

陈文灯 黄先开 朱庆宇◎主编

2020 考研 数学 复习指南

(数学三)

助力千万考生勇创人生辉煌成就

二十三年经典对接移动互联网时代

网络增值版 本书使用说明



哪里不会
扫哪里

重难点视频讲解
下载慧升考研APP
扫描书中二维码

超级服务

使用陈文灯考研数学
图书可获免费网络答
疑服务

名师点
题答疑

超值赠送

《课后习题答案详解》
便携本

文登考研网址: www.wendeng.com.cn

增值服务网址: www.hskaoyan.com



中国财经出版传媒集团
中国财政经济出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

2020 考研数学复习指南·数学三 / 陈文灯, 黄先开, 朱庆宇主编. —北京: 中国财政经济出版社, 2019. 1

ISBN 978-7-5095-8807-9

I. ①2… II. ①陈… ②黄… ③朱… III. ①高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料
IV. ①013

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2019) 第 020431 号

责任编辑: 王佳欣

封面设计: 陈宇琰

主 编 朱 庆 宇 开 黄 先 开 文 灯 陈



中国财政经济出版社出版

URL: <http://www.cfeph.cn>

E-mail: cfeph@cfeph.cn

(版权所有 翻印必究)

社址: 北京市海淀区阜成路甲 28 号 邮政编码: 100142

营销中心电话: 010-88191537

北京富生印刷厂印刷 各地新华书店经销

787×1092 毫米 16 开 36 印张 880 000 字

2019 年 2 月第 1 版 2019 年 2 月北京第 1 次印刷

定价: 68.00 元

ISBN 978-7-5095-8807-9

(图书出现印装问题, 本社负责调换)

本社质量投诉电话: 010-88190744

打击盗版举报电话: 010-88191661 QQ: 2242791300

前 言

本书从 1995 年出版以来，每年再版和修订，集合了编者几十载的教学经验、对考研命题的钻研把握以及众多考研学子的复习心得、实战体会，已成为广大考研读者的良师诤友，同时也因其重点突出的内容总结和典型题目的汇编，成为众多教师同行的教学参考。在过去的十几年中，本书帮助许许多多考研学子圆了梦想，帮助使用过本书的学子们应用“数学的思维”方法在学习、工作和研究中取得了丰硕的成果。

为了帮助同学们提高使用本书的效率、解答复习中遇到的各种问题，编者和一些数学同仁专门在本书配套 app 为本书开设答疑讨论专区，以更好地和同学们交流互动。从您购书开始一直到考试，文登名师将一直伴随着您！许多考研学子在论坛中分享了他们在使用本书的过程中得到的帮助和受到的启发。针对这些宝贵的反馈信息，我们曾数次认真商讨、仔细揣摩，对本书再次做了修订，希望能更好地满足同学们复习备考的要求。我们也借此机会向这些考研学子们一并表示衷心的感谢。

此外，在 app 答疑平台的基础上，我们随书赠送了全套的文登网校基础班视频课，建议考生在观看视频的同时与本人编写的《考研数学基础核心讲义》配套使用。同时本书选取了一部分例题进行了二维码讲解，扫码分享后即可免费观看。打好坚实的基础将是考试成功的一半。在这个基础上再看指南，效果将事半功倍！

此次再版，我们做了以下修订。

(1) “变繁为简，变难为易”。将常考的、考生感到棘手的内容进行归纳总结，使考生得到既“玄妙”又特别有效的解题方法和技巧，并给出了详细的分析，使同学们了解这些方法的由来，让“玄妙”变得顺理成章。例如，连续函数在闭区间上的性质、微分中值定理、定积分等式与不等式的证明、函数方程与不等式的证明，尤其是文字不等式的证明。特别值得一提的是那些辅助函数的做法，经过我们的分析，原题将变得非常“初等”，非常简单，只要仿效，即可自行解答。

(2) 例题上做了调整。每章中安排了一节思维定势及综合题解析。思维定势对应对考试很有用，根据题型特点，能很快找到解题突破口。综合题解析可帮助同学们将各知识点“珠联璧合”，以提高考生分析问题和解决问题的能力。

(3) 修订错误。我们仔细校对、核实了全书内容，修订了错误。通过我们的努力和许多同学的帮助，再版力求尽量做到完美。为了精益求精，恳请朋友们指正。

(4) 增加了二维码讲解。用 95 后学生学习数学的视角，对本书例题和习题进行了重新讲解，以便更好地贴合当前考生学习数学的方法。

(5) 更加突出数学思维的训练。在本书的配套讲解中，注重知识的引入和数学模型的建

立, 例题讲解联系实际, 加强应用。

最后回答考生们的问题: “如何有效地利用您的书提高复习效果?” “考好数学, 书要看几遍?”

