处理中引起了广泛关注与应用。

Pearson（1901）基于正交回归的估计思想推导出 EIV 模型的总体最小二乘解，并证明总体最小二乘解等价于最小特征向量（Pearson 算法）；Golub 和 Van Loan（1980）基于奇异值分解（singular value decomposition，SVD）算法推导出 EIV 模型的总体最小二乘解，随后，基于 EIV 模型的参数估计在较多的专业领域得到广泛应用。同时，基于 SVD 算法的 EIV 模型算法被进一步讨论，Van Huffel 和 Vandewalle（1988）首先对模型的系数矩阵进行正交三角分解，然后进行 SVD 算法，以解决广义总体最小二乘准则下的参数估计问题；并采用对解空间附加约束的方法得到更适用的 SVD 算法；此外，Van Huffel 和 Vandewalle（1989）还从代数学角度研究了总体最小二乘准则（total least squares criterion，TLS）和最小二乘准则（least squares criterion，LS）的参数解、残差、改正数之间的关系，并研究 TLS 问题的统计特性，得到当观测值独立等精度时，LS 有偏、TLS 无偏的结论。

随着 EIV 模型参数估计算法的成熟，近 20 年来，其被应用在信号处理、化学工程、运动分析、图像处理等专业领域。但是，基于 Pearson 算法与 SVD 算法等的模型参数估计无法顾及 EIV 模型的随机性质，所获得的参数估值是基于数值逼近理论的总体最小二乘解，并不是具有统计意义的总体最小二乘解（刘经南等，2013）。在测绘数据处理中普遍存在观测数据精度不等的情况，基于数值逼近理论的 EIV 模型参数估计算法无法获得具有统计意义的模型参数最佳估值。这是基于数值逼近理论的 EIV 模型参数估计算法

在测绘数据处理中的应用受到限制的主要原因。

为顾及 EIV 模型的随机性质，建立适用于测绘数据处理的参数估计算法，Schaffrin 和 Wieser（2008）应用拉格朗日函数建立了加权总体最小二乘准则下的参数估计迭代算法，但是根据其建立的迭代算法获得的单位权方差是有偏的。Shen 等（2011）改进了总体最小二乘的拉格朗日算法，并建立了单位权方差无偏估计的迭代算法。鲁铁定和周世健（2010）根据极值函数建立了 EIV 模型的迭代算法，并在等精度条件下给出了模型参数的协方差矩阵。Schaffrin 和 Felus（2008）讨论了多维参数的总体最小二乘算法。Amiri-Simkooei（2013）应用最小二乘的方差分量估计建立了 EIV 模型的迭代算法，并给出了参数向量与系数矩阵的协因数矩阵求解方法。针对系数矩阵由观测元素的非线性函数组成的非线性总体最小二乘问题，胡川和陈义（2014）应用一阶泰勒级数将模型进行了线性化，并基于拉格朗日极值给出了模型参数的解。Xu 等（2014）从系数矩阵误差对参数估计影响的角度分析了 EIV 模型的性质，其关于系数矩阵误差纠正与模型参数估计两者之间关系的研究结论在宋迎春等（2015）的研究成果中得到了进一步验证。王乐洋等（2016）应用牛顿法建立了多元 EIV 模型参数估计算法。Fang（2015）应用非线性规划的 KKT（Karush-Kuhn-Tucher）条件建立了 EIV 模型参数估计算法，为研究 EIV 模型拓展了新的思路。在测绘数据处理中，应用自变量与因变量构建回归模型，其主要目的是进行未知因变量的推估。王苗苗和李博峰（2016）等通过定义观测点与公共点自变量间的协因数阵，以顾及观测点的自变量中含有的观测误差对其未知因变量推估的影响，并建立了模型回归与推估的封闭解析式。

应用能够顾及模型随机性质的加权总体最小二乘准则建立参数估计算法是解决测绘数据处理中存在 EIV 模型参数估计问题的有效方法，也是目前针对 EIV 模型的主要研究方向。在讨论加权总体最小二乘算法的同时，研究人员将经典测量平差模型中存在的不适定模型的正则化、抗差估计、附有约束条件的参数估计等问题系统性地引入 EIV 模型中进行讨论。

