

2020

全国各大考研辅导机构通用教材

李永乐·王式安考研数学系列

数学历年真题 全精解析 · 数学二

主编 ◎ 李永乐 王式安 武忠祥

编委 ◎ 王式安 刘喜波 李永乐 季文铎 武忠祥 姜晓千

核心搭配:《复习全书》+《660题》+《历年真题》+《330题》

互联网可视化版本，用微信扫书中二维码(详见封二使用说明)
观看重难点讲解视频

关注公众号:金榜图书考研
回复关键字“真题”
可以获得更多早年的真题电子版资料

汇集历年考试原题
归纳总结典型方法
发现命题规律找准复习方向
解析细致侧重脉络培养能力

专属福利

7大礼包

详见封三

关注公众号
回复关键字
“2020考研数学”
可免费获取
《2020真题解析》
不定时
还会更新小福利哟





金榜图书

2020

全国各大考研辅导机构通用教材

李永乐·王式安 考研数学系列

数学历年真题

全精解析

数学
二

主编 ◎ 李永乐 王式安 武忠祥

编委 ◎ 王式安 刘喜波 李永乐 季文铎 武忠祥 姜晓千

内容简介

考研数学历年真题是题题经典,做真题对理解和熟悉考研数学考试的出题方式和解题规律的作用巨大。本书编写团队依据多年参与命题和阅卷的经验精心编写了本书。本书共分三篇。第一篇给出最新的真题和解析,目的是让读者了解最新考题的结构形式和难易程度,方便复习备考。第二篇是历年的试题。第三篇将真题按考点所属内容分类并进行解析。同时,精心选取其他卷别的试题作为练习题,供考生练习,以便使考生在熟练掌握基本知识的基础上,能够达到轻松解答真题的水平。每道练习题都配备了详细的参考答案和解析,以便考生遇到疑难问题时能及时得到最详尽的指导。

图书在版编目(CIP)数据

数学历年真题全精解析. 数学二/李永乐,王式安,武忠祥主编. —西安:西安交通大学出版社,2018.7

ISBN 978-7-5693-0770-2

I. ①数… II. ①李… ②王… ③武… III. ①高等数学—研究生—入学考试—题解
IV. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 162202 号

书 名 数学历年真题全精解析·数学二
主 编 李永乐 王式安 武忠祥
策划编辑 张瑞娟
责任编辑 王晓芬

出版发行 西安交通大学出版社
(西安市兴庆南路 10 号 邮政编码 710049)
网 址 <http://www.xjtupress.com>
电 话 (029)82668357 82667874(发行中心)
(029)82668315(总编办)
传 真 (029)82668280
印 刷 三河市燕山印刷有限公司

开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 22 字数 460 千字
版次印次 2019 年 1 月第 1 版 2019 年 1 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5693-0770-2
定 价 77.80 元

读者购书、书店添货,如发现印装质量问题,请与本社发行中心联系、调换。

版权所有 侵权必究



金榜图书天猫官方店
店名: 时代巨流图书专营店
(<http://sdjlts.tmall.com>)