看我们的书是要有铺垫的。先把大学里学过的四本书看一看, 对基础部分要多下点工夫, 做到概念、定理能用自己的语言叙述, 习题应全部都做。高数的基础: 极限、导数与微分、不定积分; 线性代数的基础; 矩阵的初等变换、含有参数的线性方程组解的讨论、方阵的特征值与特征向量; 概率论与数理统计的基础: 事件的概率、古典概型、条件概率与乘法公式、全概率公式与贝叶斯公式、伯努利概型、随机变量及其分布(特别是二维连续型)、随机变量的数字特征 [期望 $E(X)$ 、方差 $D(X)$ 、协方差 $\text{cov}(X, Y)$, 相关系数 ρ_{XY}]。如果是自学, 应先仔仔细细地把本书看一遍, 然后再详细看二三遍, 对重点知识点着重理解、揣摩; 如果是参加强化班, 最好与上课“同步”进行, 课后再看一遍即可。

这里尤为强调的是, 在本书学习过程中, 大家至少准备三个大笔记本, 做题之前尽量不要看答案, 先自己在空白本子上完整地做一遍, 时时模拟考场在答题纸上做题的样子。如果某个题目自己不会做, 也尽量根据已知条件找点有帮助的转化, 即便是写了“解”“证明”之后毫无思路, 这种方法也便于您迅速找到自己的卡壳点。数学学习过程中的提升大致有两类: 一是把自己会的做得更熟练, 二是把自己的卡壳点做会做熟。要知道数学常规题解答时靠条件反射立马做出, 稍微有难度的题目, 是观察题目之后, 列出已知条件和根据已知转化出来的条件进行排列组合得到最后的答案。见题就做这个习惯将会最大程度地让您避免眼高手低这种情况。

送给考研朋友一首诗:

数学基础树的根,
技巧演练靠题型。
勤学苦练强磨砺,
功到高分自然成。



目 录



第一篇 微积分

第一章 函数、极限和连续	2
第一节 重要概念、定理和公式的剖析	2
一、函数的基本性质	2
二、分段函数	6
三、反函数	6
四、复合函数	7
五、初等函数	10
六、函数的极限及其连续性	10
七、重要公式和定理	15
第二节 重要题型的解题方法和技巧	22
题型一 未定式的定值法	22
题型二 类未定式的计算	26
题型三 数列的极限	27
题型四 极限式中常数的确定(重点)	32
题型五 函数连续或间断点的判定	35
第三节 思维定势及综合题解析	37
一、思维定势	37
二、综合题解析	41
习题一	42
第二章 导数与微分	46

第一节 重要概念、定理和公式的剖析	46
一、导数与微分的定义	46
二、重要定理	48
三、导数与微分的运算法则	48
四、基本公式	48
五、高阶导数的定义与基本公式	49
第二节 重要题型的解题方法和技巧	49
题型一 求复合函数的导数或微分	49
题型二 求隐函数的导数或微分	53
题型三 求幂指函数的导数或微分	54
题型四 求表达式为若干因子连乘积、 乘方、开方或商形式的函数 的导数或微分	54
题型五 求分段函数的导数或微分	55
题型六 求高阶导数	56
第三节 思维定势及综合题解析	59
一、思维定势	59
二、综合题解析	59
习题二	61
第三章 不定积分	65
第一节 重要概念、定理和公式的剖析	65

