陈文灯 黄先开 朱庆宇◎主编

2020考研数学复习指南

（数学三）

助力千万考生勇创人生辉煌成就

二十三年经典对接移动互联时代

网络增值版

本书使用说明

名师点题答疑

哪里不会扫哪里	重难点视频讲解 下载慧升考研APP 扫描书中二维码
超级服务	使用陈文灯考研数学图书可获免费网络答疑服务
超值赠送	《课后习题答案详解》便携本

文登考研网址：www.wendeng.com.cn
增值服务网址：www.hskaoyan.com

中国财经出版传媒集团
中国财政经济出版社

2020 考研数学复习指南
（数学三）

陈文灯　黄先开　朱庆宇　主编

中国财经出版传媒集团
中国财政经济出版社

图书在版编目（CIP）数据

2020 考研数学复习指南．数学三 / 陈文灯，黄先开，朱庆宇主编．—北京：中国财政经济出版社，2019.1

ISBN 978－7－5095－8807－9

Ⅰ.①2… Ⅱ.①陈… ②黄… ③朱… Ⅲ.①高等数学－研究生－入学考试－自学参考资料 Ⅳ.①013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2019）第 020431 号

责任编辑：王佳欣
封面设计：陈宇琰

中国财政经济出版社 出版

URL：http：//www.cfeph.cn

E－mail：cfeph @ cfeph.cn

社址：北京市海淀区阜成路甲 28 号　邮政编码：100142

营销中心电话：010－88191537

北京富生印刷厂印刷　各地新华书店经销

787×1092 毫米　16 开　36 印张　880 000 字

2019 年 2 月第 1 版　2019 年 2 月北京第 1 次印刷

定价：68.00 元

ISBN 978－7－5095－8807－9

（图书出现印装问题，本社负责调换）

本社质量投诉电话：010－88190744

打击盗版举报热线：010－88191661　QQ：2242791300

前　言

本书从1995年出版以来，每年再版和修订，集合了编者几十载的教学经验、对考研命题的钻研把握以及众多考研学子的复习心得、实战体会，已成为广大考研读者的良师诤友，同时也因其重点突出的内容总结和典型题目的汇编，成为众多教师同行的教学参考。在过去的十几年中，本书帮助许许多多考研学子圆了梦想，帮助使用过本书的学子们应用“数学的思维”方法在学习、工作和研究中取得了丰硕的成果。

为了帮助同学们提高使用本书的效率、解答复习中遇到的各种问题，编者和一些数学同仁专门在本书配套app为本书开设答疑讨论专区，以更好地和同学们交流互动。从您购书开始一直到考试，文登名师将一直伴随着您！许多考研学子在论坛中分享了他们在使用本书的过程中得到的帮助和受到的启发。针对这些宝贵的反馈信息，我们曾数次认真商讨、仔细揣摩，对本书再次做了修订，希望能更好地满足同学们复习备考的要求。我们也借此机会向这些考研学子们一并表示衷心的感谢。

此外，在app答疑平台的基础上，我们随书赠送了全套的文登网校基础班视频课，建议考生在观看视频的同时与本人编写的《考研数学基础核心讲义》配套使用。同时本书选取了一部分例题进行了二维码讲解，扫码分享后即可免费观看。打好坚实的基础将是考试成功的一半。在这个基础上再看指南，效果将事半功倍！

此次再版，我们做了以下修订。

（1）“变繁为简，变难为易”。将常考的、考生感到棘手的内容进行归纳总结，使考生得到既“玄妙”又特别有效的解题方法和技巧，并给出了详细的分析，使同学们了解这些方法的由来，让“玄妙”变得顺理成章。例如，连续函数在闭区间上的性质、微分中值定理、定积分等式与不等式的证明、函数方程与不等式的证明，尤其是文字不等式的证明。特别值得一提的是那些辅助函数的做法，经过我们的分析，原题将变得非常“初等”，非常简单，只要仿效，即可自行解答。