在测绘数据处理中，不适定模型主要分为病态模型与秩亏模型。目前，解决病态模型问题的普遍思路是应用 Tikhonov 正则化函数实现模型的正则化。从数理统计理论的角度看，EIV 模型的总体最小二乘算法是一个降正则化的过程，这一过程对应用正则化函数实现病态模型的正则化有什么影响尚缺乏研究。同时，研究人员对观测数据中含有粗差的 EIV 模型抗差估计理论进行了讨论。Schaffrin 和 Uzun（2011）将 EIV 模型中的粗差纳入平差模型的函数模型中，应用统计函数对含有粗差的观测值进行识别；EIV 模型抗差估计更普遍的算法是将粗差纳入平差模型的随机模型中，应用等价权函数对含有粗差的观测值进行调节。此外，原有测绘数据与资料的积累、观测对象本身具有的形变信息特征等方面因素的存在，使得在对测绘数据进行处理时，具有有效的先验信息可以应用。应用已有的先验信息，建立具有一定约束条件的数据处理模型是提高数据处理精度的有效途径。研究人员对附有约束条件的 EIV 模型参数估计算法进行了讨论。为增加 EIV 模型参数估计的稳定性，Schaffrin（2006）应用拉格朗日函数建立了附有等式约束的 EIV 模型参数估计迭代算法，并对附有线性约束与二次约束的 EIV 模型进行了讨论

（Schaffrin and Felus，2009；Mahboub et al.，2013）。Mahboub 等（2013）指出附有约束条件的参数估计算法具有正则化的性质，这样的结论在王乐洋和于冬冬（2014）的研究实验中得到了进一步验证，但是关于性质的理论依据缺乏进一步的研究。当约束条件为不等式时，Zhang 等（2013）应用有效约束与无效约束的思想，将不等式约束转化为等式约束，并应用穷举法建立了附有不等式约束的总体最小二乘算法。同时，Xu 等（2014）、Xu（2016）分析了系数矩阵误差对最小二乘估计的影响，讨论了 EIV 模型对参数估计、协方差矩阵、单位权中误差的影响，给出了应用最小二乘准则求解 EIV 模型单位权中误差的无偏估计算法；宋迎春等（2015）分析了测绘数据的不确定性对参数估计的影响，认为应用总体最小二乘准则会使得观测向量中的不确定性向系数矩阵转移。

EIV 模型的不适定性、抗差估计、附有约束条件的参数估计等取得了一定的研究成果，其算法的普遍思路是将经典最小二乘算法下的相关理论直接应用至 EIV 模型参数估计。应用经典理论解决 EIV 模型的不适定性、抗差估计、附有约束条件的参数估计的优点是理论基础成熟、算法容易实现，但现有研究成果也存在一定的不足，如在总体最小二乘算法具有的降正则化性质对 Tikhonov 正则化函数的影响缺乏研究的情况下，直接应用经典模型算法实现不适定 EIV 模型的正则化的算法的有效性与通用性值得商榷；相关研究表明，基于等价权函数的抗差总体最小二乘算法至少存在两个方面的缺陷（陶叶青等，2016）：①EIV 模型的系数矩阵中的元素与观测向量中的元素精度不等，统一根据单位权中误差确定它们的等价权函数的阈值不合理；②应用总体最小二乘理论进行参数估计时，随机模型存在误差，通过调节观测值的权值实现抗差性，会放大随机模型误差对算法的影响。此外，现有研究成果还缺乏对秩亏总体最小二乘等 EIV 模型相关理论进行的针对性阐述。本书对加权总体最小二乘准则下建立 EIV 模型中存在的不适定性、抗差估计、附有约束条件的 EIV 模型参数估计进行论述。