一、不定积分的基本概念	65	题型八 定积分等式的证明	119
二、基本性质	65	题型九 定积分不等式的证明	127
三、基本公式	66	题型十 计算反常积分	132
四、基本积分法	67	题型十一 反常积分的判敛	133
第二节 重要题型的解题方法和技巧	84	第三节 思维定势及综合题解析	134
题型一 有理函数的不定积分	84	一、思维定势	134
题型二 简单无理函数的不定积分	85	二、综合题解析	135
题型三 三角有理式的不定积分	86	习题四	136
题型四 含有反三角函数的不定积分	90	第五章 微分中值定理	140
题型五 抽象函数的不定积分	90	第一节 重要概念、定理和公式的剖析	140
题型六 分段函数的不定积分	91	第二节 重要题型的解题方法和技巧	141
第三节 思维定势及综合题解析	92	题型一 闭区间上连续函数命题的证明	141
一、思维定势	92	题型二 证明给出的函数 $f(x)$ 满足某中值定理	144
二、综合题解析	93	题型三 证明某个函数恒等于一个常数的命题	145
习题三	95	题型四 命题 $f^{(n)}(\xi) = 0$ 的证明	146
第四章 定积分及反常积分	99	题型五 欲证结论: 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f^{(n)}(\xi) = k$ ($k \neq 0$) 或由 $a, b, f(a), f(b), \xi, f(\xi), f'(\xi), \dots, f^{(n)}(\xi)$ 所构成的代数式成立	147
第一节 重要概念、定理和公式的剖析	99	题型六 欲证结论: 在 (a, b) , 内至少存在 ξ, η ($\xi \neq \eta$) 满足某个代数式	150
一、基本性质	99	第三节 思维定势及综合题解析	151
二、定理和公式	102	一、思维定势	151
三、定积分的算法	105	二、综合题解析	153
四、反常积分的基本概念	109	习题五	155
第二节 重要题型的解题方法和技巧	110	第六章 常微分方程和差分方程	157
题型一 分段函数的定积分	110	第一节 重要概念、定理和公式的剖析	157
题型二 被积函数带有绝对值符号的定积分	112	一、基本概念	157
题型三 被积函数中含有“变限积分”的定积分	113	二、二阶线性微分方程解的结构	157
题型四 对称区间上的定积分	115		
题型五 被积函数的分母为两项, 而分子为其中一项的定积分	116		
题型六 由三角有理式与其他初等函数通过四则运算或复合而成的定积分	117		
题型七 已知一定积分, 求另一一定积分	118		

三、二阶常系数线性微分方程	159	三、函数项级数的概念	210
四、 n 阶常系数线性微分方程	159	四、幂级数的概念和性质	210
五、差分方程	162	第二节 重要题型的解题方法和技巧	212
第二节 重要题型的解题方法和技巧	162	题型一 正项级数的判敛	212
题型一 一阶微分方程的计算	162	题型二 任意项级数的判敛	214
题型二 计算二阶线性微分方程	170	题型三 级数的证明或判敛	216
题型三 计算一阶线性差分方程	173	题型四 计算函数项级数收敛域	218
题型四 微分方程的应用	175	题型五 求幂级数的收敛域、收敛半径	219
第三节 思维定势及综合题解析	176	题型六 函数在某点的幂级数展开	221
一、思维定势	176	题型七 幂级数求和	223
二、综合题解析	177	题型八 数项级数求和	227
习题六	178	第三节 思维定势及综合题解析	230
第七章 一元微积分的应用	181	一、思维定势	230
第一节 重要概念、定理和公式的剖析	181	二、综合题解析	231
一、函数的单调增减性定理	181	习题八	233
二、函数的极值与最值	182	第九章 多元函数微分学	236
三、函数凹凸性的判别与函数的拐点	183	第一节 重要概念、定理和公式的剖析	236
四、微元法及其应用	185	一、二元函数的定义	236
第二节 重要题型的解题方法和技巧	186	二、二元函数的极限及连续性	237
题型一 求函数的极值	186	三、偏导数、全导数及全微分	238
题型二 求函数的最值	187	四、基本定理	239
题型三 关于方程根的讨论	188	五、多元函数的极值	241
题型四 函数渐近线的求解	193	六、条件极值与无条件极值	242
题型五 函数作图	193	第二节 重要题型的解题方法和技巧	242
题型六 求平面图形的面积	194	题型一 简单显函数 $u=f(x,y,z)$ 的	242
题型七 求旋转体的体积	196	微分法	242
第三节 思维定势与综合题解析	197	题型二 复合函数微分法	243
一、思维定势	197	题型三 隐函数微分法	246
二、综合题解析	199	题型四 求无条件极值	249
习题七	201	题型五 求条件极值	250
第八章 无穷级数	204	题型六 求最值	251
第一章 重要概念、定理和公式的剖析	204	第三节 思维定势及综合题解析	252
一、无穷级数的基本概念和性质	204	一、思维定势	252
二、数项级数判敛法	205	二、综合题解析	252
		习题九	253