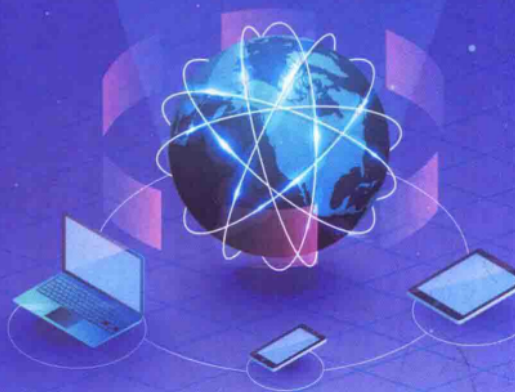
西安交通大学出版社
天猫官方店



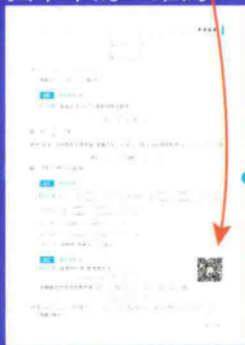
西安交通大学出版社
官方微信店

本书**二维码扫码**使用说明

V研客独创扫码解答，扫难题，求问答
助你制胜考研，**使用步骤**如下：



1. 打开【微信】扫一扫 扫书中的二维码



2. 领取专属优惠券



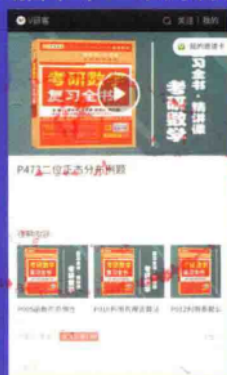
3. 注册验证→0元购



4. 关注V研客



5. 微信扫描书中二维码观看课程



小V特别提醒

关注V研客，
点击【分享】
有考研新人
礼包哦~

温馨提示：V研客最新推出专属“超级会员”

会员可享有：

①**原价1698元**的“数英政全程班”（总课时：338+）

②**专属答疑服务**

现持本书专享价：**68元**

扫描右侧二维码成为超级会员，专业课信息请关注公众号：**V研客考研**



本页所有服务由微客兄弟网络科技有限公司（北京）有限公司提供，如有变更恕不另行通知
联系方式 微信公众号：V研客考研 电话：010-51906235 QQ：3053326262

金榜考研数学系列图书简介及本书使用说明

考研数学满分 150 分,数学在考研科目中的比重明显,同时又因数学学科本身的特点,考生的数学成绩历年来总是差别很大,因此有“得数学者得考研”之说。既然数学对考研成绩的意义如此重要,就有必要探讨一下影响数学成绩的主要因素。

本系列图书编写老师们根据多年的命题经验和阅卷经验总结,发现考研数学命题的灵活性非常大,反映在命题中,不仅仅表现在一个知识点与多个知识点的考查难度不同,更多的是表现在考查多个知识点的综合上,这些题目在表达上多一个字或多一句话,难度都会千差万别。正是这些综合型题目拉开了考试成绩的距离,而构成这些难点的主要因素,实际上是最基础的基本概念、定理和公式的综合。同时,从阅卷反映的问题来看,考生答错题目的主要原因也是对基本概念、定理和公式记忆和掌握得不够熟练所致。总结为一句话,那就是:要想数学拿高分,就必须熟练掌握、灵活运用基本概念、定理和公式。

基于此,李永乐、王式安考研数学辅导团队结合多年来考研辅导和研究的经验,精心编写了本系列图书,目的在于帮助考生有计划、有步骤地完成数学复习,从基本概念、定理和公式的记忆,到对其的熟练运用,循序渐进。

一、本系列重点图书和复习建议

每年硕士研究生入学数学考试的时间一般都安排在上午,考生们可将数学的复习时间安排在每天上午。基础、强化阶段,每天至少应安排 2 小时来复习数学,对于数学基础较差的同学建议提早复习基础知识,每天再多花点时间来做做习题。

重点图书	复习建议
<p>《数学复习全书》</p>	<p>重视基础积累,纵向学习,夯实知识点</p> <p>由于全书的编写起点是学完大学数学课程,所以建议基础薄弱的同学,先花点时间整体的看看书中的理论知识,然后再看例题。以章或节为单位,学习新内容前要复习前面的内容,按照规律来复习,经过必要的重复会起到事半功倍的效果。系统复习,打好基础,特别是对大纲中要求的基本概念、理论、方法要系统理解和掌握。</p>
<p>《数学基础过关 660 题》</p>	<p>在完成基础知识的学习后,有针对性地做一些练习。熟练掌握定理公式和解题技巧,加强知识点的前后联系,体系化,系统化,分清重难点,让复习周期尽量缩短。</p> <p>虽说书中都是选择题和填空题,同学们不要轻视,也不要一开始就盲目做题。看到一道题,要能分辨出是哪个知识点,考什么,然后做题过程中看看自己是否掌握了,应用的定理、公式的条件是否熟悉。这样才算真正做一道题。</p>
<p>《数学历年真题全精解析》</p>	<p>通过真题,进一步提高解题能力和技巧,达到实际考试的要求。</p> <p>书中将真题按考点进行分类。对重点题型和自己薄弱的内容进行突破,达到全面掌握,不留考点空白。</p> <p>第一阶段,看看各年真题,熟悉题型和常考点。</p> <p>第二阶段,进行专项复习。</p>