加权总体最小二乘准则建立的 EIV 模型参数估计算法能够顾及模型的随机性质，在测绘数据处理中被广泛应用。王乐洋等（2010）应用 EIV 模型建立了大地测绘数据反演地壳应变参数的方法，实验结果表明，总体最小二乘获得的单位权中误差小于最小二乘。陈义和陆珏（2012）、Lu 等（2014）、Tao 等（2014）应用总体最小二乘抗差算法讨论了空间三维坐标转换与高程异常拟合问题，值得注意的是，上述研究成果是以观测向量与系数矩阵中的观测元素为相同精度量级为前提，讨论模型的抗差估计问题。Fang（2015）应用附有等式约束的 EIV 模型讨论了二维坐标与三维坐标的转换。Schaffrin 和 Wieser（2008）的研究结果表明，应用总体最小二乘算法获得的模型参数的精度比应用最小二乘算法获得的精度高 30%左右。王乐洋和于冬冬（2014）讨论了测边控制网的病态总体最小二乘问题，并应用先验信息建立约束方程的算法获得了测边控制网模型的解，算例的结果同时验证了 Mahboub 等（2013）提出的观点，即附有约束条件的 EIV 模型参数估计算法具有正则化的性质。同时，EIV 模型被应用在空间后方交会、基于角度和时差信息的无源定位、GPS 快速定位、水准测量、直线拟合等测绘数据处理中。Neitzel（2010）应用 EIV 模型比较研究加权与等权条件下的平面坐标转换问题。

EIV 模型在测绘数据处理中的应用多以一般性的模型参数估计为应用对象，而针对

加权条件下的正则化、抗差估计、附有约束条件的参数估计等方面的应用成果并不多见。本书以测绘数据为研究对象，应用 EIV 模型理论讨论测绘数据处理中存在的不适定模型的正则化、抗差估计、附有约束条件的 EIV 模型参数估计等问题。

1.2 内 容 安 排

本书围绕 EIV 模型的参数估计理论展开，重点讨论能够顾及模型随机性质的加权总体最小二乘算法，在此基础上，阐述含有粗差的模型参数估计、不适定模型的正则化、附有约束条件模型的参数估计理论，与相关理论在测绘数据处理中的应用。本书首先对测绘数据处理中经典模型与典型问题进行论述，作为讨论 EIV 模型参数估计理论的铺垫。结构安排如下。

1）第 2 章讨论测量平差模型与理论。阐述高斯-马尔可夫模型（Gauss-Markov model，G-M）与高斯-赫尔默特模型（Gauss-Helmert Model，G-H），并给出测绘数据处理中经常涉及的几个数据处理模型，在此基础上，讨论模型的线性化、拟合模型的显著性检验、随机模型误差的影响、随机模型的验后估计等问题。同时讨论系数矩阵误差对模型参数估计的扰动性影响，并对 EIV 模型在测绘数据处理中的适用性进行分析。

2）第 3 章讨论 EIV 模型与其参数估计算法。介绍 EIV 模型的数学表达与模型的几何意义，并比较它与传统高斯-马尔可夫模型的区别，介绍 EIV 模型参数估计的常用算法：基于奇异值分解算法、基于极值函数改进算法、基于拉格朗日函数迭代算法以及基于非线性函数的参数估计算法，讨论 EIV 模型单位权方差的无偏估计与其迭代算法。列举不同 EIV 模型参数估计算法在高程异常拟合、坐标相似变换、三维激光扫描标靶拟合中的应用，并归纳相关结论。

3）第 4 章讨论含有粗差的 EIV 模型参数估计理论。以经典平差模型为例，分别从粗差的识别与调节两个角度讨论粗差的处理问题，比较 EIV 模型与经典平差模型在粗差处理方面的差异，并分别以基于数理统计函数的 EIV 模型粗差识别理论与基于等价权函数的 EIV 模型抗差估计理论讨论含有粗差的 EIV 模型参数估计。针对 EIV 模型的特征，分类确定模型系数矩阵与观测向量的权函数，应用中位数建立 EIV 模型的抗差估计算法。采用直线拟合、平面坐标相似变换、外方位元素解算验证 EIV 模型抗差估计算法在测绘数据处理中的应用，并归纳相关结论。