第十章 二重积分	256
第一节 重要概念、定理和公式的剖析	256
一、基本概念	256
二、性质	256
三、二重积分的解题技巧	258
第二节 重要题型的解题方法和技巧	260
题型一 更换二重积分的积分次序	260
题型二 选择二重积分的积分次序	262
题型三 二重积分坐标系的选择	264
题型四 分段函数的二重积分的计算	266
题型五 无界区域上简单二重积分的 计算	269
题型六 二重积分等式的证明	270
题型七 二重积分不等式的证明	271
第三节 思维定势及综合题解析	273
一、思维定势	273
二、综合题解析	274
习题十	275
第十一章 函数方程与不等式证明	278
第一节 函数方程	278
一、利用函数表示法与用何字母表示 无关的“特性”求解方程	278
二、利用极限求解函数方程	279
三、利用导数的定义求解方程	280
四、利用变限积分的可导性求解方程	280
五、利用连续函数的可积性及原函数 的连续性求解	281
第二节 不等式的证明	282
一、引入参数法	282
二、利用微分中值定理	283
三、利用函数的单调增减性(重点)	285
四、利用函数的极值与最值	287
五、利用函数图形的凹凸性	288
六、利用泰勒展开式	289

七、杂例	290
习题十一	291
第十二章 微积分在经济中的应用	294
第一节 重要概念、定理和公式的剖析	294
第二节 重要题型的解题方法和技巧	295
题型一 一元微积分在经济中的应用	295
题型二 二元微分学在经济中的应用	300
习题十二	301

第二篇 线性代数

第一章 行列式	302
第一节 重要概念、定理和公式的剖析	302
一、排列与逆序	302
二、 n 阶行列式的定义	303
三、行列式的基本性质	305
四、行列式按行(列)展开定理	307
五、重要公式与结论	309
第二节 重要题型的解题方法和技巧	310
题型一 抽象行列式的计算	310
题型二 低阶行列式的计算	310
题型三 n 阶行列式的计算	312
第三节 思维定势与综合题解析	317
一、思维定势	317
二、综合题解析	318
习题一	319
第二章 矩阵	322
第一节 重要概念、定理和公式的剖析	322
一、矩阵的概念	322
二、矩阵的运算	323
三、逆矩阵的概念	325
四、利用伴随矩阵求逆矩阵	326
五、矩阵的初等变换与求逆	327

六、分块矩阵及其求逆	328	与证明	368
七、矩阵的秩及其求法	328	题型七 与向量内积有关的命题	372
第二节 重要题型的解题方法和技巧	328	第三节 思维定势与综合题解析	373
题型一 求逆矩阵	328	一、思维定势	373
题型二 求矩阵的高次幂 A^m	331	二、综合题解析	374
题型三 有关初等矩阵的命题	333	习题三	375
题型四 解矩阵方程	334	第四章 线性方程组	379
题型五 求矩阵的秩	336	第一节 重要概念、定理和公式的剖析	379
题型六 关于矩阵对称、反对称命题	338	一、克莱姆法则	379
的证明	338	二、线性方程组的基本概念	379
题型七 关于方阵 A 可逆的证明	338	三、线性方程组解的判定	380
题型八 与 A 的伴随阵 A^* 有关联的	339	四、非齐次线性方程组与其导出组的	381
命题的证明	339	解的关系	381
题型九 关于矩阵秩的命题的证明	340	五、线性方程组解的性质	381
第三节 思维定势与综合题解析	342	六、线性方程组解的结构	381
一、思维定势	342	第二节 重要题型的解题方法和技巧	382
二、综合题解析	343	题型一 基本概念题(解的判定、性	382
习题二	344	质、结构)	382
第三章 向量	350	题型二 含有参数的线性方程组解的	386
第一节 重要概念、定理和公式的剖析	350	讨论	386
一、向量的概念与运算	350	题型三 讨论两个方程组的公共解	392
二、向量间的线性关系	350	题型四 有关基础解系的证明	393
三、向量组的秩和矩阵的秩	351	第三节 思维定势与综合题解析	395
四、向量的内积与施密特正交化方法	352	一、思维定势	395
五、重要定理与公式	353	二、综合题解析	395
六、小结	354	习题四	400
第二节 重要题型的解题方法和技巧	354	第五章 特征值和特征向量	405
题型一 讨论向量组的线性相关性	354	第一节 重要概念、定理和公式的剖析	405
题型二 有关向量组线性相关性命题	358	一、矩阵的特征值和特征向量的概念	405
的证明	358	二、相似矩阵及其性质	405
题型三 判定一个向量是否可由一组	364	三、矩阵可相似对角化的充要条件	406
向量线性表示	364	四、实对称矩阵及其性质	406
题型四 有关向量组线性表示命题的	366	五、重要公式与结论	407
证明	366	第二节 重要题型的解题方法和技巧	408
题型五 求向量组的极大线性无关组	367		
题型六 有关向量组或矩阵秩的计算			