（2）例题上做了调整。每章中安排了一节思维定势及综合题解析。思维定势对应对考试很有用，根据题型特点，能很快找到解题突破口。综合题解析可帮助同学们将各知识点“珠联璧合”，以提高考生分析问题和解决问题的能力。

（3）修订错误。我们仔细校对、核实了全书内容，修订了错误。通过我们的努力和许多同学的帮助，再版力求尽量做到完美。为了精益求精，恳请朋友们指正。

（4）增加了二维码讲解。用95后学生学习数学的视角，对本书例题和习题进行了重新讲解，以便更好地贴合当前考生学习数学的方法。

（5）更加突出数学思维的训练。在本书的配套讲解中，注重知识的引入和数学模型的建

立，例题讲解联系实际，加强应用。

最后回答考生们的问题："如何有效地利用您的书提高复习效果?""考好数学，书要看几遍?"

看我们的书是要有铺垫的。先把大学里学过的四本书看一看，对基础部分要多下点工夫，做到概念、定理能用自己的语言叙述，习题应全部都做。高数的基础：极限、导数与微分、不定积分；线性代数的基础：矩阵的初等变换、含有参数的线性方程组解的讨论、方阵的特征值与特征向量；概率论与数理统计的基础：事件的概率、古典概型、条件概率与乘法公式、全概率公式与贝叶斯公式、伯努利概型、随机变量及其分布（特别是二维连续型）、随机变量的数字特征［期望 $E(X)$、方差 $D(X)$、协方差 $\mathrm{cov}(X,Y)$，相关系数 ρ_{XY}］。如果是自学，应先仔仔细细地把本书看一遍，然后再详细看二三遍，对重点知识点着重理解、揣摩；如果是参加强化班，最好与上课"同步"进行，课后再看一遍即可。

这里尤为强调的是，在本书学习过程中，大家至少准备三个大笔记本，做题之前尽量不要看答案，先自己在空白本子上完整地做一遍，时时模拟考场在答题纸上做题的样子。如果某个题目自己不会做，也尽量根据已知条件找点有帮助的转化，即便是写了"解""证明"之后毫无思路，这种方法也便于您迅速找到自己的卡壳点。数学学习过程中的提升大致有两类：一是把自己会的做得更熟练，二是把自己的卡壳点做会做熟。要知道数学常规题解答时靠条件反射立马做出，稍微有难度的题目，是观察题目之后，列出已知条件和根据已知转化出来的条件进行排列组合得到最后的答案。见题就做这个习惯将会最大程度地让您避免眼高手低这种情况。

送给考研朋友一首诗：

数学基础树的根，
技巧演练靠题型。
勤学苦练强磨砺，
功到高分自然成。

目录

第二篇 线性代数

第三篇　概率论与数理统计

第一篇 微积分

整个高等数学知识点多，学生感觉难学，主要是因为它具有以下特点：

1. 更高抽象性，抽象是全部数学的本质．因为数学只保留了客观具体事物的数量关系和空间形式，去除了其他属性；高等数学的抽象是经过一系列的抽象化阶段逐步完成的；就好比极限这个概念完整严格的形成，经历过几百年，当年大数学家牛顿和莱布尼茨都不能很好理解，我们刚开始学习时不理解，也不是什么可耻的事情．

2. 精确性．无论是数学推理还是证明，都要求有严格精密的根基．学生学习专业课中可能遇到一种情况，社会生产实践活动并没有数学要求的那么严格，工程科学或经济类社会科学的建立沿用了数学的严格精确性，但实际生活中，有些理想化的数学模型是不可能产生的，如冲激函数、不满足傅里叶级数展开的信号（函数）．

3. 广泛性．各种事物的发展变化具有数学形式上的统一性，因此数学就有了广泛的应用性．比如，研究完定积分，为了符合生产实际，拓展出来反常积分；因为积分区域发生了变化，又延伸出来多重积分和曲线曲面积分．但是，其本质都是在定积分之上延伸出来的，都满足线性、可加性等等．数学首先描绘的肯定是自然界中最普遍的一种现象，而线性是普遍存在的，我们在形成一个统一的度量衡世界时，线性是必然要被刻画的．