4）第 5 章讨论不适定 EIV 模型与其正则化理论。从测绘数据处理的角度将不适定模型分为秩亏模型与病态模型，并讨论经典平差模型中秩亏模型与病态模型的正则化方法，分析病态 EIV 模型的正则化与 Tikhonov 函数之间的关系。应用经典平差模型的岭估计算法和秩亏模型参数估计算法讨论病态 EIV 模型与秩亏 EIV 模型的正则化及其改进算法。根据 EIV 模型奇异值分解的参数估计算法，讨论 EIV 模型参数估计算法具有的降正则化性质。采用测边网平差、三维坐标转换等讨论不适定 EIV 模型的正则化算法在测绘数据处理中的应用，并归纳相关结论。

5）第 6 章讨论附有约束条件 EIV 模型的参数估计理论。以附有约束条件的经典平

差模型为例，讨论附有约束条件模型具有的几何意义，约束条件对参数估值的影响，给出包括附有约束条件模型的统一平差模型。讨论当约束条件分别为等式约束与不等式约束时，EIV 模型的参数估计算法。根据约束条件具有的正则化性质，建立附有不等式约束的病态 EIV 模型分步正则化算法。采用地表沉降监测、导线网平差、光束法区域网平差讨论附有约束条件的 EIV 模型参数估计算法在测绘数据处理中的应用，并归纳相关结论。

6）第 7 章对 EIV 模型参数估计理论的研究方向做进一步归纳与总结。

第 2 章　测量平差模型与理论

2.1　数据处理模型

2.1.1　高斯-马尔可夫模型

测绘数据处理的主要任务是应用一定的数学模型求解模型参数估值，并对其精度进行评定。为获得最优、无偏、唯一的参数估值，需要附加估计准则。以线性模型的参数估计为例，其高斯-马尔可夫模型的函数模型与随机模型为

$$\begin{cases} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{l} \\ \boldsymbol{v} \sim N(0, \sigma_0^2 \boldsymbol{P}^{-1}) \end{cases} \tag{2.1}$$

式中，$\boldsymbol{v}$ 为观测向量 $\boldsymbol{l}$ 中含有的观测误差；$\boldsymbol{B}$ 为模型的系数矩阵；$\boldsymbol{x}$ 为模型的参数向量；σ_0^2 为单位权方差；$\boldsymbol{P}$ 为观测误差的权矩阵。

为求解待定的模型参数，需要对空间目标进行观测，受诸多观测因素的影响，观测值不可避免地会含有误差。为减小观测值中含有的误差对参数估值的影响，获得稳定可靠的数据处理结果，并对参数估值的精度进行评定，在对空间目标进行观测时，观测数会大于求解模型参数的必要观测数，即存在多余观测量。当存在多余观测量时，建立的函数模型中观测方程的个数大于待定的模型参数的个数，方程超定，无法获得参数的唯一解，此时必须对平差模型附加约束准则。在测绘数据处理中，常用的约束准则有极大似然准则、极大验后准则、最小方差准则和最小二乘准则。以最小二乘准则为例：

$$\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P} \boldsymbol{v} = \min \tag{2.2}$$

可见，最小二乘准则是以模型中的误差向量加权平方和最小为约束条件。最小二乘估计准则要求观测向量的误差向量加权平方和达到最小，为满足这样的极值条件，对函数模型中关于变量 $\boldsymbol{x}$ 求偏导数，并令其等于 0，得

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P} \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{x}} = 2\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P} \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{x}} = \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P} \boldsymbol{B} = 0 \tag{2.3}$$

对式（2.3）求转置，并将函数模型 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{l}$ 代入，得

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P} \boldsymbol{B} \boldsymbol{x} - \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P} \boldsymbol{l} = 0 \tag{2.4}$$

对式（2.4）继续求导数，得到函数 $\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P} \boldsymbol{v}$ 的二阶偏导数恒大于 0，因此，根据式（2.3）得到的参数估值为极小值。由式（2.3）得到参数向量 $\boldsymbol{x}$ 的估值为

$$\hat{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P} \boldsymbol{B})^{-1} \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P} \boldsymbol{l} \tag{2.5}$$