题型一 求数值矩阵的特征值与特征向量	408
题型二 求抽象矩阵的特征值与特征向量	409
题型三 特征值与特征向量的逆问题	410
题型四 相似的判定及其逆问题	413
题型五 判断 A 是否可对角化	415
题型六 有关特征值与特征向量的证明题	418
第三节 思维定势与综合题解析	420
一、思维定势	420
二、综合题解析	420
习题五	426
第六章 二次型	429
第一节 重要概念、定理和公式的剖析	429
一、二次型及其矩阵表示	429
二、化二次型为标准型	429
三、配方法和正交变换法	430
四、二次型和矩阵的正定性及其判别法	431
第二节 重要题型的解题方法和技巧	434
题型一 二次型所对应的矩阵及其性质	434
题型二 化二次型为标准形	435
题型三 已知二次型通过正交变换化为标准形, 反求参数	439
题型四 有关二次型及其矩阵正定性的判定与证明	441
第三节 思维定势与综合题解析	443
一、思维定势	443
二、综合题解析	444
习题六	445

第三篇 概率论与数理统计

第一章 随机事件和概率	447
第一节 重要概念、定理和公式的剖析	447

一、随机试验和随机事件	447
二、事件的关系及其运算	448
三、事件的概率及其性质	450
四、条件概率与事件的独立性	451
五、重要概型	452
六、重要公式	452
第二节 重要题型的解题方法和技巧	453
题型一 古典概型与几何概型	453
题型二 事件的关系和概率性质的命题	457
题型三 条件概率与积事件概率的计算	458
题型四 全概率公式与 Bayes 公式的命题	459
题型五 有关 Bernoulli 概型的命题	462
第三节 思维定势与综合题解析	463
一、思维定势	463
二、综合题解析	465
习题一	465
第二章 随机变量及其分布	469
第一节 重要概念、定理和公式的剖析	469
一、概念与公式一览表	469
二、重要的一维分布	473
三、重要的二维分布	475
第二节 重要题型的解题方法和技巧	475
题型一 一维随机变量及其分布的概念、性质的命题	475
题型二 求一维随机变量的分布律、概率密度或分布函数	479
题型三 求一维随机变量函数的分布	482
题型四 二维随机变量及其分布的概念、性质的考查	485
题型五 求二维随机变量的各种分布与随机变量独立性的讨论	487

题型六 求两个随机变量的简单函数的分布	494	一、切比雪夫不等式	540
第三节 思维定势与综合题解析	499	二、中心极限定理	540
一、思维定势	499	三、重要公式与结论	541
二、综合题解析	501	四、注意	541
习题二	502	第二节 重要题型的解题方法和技巧	541
第三章 随机变量的数字特征	510	题型一 有关切比雪夫不等式与大数定律的命题	541
第一节 重要概念、定理和公式的剖析	510	题型二 有关中心极限定理的命题	543
一、一维随机变量的数字特征 (见表 3-1)	510	习题四	546
二、二维随机变量的数字特征 (见表 3-2)	512	第五章 数理统计的基本概念	547
三、几种重要的数学期望与方差 (见表 3-3)	513	第一节 重要概念、定理和公式的剖析	547
四、重要公式与结论	514	一、几个基本概念	547
第二节 重要题型的解题方法和技巧	514	二、三个抽样分布—— χ^2 分布、 t 分布与 F 分布	548
题型一 求一维随机变量的数字特征	514	三、正态总体下常用统计量的性质	548
题型二 求一维随机变量函数的数学期望	519	四、重要公式与结论	549
题型三 求二维随机变量及其函数的数字特征	521	五、经验分布函数	549
题型四 有关数字特征的证明题	528	第二节 重要题型的解题方法和技巧	550
题型五 数字特征在经济中的应用	529	题型一 求统计量的数字特征或取值的概率、样本的容量	550
第三节 思维定势与综合题解析	532	题型二 求统计量的分布	551
一、思维定势	532	第三节 思维定势	553
二、综合题解析	532	习题五	554
习题三	535	第六章 参数估计	556
第四章 大数定律和中心极限定理	540	第一节 重要概念、定理和公式的剖析	556
第一节 重要概念、定理和公式的剖析	540	一、矩估计与最大似然估计	556
		二、重要题型的解题方法和技巧	557
		题型一 求矩估计和最大似然估计	557
		习题六	562

第一篇 微积分

整个高等数学知识点多,学生感觉难学,主要是因为它具有以下特点:

1. 更高抽象性,抽象是全部数学的本质. 因为数学只保留了客观具体事物的数量关系和空间形式,去除了其他属性;高等数学的抽象是经过一系列的抽象化阶段逐步完成的;就好比极限这个概念完整严格的形成,经历过几百年,当年大数学家牛顿和莱布尼茨都不能很好理解,我们刚开始学习时不理解,也不是什么可耻的事情.