4. 工程性．我们在高等数学学习微分方程这一工具时，学习一些常见且简单的微分方程如何去求解，实际上很多微分方程是没法用这种方法的，我们可能还要去寻求数值解，数值解的工具那就是级数．一元函数不能满足我们实际中变量数量的要求，我们又拓展出来多元函数的相关知识．一部分专业在学习专业课时还要用到场论的相关知识，所以要专门学习曲线曲面积分以及场论．信息的表达或者函数的表达要统一，所以又在级数里面学了泰勒级数和傅里叶级数等，这些都是在生产实践中，根据生产力发展需要，不断被抽象，不断被后天赋予的各种数学知识，各种数学美都应运而生．

看完以上，您是不是觉得生无可念，这么难的东西怎么学．耐得住寂寞，经得住诱惑，多思考，勤动手，唯有练习才能功夫高．

所有的奋斗，都会有艰苦的环境、捉襟见肘的窘迫和焦虑不安的心境．那时我们都以为，成功的那一天才会幸福．但事实上，那些在奋斗之路上，让你内心获得力量的人和事，才是你绵长的生命里，最值得珍惜的幸福．

第一篇 微积分

第一章 函数、极限和连续

第一节 重要概念、定理和公式的剖析

一、函数的基本性质

1. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 在对称区间 X 上有定义,如果对于 $\forall x \in X$ 恒有

$$f(x) = f(-x) \quad (\text{或 } f(x) = -f(-x)),$$

则称 $f(x)$ 为偶函数(或 $f(x)$ 为奇函数).

偶函数 $f(x)$ 的图像关于 y 轴对称,奇函数 $f(x)$ 的图像关于坐标原点对称.

奇偶函数的运算性质:

(1) 奇函数的代数和仍为奇函数;偶函数的代数和仍为偶函数.

(2) 偶数个奇(或偶)函数之积为偶函数;奇数个奇函数之积为奇函数.

(3) 一奇一偶的乘积为奇函数.

常见的偶函数:$|x|$, $\cos x$, x^{2n}(n 为正整数), $e^{|x|}$, e^{x^2}, ….

常见的奇函数:$\sin x$, $\tan x$, $\frac{1}{x}$, x^{2n+1}, $\arcsin x$, $\arctan x$, ….

提示 判别给定函数的奇偶性,主要是根据奇偶性的定义,有时也用其运算性质.

注 (1) $f(x) + f(-x) = 0$ 是判别 $f(x)$ 为奇函数的有效方法.

(2) 函数的奇偶性是相对于对称区间而言的,若定义域关于原点不对称,则该函数就不是奇或偶函数.

【例 1.1】判别下列函数的奇偶性.

(1) $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$; (2) $y = \int_0^x f(t)\,dt$,其中 $f(x)$ 为奇函数;

(3) $y = F(x)\left(\frac{1}{a^x-1} + \frac{1}{2}\right)$,其中 $a > 0, a \neq 1$, $F(x)$ 为奇函数.

【解】(1) 令 $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$,有 $f(-x) = \ln(-x + \sqrt{x^2+1})$,

$$\begin{aligned} f(x) + f(-x) &= \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + \ln(-x + \sqrt{x^2+1}) \\ &= \ln(x + \sqrt{x^2+1})(-x + \sqrt{x^2+1}) = \ln 1 = 0, \end{aligned}$$

故 $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ 为奇函数.

(2) 令 $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$,

$$F(-x)=\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t\xlongequal{\text{令}t=-u}\int_0^{x}f(-u)(-\mathrm{d}u)$$

$$=-\int_0^{x}f(-t)\mathrm{d}t=\int_0^{x}f(t)\mathrm{d}t\ \text{（因为 }f(x)\text{ 为奇函数）}$$

$$=F(x),$$

故 $y=\int_0^{x}f(t)\mathrm{d}t$ 为偶函数.