单位权方差 σ_0^2 的估值为

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{v}}{r} \tag{2.6}$$

式中，r 为多余观测量。由协方差传播定律得到参数估值的协方差矩阵为

$$\boldsymbol{D}(\hat{\boldsymbol{x}}) \approx \hat{\sigma}_0^2(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{B})^{-1} \tag{2.7}$$

最小二乘准则是对高斯-马尔可夫模型的观测向量中含有的观测误差附加约束，以获得参数的最优、无偏估值。

2.1.2 高斯-赫尔默特模型

线性模型的参数估计可以建立高斯-马尔可夫模型进行求解，当模型为非线性时，需要对非线性模型进行线性化。通过高斯-赫尔默特模型可以建立非线性模型的参数估计算法。定义关于误差向量 $\boldsymbol{v}$ 与参数向量 $\boldsymbol{x}$ 的非线性函数为 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{x})=0$，其线性化形式为

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{x}) \approx \boldsymbol{C}^0(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0) + \boldsymbol{F}^0(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}^0) + \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{v}^0,\boldsymbol{x}^0) \tag{2.8}$$

式中，$\boldsymbol{v}^0$ 为误差向量的初值；$\boldsymbol{x}^0$ 为转换参数的初值；$\boldsymbol{C}^0 = \left.\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}}\right|_{\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{v}^0}$；$\boldsymbol{F}^0 = -\left.\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}}\right|_{\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{v}^0}$；$\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{v}^0,\boldsymbol{x}^0) = -\boldsymbol{F}^0(\boldsymbol{v}^0) + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{v}^0,\boldsymbol{x}^0)$。

根据观测方程 $\boldsymbol{C}^0(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0) + \boldsymbol{F}^0(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}^0) + \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{v}^0,\boldsymbol{x}^0) = 0$，应用拉格朗日乘数 $\boldsymbol{\lambda}$ 建立新的目标函数，为

$$\varphi = \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{v} - 2\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{C}^0(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0) + \boldsymbol{F}^0(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}^0) + \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{v}^0,\boldsymbol{x}^0)] = \min \tag{2.9}$$

对式（2.9）的误差向量 $\boldsymbol{v}$ 和参数向量 $\boldsymbol{x}$ 求偏导数，并令其等于 0，得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{v}} = 2\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} - 2\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^0 = 0 \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{x}} = -2\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^0 = 0 \end{cases} \tag{2.10}$$

根据观测方程与式（2.10），得

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{F}^0\boldsymbol{Q}\boldsymbol{F}^{0\mathrm{T}} & \boldsymbol{C}^0 \\ \boldsymbol{C}^{0\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{v}^0,\boldsymbol{x}^0) \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \tag{2.11}$$

式中，$\boldsymbol{Q}$ 为误差向量的协因数矩阵。根据式（2.11）可以得到拉格朗日乘数的估值 $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$、参数向量的估值 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 和误差向量的估值 $\hat{\boldsymbol{v}}$，为

$$\hat{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{F}^{0\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\lambda}} \tag{2.12}$$

根据式（2.11）和式（2.12）可以迭代求解参数变量 $\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{v}$ 的估值，其迭代过程将结合 EIV 模型的参数估计详细阐述。

2.2 几种典型测绘数据处理模型

2.2.1 坐标转换模型

坐标系统是测绘数据处理中常见的问题，广泛存在于大地测量、工程测量、摄影测量、计算机视觉、地图制图等专业领域，一直受到研究人员的关注。信息技术的发展与坐标系统的更新换代使得原有参考基准下的成果资料失去使用价值。为维持测绘基准的统一、精确；实现原有测绘成果的有效利用；为生产建设提供前提保障，应用信息化技术改造、维持测绘基准是当前测量工作的主要内容之一。由于受到诸多因素的干扰，空间定位技术的成熟与广泛应用并没有使测绘基准得到有效统一。当前，测绘基准仍然独立分为平面基准与高程基准，且两者的更新、改造也是独立进行。平面坐标系统的更新换代主要是通过数学模型拟合新、旧坐标系统的转换关系，以 Bursa 空间转换模型为例。