2. 精确性. 无论是数学推理还是证明,都要求有严格精密的根基. 学生学习专业课中可能遇到一种情况,社会生产实践活动并没有数学要求的那么严格,工程科学或经济类社会科学的建立沿用了数学的严格精确性,但实际生活中,有些理想化的数学模型是不可能产生的,如冲激函数、不满足傅里叶级数展开的信号(函数).

3. 广泛性. 各种事物的发展变化具有数学形式上的统一性,因此数学就有了广泛的应用性. 比如,研究完定积分,为了符合生产实际,拓展出来反常积分;因为积分区域发生了变化,又延伸出来多重积分和曲线曲面积分. 但是,其本质都是在定积分之上延伸出来的,都满足线性、可加性等等. 数学首先描绘的肯定是自然界中最普遍的一种现象,而线性是普遍存在的,我们在形成一个统一的度量衡世界时,线性是必然要被刻画的.

4. 工程性. 我们在高等数学学习微分方程这一工具时,学习一些常见且简单的微分方程如何去求解,实际上很多微分方程是没法用这种方法的,我们可能还要去寻求数值解,数值解的工具那就是级数. 一元函数不能满足我们实际中变量数量的要求,我们又拓展出来多元函数的相关知识. 一部分专业在学习专业课时还要用到场论的相关知识,所以要专门学习曲线曲面积分以及场论. 信息的表达或者函数的表达要统一,所以又在级数里面学了泰勒级数和傅里叶级数等,这些都是在生产实践中,根据生产力发展需要,不断被抽象,不断被后天赋予的各种数学知识,各种数学美都应运而生.

看完以上,您是不是觉得生无可恋,这么难的东西怎么学. 耐得住寂寞,经得住诱惑,多思考,勤动手,唯有练习才能功夫高.

所有的奋斗,都会有艰苦的环境、捉襟见肘的窘迫和焦虑不安的心境. 那时我们都以为,成功的那一天才会幸福. 但事实上,那些在奋斗之路上,让你内心获得力量的人和事,才是你绵长的生命里,最值得珍惜的幸福.

第一章 函数、极限和连续

第一节 重要概念、定理和公式的剖析

一、函数的基本性质

1. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 在对称区间 X 上有定义, 如果对于 $\forall x \in X$ 恒有

$$f(x) = f(-x) \quad (\text{或 } f(x) = -f(-x)),$$

则称 $f(x)$ 为偶函数(或 $f(x)$ 为奇函数).

偶函数 $f(x)$ 的图像关于 y 轴对称, 奇函数 $f(x)$ 的图像关于坐标原点对称.

奇偶函数的运算性质:

(1) 奇函数的代数和仍为奇函数; 偶函数的代数和仍为偶函数.

(2) 偶数个奇(或偶)函数之积为偶函数; 奇数个奇函数之积为奇函数.

(3) 一奇一偶的乘积为奇函数.

常见的偶函数: $|x|, \cos x, x^{2n}$ (n 为正整数), $e^{|x|}, e^{x^2}, \dots$.

常见的奇函数: $\sin x, \tan x, \frac{1}{x}, x^{2n+1}, \arcsin x, \arctan x, \dots$.

提示 判别给定函数的奇偶性, 主要是根据奇偶性的定义, 有时也用其运算性质.

注 (1) $f(x) + f(-x) = 0$ 是判别 $f(x)$ 为奇函数的有效方法.

(2) 函数的奇偶性是相对于对称区间而言的, 若定义域关于原点对称, 则该函数就不是奇或偶函数.

【例 1.1】 判别下列函数的奇偶性.

$$(1) y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}); \quad (2) y = \int_0^x f(t) dt, \text{ 其中 } f(x) \text{ 为奇函数};$$

$$(3) y = F(x) \left(\frac{1}{a^x - 1} + \frac{1}{2} \right), \text{ 其中 } a > 0, a \neq 1, F(x) \text{ 为奇函数}.$$

【解】 (1) 令 $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, 有 $f(-x) = \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1})$,

$$\begin{aligned} f(x) + f(-x) &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1}) \\ &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})(-x + \sqrt{x^2 + 1}) = \ln 1 = 0, \end{aligned}$$

故 $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 为奇函数.

$$(2) \text{ 令 } F(x) = \int_0^x f(t) dt,$$



$$\begin{aligned}
 F(-x) &= \int_0^{-x} f(t) dt \stackrel{\text{令 } t=-u}{=} \int_0^x f(-u)(-du) \\
 &= -\int_0^x f(-t) dt = \int_0^x f(t) dt \quad (\text{因为 } f(x) \text{ 为奇函数}) \\
 &= F(x),
 \end{aligned}$$

故 $y = \int_0^x f(t) dt$ 为偶函数.