(3) 令 $g(x)=\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}$,则

$$g(-x)=\frac{1}{a^{-x}-1}+\frac{1}{2}=\frac{a^x}{1-a^x}+\frac{1}{2}=-\frac{a^x}{a^x-1}+\frac{1}{2},$$

$$g(x)+g(-x)=\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}-\frac{a^x}{a^x-1}+\frac{1}{2}=0,$$

所以 $g(x)$ 为奇函数,又 $F(x)$ 为奇函数.

故 $y=F(x)\left(\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}\right)$为偶函数.

2. 周期性

设函数 $f(x)$ 在区间 X 上有定义,若存在一个与 x 无关的正数 T,使对于任一 $x\in X$,恒有

$$f(x+T)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数,把满足上式的最小正数 T 称为函数 $f(x)$ 的周期.

周期函数的运算性质:

(1) 若 T 为 $f(x)$ 的周期,则 $f(ax+b)$ 的周期为$\dfrac{T}{|a|}$.

(2) 若 $f(x),g(x)$ 均是以 T 为周期的函数,则 $f(x)\pm g(x)$ 也是以 T 为周期的函数.

(3) 若 $f(x),g(x)$ 分别是以 $T_1,T_2,(T_1\neq T_2)$ 为周期的函数,则 $f(x)\pm g(x)$ 是以 T_1,T_2 的最小公倍数为周期的函数.

常见函数的周期:$\sin x,\cos x$,其周期 $T=2\pi$;

$\tan x,\cot x,|\sin x|,|\cos x|$,其周期 $T=\pi$.

提示 判别给定函数 $f(x)$ 是否为周期函数,主要是根据周期的定义,有时也用其运算性质.

【例 1.2】 设对一切实数 x,有 $f\left(\dfrac{1}{2}+x\right)=\dfrac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}$,则 $f(x)$ 是周期为________的周期函数.

【解】 $$f\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}+x\right)\right]=\frac{1}{2}+\sqrt{f\left(\frac{1}{2}+x\right)-f^2\left(\frac{1}{2}+x\right)}$$

$$=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-f(x)+f^2(x)}$$

$$=\frac{1}{2}+\left[f(x)-\frac{1}{2}\right]=f(x),\left(\text{由题设 }f(x)\geqslant\frac{1}{2}\right)$$

即 $f(1+x)=f(x)$,故可知 $f(x)$ 的周期为 1.

【例 1.3】 设 $f(x)$ 是在$(-\infty,+\infty)$ 上以 T 为周期的连续函数,

(1) 如果 $f(x)$ 是奇函数,则函数 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 也是以 T 为周期的周期函数;

(2) 如果$\int_a^T f(x)\mathrm{d}x\neq 0$,则函数 $G(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 可表示成线性函数与以 T 为周期的周期函数之和.

【证】(1) 由周期函数及奇函数的积分性质得

$$F(x+T)=\int_0^{x+T}f(t)\mathrm{d}t=\int_0^T f(t)\mathrm{d}t+\int_T^{x+T}f(t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\mathrm{d}t+\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=0+\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=F(x),$$

所以,$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是以 T 为周期的周期函数.

(2) 对于任意的常数 k,有

$$G(x)=\int_a^x[f(t)-k+k]\mathrm{d}t=\int_a^x[f(t)-k]\mathrm{d}t+k(x-a).$$

因为 $k(x-a)$ 是线性函数,所以,只需证明当 k 取某一值时,$g(x)=\int_a^x[f(t)-k]\mathrm{d}t$ 以 T 为周期即可.

由周期函数的定积分性质得

$$g(x+T)=\int_a^{x+T}[f(t)-k]\mathrm{d}t=\int_a^x[f(t)-k]\mathrm{d}t+\int_x^{x+T}[f(t)-k]\mathrm{d}t$$

$$=g(x)+\int_0^T f(t)\mathrm{d}t-kT,$$

取 $k=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$,有 $g(x+T)=g(x)$,即 $g(x)$ 是以 T 为周期的周期函数.

3. 有界性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 X 上有定义,如果 $\exists M>0$,使得对于一切 $x\in X$,恒有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称 $f(x)$ 在区间 X 上有界;若不存在这样的 M,则称 $f(x)$ 在区间 X 上无界.