重点图书	复习建议
《数学历年真题全精解析·试卷版》	<p style="text-align: center;">考前真题真练,提高应考技巧</p> <p>仿照真实试卷,独立试卷,答题卡,答题纸。模拟考场真实环境。按照考试的要求在规定时间内去做一套真题,调动所有知识储备,调整心态,快速进入考试状态。做过的真题,自己要总结自己的薄弱环节,有针对性的复习,加深记忆。</p>
《高等数学辅导讲义》	<p style="text-align: center;">单科强化</p> <p>武忠祥老师的高数教学讲稿改编而成,系统阐述了高等数学的基础知识。例题都经过严格筛选、归纳。多年经验总结,对同学们的重点、难点的把握更准确、更有针对性。认真研读,做到举一反三。</p>
《线性代数辅导讲义》	<p style="text-align: center;">单科强化</p> <p>李永乐老师的代数教学讲稿改编而成,系统阐述了线性代数的基础知识。例题都经过严格筛选、归纳。多年经验总结,对同学们的重点、难点的把握更准确、更有针对性。认真研读,做到举一反三。</p>
《概率论与数理统计辅导讲义》	<p style="text-align: center;">单科强化</p> <p>王式安老师的概率教学讲稿改编而成,系统阐述了概率论与数理统计的基础知识。例题都经过严格筛选、归纳。多年经验总结,对同学们的重点、难点的把握更准确、更有针对性。认真研读,做到举一反三。</p>
《数学强化通关330题》	<p style="text-align: center;">强化阶段的练习题,综合训练必备。</p> <p>具有典型性、针对性、技巧性、综合性等特点,可以帮助考生突破重点、难点,熟悉解题思路和方法,增强应试能力。与《660题》互为补充,搭配使用,效果更佳。</p>
《李永乐数学决胜冲刺6+2》	<p style="text-align: center;">冲刺模拟题</p> <p>通过整套题的训练,进行总结和梳理。不同于重点题型的练习,需要全面的知识,要综合应用。必要时复习一下基本概念、公式、定理,准确记忆。</p>

备注:以上内容仅供参考。各位同学可以根据自身的能力和學習习惯进行调整。

二、本书使用说明

本书完整收录了2005~2019年考研数学(二)的全部试题,还精选了其他卷别的试题做为练习题。力争做到考点全覆盖,题型多样,重点突出,不简单重复。书中的每道题我们给出的参考答案有常用、典型的解题方法,也有技巧强的特殊解法。分析过程逻辑严谨,思路清晰,具有很强的可操作性,通过学习同学们可以独立完成同类题的解答。

同时还请教学经验丰富的老师对书中的经典题进行讲解,扫附在题目旁边的二维码即可观看。具体操作方式可见封二“本书二维码扫码使用说明”。

使用本书的同时,也可以配合使用本书作者团队编写的《数学基础过关660题》、《数学复习全书》、《数学强化通关330题》等,提高复习效率。

前言

从真题中你能够了解一个真实的考研数学,寻找考研数学的规律

真题是教育部考试中心一届又一届命题组老师们集体智慧的结晶,题目经典,又有规律可循。为了帮助广大考生能够在较短的时间内,准确理解和熟练掌握考研数学考试的出题方式和解题规律,全面提高解题能力,进而更好地驾驭考试,本书编写团队依据15年的命题与阅卷经验,并结合二十多年的考研辅导和研究精华,精心编写了本书,真正起到帮助同学们提高综合分析和综合解题能力的作用。

历年来,研究生入学考试数学的知识点没有太大变化,并且考查的重难点也比较稳定,都是往年考试反复考查的内容,依据往年考题掌握了这些重难点,我们就等于成功了一半。练真题,反复揣摩是有效把握这些重难点的最佳途径。考生们可以思考考过的知识点会再从什么角度命题,如何与没有考过的知识点结合起来考查,进而复习没有考过的知识点,这就可以从深度、广度上全方位把握知识点了。也因此,真题能够最有效地暴露我们的不足和复习误区,提供更有效的复习思路和策略,甚至可以说,真题就是最好的“辅导老师”,它告诉我们考试会考什么,怎么考,反过来又指导我们思考如何应对,也只有真题准确体现了考试所要求的能力、方法。