(3) 令 $g(x) = \frac{1}{a^x - 1} + \frac{1}{2}$, 则

$$g(-x) = \frac{1}{a^{-x} - 1} + \frac{1}{2} = \frac{a^x}{1 - a^x} + \frac{1}{2} = -\frac{a^x}{a^x - 1} + \frac{1}{2},$$

$$g(x) + g(-x) = \frac{1}{a^x - 1} + \frac{1}{2} - \frac{a^x}{a^x - 1} + \frac{1}{2} = 0,$$

所以 $g(x)$ 为奇函数, 又 $F(x)$ 为奇函数.

故 $y = F(x) \left(\frac{1}{a^x - 1} + \frac{1}{2} \right)$ 为偶函数.

2. 周期性

设函数 $f(x)$ 在区间 X 上有定义, 若存在一个与 x 无关的正数 T , 使对于任一 $x \in X$, 恒有

$$f(x+T) = f(x),$$

则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数, 把满足上式的最小正数 T 称为函数 $f(x)$ 的周期. 周期函数的运算性质:

(1) 若 T 为 $f(x)$ 的周期, 则 $f(ax+b)$ 的周期为 $\frac{T}{|a|}$.

(2) 若 $f(x), g(x)$ 均是以 T 为周期的函数, 则 $f(x) \pm g(x)$ 也是以 T 为周期的函数.

(3) 若 $f(x), g(x)$ 分别是以 T_1, T_2 ($T_1 \neq T_2$) 为周期的函数, 则 $f(x) \pm g(x)$ 是以 T_1, T_2 的最小公倍数为周期的函数.

常见函数的周期: $\sin x, \cos x$, 其周期 $T = 2\pi$;

$\tan x, \cot x, |\sin x|, |\cos x|$, 其周期 $T = \pi$.

提示 判别给定函数 $f(x)$ 是否为周期函数, 主要是根据周期的定义, 有时也用其运算性质.

【例 1.2】 设对一切实数 x , 有 $f\left(\frac{1}{2} + x\right) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f^2(x)}$, 则 $f(x)$ 是周期为 _____ 的周期函数.

$$\text{【解】 } f\left[\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + x\right)\right] = \frac{1}{2} + \sqrt{f\left(\frac{1}{2} + x\right) - f^2\left(\frac{1}{2} + x\right)}$$

$$= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - f(x) + f^2(x)}$$

$$= \frac{1}{2} + \left[f(x) - \frac{1}{2}\right] = f(x), \quad (\text{由题设 } f(x) \geq \frac{1}{2})$$

即 $f(1+x) = f(x)$, 故可知 $f(x)$ 的周期为 1.

【例 1.3】 设 $f(x)$ 是在 $(-\infty, +\infty)$ 上以 T 为周期的连续函数,

(1) 如果 $f(x)$ 是奇函数, 则函数 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ 也是以 T 为周期的周期函数;

(2) 如果 $\int_a^{a+T} f(x)dx \neq 0$, 则函数 $G(x) = \int_a^x f(t)dt$ 可表示成线性函数与以 T 为周期的周期函数之和.

【证】(1) 由周期函数及奇函数的积分性质得

$$\begin{aligned} F(x+T) &= \int_0^{x+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt + \int_T^{x+T} f(t)dt \\ &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt + \int_0^x f(t)dt = 0 + \int_0^x f(t)dt = F(x), \end{aligned}$$

所以, $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ 是以 T 为周期的周期函数.

(2) 对于任意的常数 k , 有

$$G(x) = \int_a^x [f(t) - k + k]dt = \int_a^x [f(t) - k]dt + k(x-a).$$

因为 $k(x-a)$ 是线性函数, 所以, 只需证明当 k 取某一值时, $g(x) = \int_a^x [f(t) - k]dt$ 以 T 为周期即可.

由周期函数的定积分性质得

$$\begin{aligned} g(x+T) &= \int_a^{x+T} [f(t) - k]dt = \int_a^x [f(t) - k]dt + \int_x^{x+T} [f(t) - k]dt \\ &= g(x) + \int_0^T f(t)dt - kT, \end{aligned}$$

取 $k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)dt$, 有 $g(x+T) = g(x)$, 即 $g(x)$ 是以 T 为周期的周期函数.