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_Z & -\varepsilon_Y \\ -\varepsilon_Z & 1 & \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y & -\varepsilon_X & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

式中，(X_1, Y_1, Z_1) 为控制点在原坐标系中的空间三维直角坐标；(X_2, Y_2, Z_2) 为控制点在目标坐标系中的空间三维直角坐标；(X_0, Y_0, Z_0) 为平移参数；$(\varepsilon_X, \varepsilon_Y, \varepsilon_Z)$ 为旋转参数；μ 为尺度参数。

具有四个参数的平面坐标转换模型为

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

式中，(x_1, y_1) 为控制点在原坐标系中的平面坐标；(x_2, y_2) 为控制点在目标坐标系中的平面坐标；$(\Delta x, \Delta y)$ 为平移参数；α 为旋转角。

坐标系统的转换精度受两个因素的影响：①转换模型的符合程度；②模型参数的求解精度。就坐标系统的定义而言，上述两个数学模型能够表达坐标系统之间的转换关系，因此，测绘工作者更加关注的是如何提高模型参数的求解精度。模型参数的求解需要控制点在原坐标系与目标坐标系中的坐标，因此控制点坐标的精度影响模型参数的求解精度。

从坐标系统的发展现状来看，我国坐标系统的转换主要是参心坐标系下的测绘成果向地心坐标系的转换，如果应用空间转换模型［以式（2.13）为例］实现坐标系统的转换，参数求解的前提是获得三个以上的控制点在参心坐标系与地心坐标系中的空间三维直角坐标（X, Y, Z）。但是在我国参心坐标系中，控制点的坐标为平面坐标或大地经纬度，缺乏高精度的控制点大地高信息，无法根据式（2.15）精确获得控制点的空间三维直角坐标。

$$\begin{cases} X = (N+H)\times\cos B\times\cos L \\ Y = (N+H)\times\cos B\times\sin L \\ Z = [N\times(1-e^2)+H]\times\sin B \end{cases} \tag{2.15}$$

式中，N 为卯酉圈曲率半径；H 为控制点的大地高；e 为参考椭球的偏心率；B、L 分别为控制点的大地经纬度。

因此，根据已有观测数据的现状，应用空间转换模型实现我国参心坐标系向地心坐标系的转换缺乏一定的数据基础。为分析缺乏精确的大地高信息对坐标转换的影响，沈云中等（2006）针对不同大小的转换区域，研究不准确的大地高信息对求解控制点在目标坐标系中平面坐标的影响；谢鸣宇和姚宜斌（2008）应用“高程趋近法”迭代求解控制点在参心坐标系中的大地高，通过空间转换模型求解转换参数，并在不同大小的范围分析参数求解的精度受大地高精度的影响程度。

与空间转换模型相比，平面坐标转换模型的适用性更好，参数的求解直接通过平面坐标解算，无论在参心坐标系中还是在地心坐标系中，都能获得相对精确的控制点平面坐标。但是有两个因素限制平面坐标转换模型的适用范围与转换精度：①平面坐标转换模型无法顾及坐标投影变形对参数求解的影响；②转换模型与坐标系统的定义不吻合，平面坐标转换模型是坐标系统之间转换关系的数学拟合。国内外众多学者分别从不同的角度分析了平面坐标转换模型在不同范围内的转换精度，并用实测数据进行了验证，其研究结论请查阅相关研究文献（高井祥等，1999；Neitzel，2010）。