注 函数 $f(x)$ 是否有界是相对于某个区间而言的.

六个常见的有界函数	$\lvert\sin x\rvert\leqslant 1$,	$\lvert\cos x\rvert\leqslant 1$,	$x\in(-\infty,+\infty)$
	$\lvert\arcsin x\rvert\leqslant\frac{\pi}{2}$,	$\lvert\arccos x\rvert\leqslant\pi$,	$x\in[-1,1]$
	$\lvert\arctan x\rvert<\frac{\pi}{2}$;	$\lvert\operatorname{arccot} x\rvert<\pi$,	$x\in(-\infty,+\infty)$

提示 判别函数的界,一般先要对函数取绝对值,然后用不等式放缩法求解;或借助导数利用求最大(小)值法处理.

【例 1.4】函数 $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$ 在定义域内为

(A) 有上界无下界. (B) 有下界无上界.

(C) 有界,且 $-\frac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant\frac{1}{2}$. (D) 有界且 $-2\leqslant f(x)\leqslant 2$. 【 】

【解】$|f(x)|=\left|\frac{x}{1+x^2}\right|=\frac{|x|}{1+x^2}\leqslant\frac{|x|}{2|x|}=\frac{1}{2}$ (因为 $1+x^2\geqslant 2|x|$),

故 $-\frac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant\frac{1}{2}$， 可知该选(C)

【例 1.5】函数 $f(x)=\frac{\lg x}{x}$ 在区间 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上为

(A) 有上界无下界. (B) 有下界无上界.

(C) 有界且 $2\lg\frac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant 0$. (D) 有界且 $\lg\frac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant -\frac{1}{4}$. 【 】

【解】$f(x)=\frac{\lg x}{x},f'(x)=\frac{x\frac{1}{x\ln 10}-\lg x}{x^2}=\frac{1}{x^2}(\lg e-\lg x)$.

因为 $x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$， 所以 $f'(x)>0$. 故 $f(x)$“↑”.

因此，$\frac{\lg\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\leqslant f(x)\leqslant\frac{\lg 1}{1}$， 即 $2\lg\frac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant 0$，可知，该选(C).

4. 单调性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 X 上有定义，如果对 $\forall x_1,x_2\in X,x_1<x_2$，恒有

$$f(x_1)<f(x_2)\quad(\text{或 } f(x_1)>f(x_2)),$$

则称 $f(x)$ 在区间 X 上是单调增加(或单调减少)的.

提示 若 $f(x)$ 在区间 X 上没有告知为可导，则其单调性的判别用定义；若 $f(x)$ 在区间 X 上可导，则利用导数判别更简便.

【例 1.6】设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有定义，$x_1>0,x_2>0$. 求证：

(1) 若 $\frac{f(x)}{x}$ 单调下降，则 $f(x_1+x_2)\leqslant f(x_1)+f(x_2)$；

(2) 若 $\frac{f(x)}{x}$ 单调上升，则 $f(x_1+x_2)\geqslant f(x_1)+f(x_2)$.

【证】(1) 设 $x_1>0,x_2>0$，且 $x_1<x_2$. 于是

$$\frac{f(x_2)}{x_2}\leqslant\frac{f(x_1)}{x_1}\Rightarrow x_1f(x_2)\leqslant x_2f(x_1),$$

$$\frac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2}\leqslant\frac{f(x_2)}{x_2}\Rightarrow x_2f(x_1+x_2)\leqslant x_1f(x_2)+x_2f(x_2)$$

$$\Rightarrow x_2f(x_1+x_2)\leqslant x_2f(x_1)+x_2f(x_2)\Rightarrow f(x_1+x_2)\leqslant f(x_1)+f(x_2).$$

(2) 的证明略.

【例 1.7】设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $f(x)>0$，令

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}, & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

证明：$F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调增加.

【分析】只需证明 $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，在 $(0,+\infty)$ 内 $F'(x)>0$ 即可.