3. 有界性

设函数 $y = f(x)$ 在区间 X 上有定义, 如果 $\exists M > 0$, 使得对于一切 $x \in X$, 恒有

$$|f(x)| \leq M,$$

则称 $f(x)$ 在区间 X 上有界; 若不存在这样的 M , 则称 $f(x)$ 在区间 X 上无界.

注 函数 $f(x)$ 是否有界是相对于某个区间而言的.

六个常见的有界函数 $ \sin x \leq 1,$	$ \cos x \leq 1,$	$x \in (-\infty, +\infty)$
$ \arcsin x \leq \frac{\pi}{2},$	$ \arccos x \leq \pi,$	$x \in [-1, 1]$
$ \arctan x < \frac{\pi}{2},$	$ \operatorname{arccot} x < \pi,$	$x \in (-\infty, +\infty)$

提示 判别函数的界, 一般先要对函数取绝对值, 然后用不等式放缩法求解; 或借助导数利用求最大(小)值法处理.

【例 1.4】函数 $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ 在定义域内为

(A) 有上界无下界.

(B) 有下界无上界.

(C) 有界, 且 $-\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$.

(D) 有界且 $-2 \leq f(x) \leq 2$.

【 】

【解】 $|f(x)| = \left| \frac{x}{1+x^2} \right| = \frac{|x|}{1+x^2} \leq \frac{|x|}{2|x|} = \frac{1}{2}$ (因为 $1+x^2 \geq 2|x|$),

故 $-\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$, 可知该选(C)

【例 1.5】函数 $f(x) = \frac{\lg x}{x}$ 在区间 $[\frac{1}{2}, 1]$ 上为

(A) 有上界无下界.

(B) 有下界无上界.

(C) 有界且 $2\lg \frac{1}{2} \leq f(x) \leq 0$.

(D) 有界且 $\lg \frac{1}{2} \leq f(x) \leq -\frac{1}{4}$.

【解】 $f(x) = \frac{\lg x}{x}, f'(x) = \frac{x \frac{1}{x \ln 10} - \lg x}{x^2} = \frac{1}{x^2}(\lg e - \lg x)$.

因为 $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, 所以 $f'(x) > 0$. 故 $f(x)$ “ \uparrow ”.

因此, $\lg \frac{1}{2} \leq f(x) \leq \lg 1$, 即 $2\lg \frac{1}{2} \leq f(x) \leq 0$, 可知, 该选(C).

4. 单调性

设函数 $y = f(x)$ 在区间 X 上有定义, 如果对 $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2$, 恒有

$f(x_1) < f(x_2)$ (或 $f(x_1) > f(x_2)$),

则称 $f(x)$ 在区间 X 上是单调增加(或单调减少)的.

提示 若 $f(x)$ 在区间 X 上没有告知为可导, 则其单调性的判别用定义; 若 $f(x)$ 在区间 X 上可导, 则利用导数判别更简便.

【例 1.6】设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有定义, $x_1 > 0, x_2 > 0$. 求证:

(1) 若 $\frac{f(x)}{x}$ 单调下降, 则 $f(x_1 + x_2) \leq f(x_1) + f(x_2)$;

(2) 若 $\frac{f(x)}{x}$ 单调上升, 则 $f(x_1 + x_2) \geq f(x_1) + f(x_2)$.

【证】(1) 设 $x_1 > 0, x_2 > 0$, 且 $x_1 < x_2$. 于是

$$\frac{f(x_2)}{x_2} \leq \frac{f(x_1)}{x_1} \Rightarrow x_1 f(x_2) \leq x_2 f(x_1),$$

$$\frac{f(x_1 + x_2)}{x_1 + x_2} \leq \frac{f(x_2)}{x_2} \Rightarrow x_2 f(x_1 + x_2) \leq x_1 f(x_2) + x_2 f(x_2)$$

$$\Rightarrow x_2 f(x_1 + x_2) \leq x_2 f(x_1) + x_2 f(x_2) \Rightarrow f(x_1 + x_2) \leq f(x_1) + f(x_2).$$

(2) 的证明略.

【例 1.7】设函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 且 $f(x) > 0$, 令

$$F(x) = \begin{cases} \frac{\int_0^x t f(t) dt}{\int_0^x f(t) dt}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$



证明: $F(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调增加.

【分析】只需证明 $F(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 在 $(0, +\infty)$ 内 $F'(x) > 0$ 即可.