2.2.2 高程异常拟合模型

应用数学模型实现大地高向高程的转换，已经在我国似大地水准面的建设与高程测量中广泛应用。大地高是点到某一参考椭球的法线距离，相对于以大地水准面或似大地水准面（以下简称为大地水准面）定义的高程系统，大地高仅具有几何意义，而不具有物理意义。因此，大地高并不能够作为表示地貌的依据，由点的大地高数值大小并不能判断出实际生产生活中需要的点与点之间水平高低。全球卫星导航定位系统（global navigation satellite system，GNSS）在测绘学科的广泛应用，使得点的大地高（点间的相对大地高）能够较为容易地获得。相比较而言，为获得点的高程而进行的水准测量工作具有劳动强度大、数据处理烦琐的缺点，测绘工作者一直致力于大地高与高程之间转换的研究工作。

在数值上实现大地高与高程的拟合问题，就是实现参考椭球面与大地水准面这两个基准面间差距的拟合。参考椭球面作为大地水准面数学模型的近似表达，同大地高一样仅具有几何意义。忽略某点的法线与铅垂线间的垂线偏差，参考椭球面与大地水准面之间的差距称为高程异常（图 2.1）；在小测区范围内，点的高程异常近似等于它的大地高减去其高程。因此，为实现大地高向高程的转换，可以应用数学模型对高程异常进行拟合。

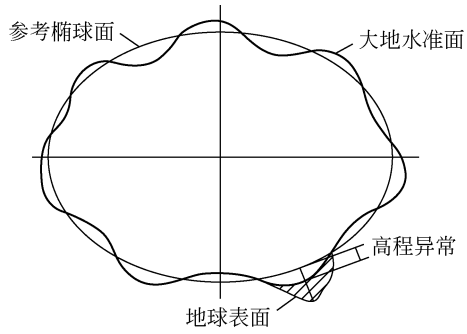


图 2.1　高程异常的近似表达

以高程异常拟合的二次多项式模型为例：

$$\delta_i = a_0 + a_1 x_i + a_2 y_i + a_3 x_i y_i + a_4 x_i^2 + a_5 y_i^2 \tag{2.16}$$

式中，δ_i 为点的高程异常值；(x_i, y_i) 为点的平面坐标；$(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ 为模型参数。

当已知观测数大于必要观测数时，应用最小二乘准则求解模型参数。设观测数为 n，则式（2.16）表示为

$$\begin{pmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 & x_1^2 & y_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & y_n & x_n y_n & x_n^2 & y_n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

根据式（2.17），建立高斯-马尔可夫平差模型，应用最小二乘算法，可以获得模型参数的解。不再重复其推导过程。

大地水准面的数学模型表达复杂，它与参考椭球面并无严格意义上的数学关系，因此，人们应用数学模型实现大地高向高程的转换是对高程异常的“强制”拟合。在一定的区域范围内，数学模型是否能够描述模型的自变量与因变量之间的变化规律，需要应用统计方法对拟合模型进行显著性检验。对于复杂多变的测区地貌，更有必要对拟合模型的显著性进行检验。此类问题将在 2.3.2 节进一步讨论。

2.2.3　外方位元素解算模型

在摄影测量工作中，为确定摄影光速在摄影瞬间的空间位置和姿态，通常采用空间后方交会反算外方位元素。确定影像的外方位元素，得到像点坐标与物点坐标之间的转换关系是区域网平差的基本内容，同时也是解析空中三角测量的关键技术之一。共线方程是应用空间后方交会求解外方位元素的基本方程，外方位元素解算的传统方法是根据共线方程，建立高斯-马尔可夫模型，应用最小二乘估计算法获得。当影像的内方位元素已知，以外方位元素为变量的共线方程为

$$\begin{cases} x - x_0 = -f\dfrac{a_1(X-X_\mathrm{s}) + b_1(Y-Y_\mathrm{s}) + c_1(Z-Z_\mathrm{s})}{a_3(X-X_\mathrm{s}) + b_3(Y-Y_\mathrm{s}) + c_3(Z-Z_\mathrm{s})} \\ y - y_0 = -f\dfrac{a_2(X-X_\mathrm{s}) + b_2(Y-Y_\mathrm{s}) + c_2(Z-Z_\mathrm{s})}{a_3(X-X_\mathrm{s}) + b_3(Y-Y_\mathrm{s}) + c_3(Z-Z_\mathrm{s})} \end{cases} \tag{2.18}$$

式中，(x, y) 为地面控制点的像平面坐标；(X, Y, Z) 为地面控制点的空间三维直角坐标；(x_0, y_0, f) 为已知的内方位元素；$(a_i, b_i, c_i)(i = 1,2,3)$ 为以外方位元素 $(X_\mathrm{s}, Y_\mathrm{s}, Z_\mathrm{s}, \varphi, \omega, \kappa)$ 中角元素 $(\varphi, \omega, \kappa)$ 为变量的系数。以外方位元素为变量的共线方程为非线性方程，应用高斯-马尔可夫模型求解外方位元素，需要将其线性化。由于竖直摄影时航摄像片的外方位角元素的角元素为微小值，其正弦按级数展开取一次项为 0，余弦按级数展开取一次项为 1；应用泰勒级数展开的线性化共线方程为

$$\begin{cases} x = (x) + \dfrac{f}{\overline{Z}}\mathrm{d}X_\mathrm{s} + \dfrac{x}{\overline{Z}}\mathrm{d}Z_\mathrm{s} - f(1+\dfrac{x^2}{f^2})\mathrm{d}\varphi - \dfrac{xy}{f}\mathrm{d}\omega + y\mathrm{d}\kappa \\ y = (y) + \dfrac{f}{\overline{Z}}\mathrm{d}Y_\mathrm{s} + \dfrac{y}{\overline{Z}}\mathrm{d}Z_\mathrm{s} - \dfrac{x^2}{f}\mathrm{d}\varphi - f(1+\dfrac{y^2}{f^2})\mathrm{d}\omega - x\mathrm{d}\kappa \end{cases} \tag{2.19}$$

式中，(x)、(y) 为 (x, y) 的近似值；$\overline{Z} = a_3(X-X_\mathrm{s}) + b_3(Y-Y_\mathrm{s}) + c_3(Z-Z_\mathrm{s})$。设有 n 个观测值，外方位元素的高斯-马尔可夫模型的函数模型 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{l}$ 中

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \dfrac{f}{\overline{Z}_1} & 0 & \dfrac{x_1}{\overline{Z}_1} & -f(1+\dfrac{x_1^2}{f^2}) & -\dfrac{x_1y_1}{f} & y_1 \\ 0 & \dfrac{f}{\overline{Z}_1} & \dfrac{y_1}{\overline{Z}_1} & -\dfrac{x_1^2}{f} & -f(1+\dfrac{y_1^2}{f^2}) & -x_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{f}{\overline{Z}_n} & 0 & \dfrac{x_n}{\overline{Z}_n} & -f(1+\dfrac{x_n^2}{f^2}) & -\dfrac{x_ny_n}{f} & y_n \\ 0 & \dfrac{f}{\overline{Z}_n} & \dfrac{y_n}{\overline{Z}_n} & -\dfrac{x_n^2}{f} & -f(1+\dfrac{y_n^2}{f^2}) & -x_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{l} = \begin{bmatrix} x_1 - (x)_1 \\ y_1 - (y)_1 \\ \vdots \\ x_n - (x)_n \\ y_n - (y)_n \end{bmatrix},$$

$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \mathrm{d}X_\mathrm{s} & \mathrm{d}Y_\mathrm{s} & \mathrm{d}Z_\mathrm{s} & \mathrm{d}\varphi & \mathrm{d}\omega & \mathrm{d}\kappa \end{bmatrix}^\mathrm{T}$。给定参数初值，在最小二乘准则下可以迭代求解参数估值。

2.2.4 导线网平差模型

在测绘工作中广泛应用的 GNSS 技术并没有改变地下工程测量作业模式，导线测量仍然是地下平面测绘基准建立与维持的主要方式。受地下作业环境的限制，导线测量是地下平面控制测量的主要作业手段。

以间接平差模型为例，设两相邻控制点的水平距离与方位角分别为 S_i、a_i，两相邻控制点的平面坐标为 $(x_i\ y_i)$、$(x_{i+1}\ y_{i+1})$，则

$$S_i = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2} \tag{2.20}$$