真题对大部分考生来说都是“陌生”的。真题命制科学,经过命题人的反复推敲,是市面上的练习题所无法比拟的。市面上的练习题难易适中、命制科学、贴近考试要求的很少。做真题,反复揣摩,能节省我们宝贵的复习时间,达到事半功倍的效果。紧紧抓住真题,在考试时也可以使我们做到从容应对。

本书共分三篇。第一篇给出最新的真题和解析,目的是让读者了解最新考题的结构形式和难易程度,方便复习备考;第二篇是历年的试题;第三篇将真题按考点所属内容分类并进行解析;第三篇是本书的精华部分,各章编排如下:

1. 本章导读

设置本部分的目的是使考生明白此章的考试内容和考试重点,从而复习时目标明确。

2. 试题特点

本部分总结此章的历年考试出题规律,分析可能的出题点。

3. 考题详析

本部分对历年真题的题型进行归纳分类,总结各种题型的解题方法。这些解法均来自各位专家多年教学实践总结和长期命题阅卷经验。针对以往考生在解题过程中普遍存在的问题及常犯的错误,给出相应的注意事项,对每一道真题都给出解题思路分析,以便考生真正地理解和掌握解题方法。

4. 练习题

数学复习离不开做题,只有适量的练习才能巩固所学的知识。为了使考生更好地巩固所学知识,提高实际解题能力,本书作者从1987~2004年的真题和历年其他卷别的试题中精心选取同类考题作为练习题,供考生练习,以便使考生在熟练掌握基本知识的基础上,能够轻松解答真题。同时,每道练习题都配备了详细的参考答案和解析,以便考生解答疑难问题时能及时得到最详尽的指导。

建议考生在使用本书时不要就题论题,而是要多动脑,通过对题目的练习、比较、思考,总结并发现题目设置和解答的规律性。请大家一定要在今后的复习中,时刻想到将各个方面的知识融会贯通,做好知识的串联和总结,以检验自己对问题的把握程度,真正掌握应试解题的金钥匙,从而迅速提高知识水平和应试能力,取得理想分数。

另外,为了更好地帮助同学们进行复习,“李永乐考研数学辅导团队”特在新浪微博上开设答疑专区,同学们在考研数学复习中,如若遇到任何问题,即可在线留言,团队老师将尽心为你解答。请访问 weibo.com/清华李永乐考研数学辅导团队。

新浪微博:清华李永乐考研数学辅导团队



微信公众号:金榜图书考研



希望本书能对同学们的复习备考带来更大的帮助。对书中的不足之处,恳请读者批评指正。
祝同学们复习顺利,心想事成,考研成功!

编者

2019年1月

目录

最新真题

第一篇 最新真题

- 2019 年全国硕士研究生入学统一考试数学(二)试题 1
- 2019 年全国硕士研究生入学统一考试数学(二)参考答案 5

第二篇 历年真题

- 2018 年全国硕士研究生入学统一考试试题 13
- 2017 年全国硕士研究生入学统一考试试题 16
- 2016 年全国硕士研究生入学统一考试试题 19
- 2015 年全国硕士研究生入学统一考试试题 22
- 2014 年全国硕士研究生入学统一考试试题 25
- 2013 年全国硕士研究生入学统一考试试题 28
- 2012 年全国硕士研究生入学统一考试试题 31
- 2011 年全国硕士研究生入学统一考试试题 34
- 2010 年全国硕士研究生入学统一考试试题 37
- 2009 年全国硕士研究生入学统一考试试题 40
- 2008 年全国硕士研究生入学统一考试试题 43
- 2007 年全国硕士研究生入学统一考试试题 46
- 2006 年全国硕士研究生入学统一考试试题 49
- 2005 年全国硕士研究生入学统一考试试题 52

第三篇 真题解析

第一部分 高等数学	55
第一章 函数 极限 连续	55
第二章 一元函数微分学	95
第三章 一元函数积分学	145
第四章 多元函数微分学	188
第五章 二重积分	210
第六章 常微分方程	228
第二部分 线性代数	245
第一章 行列式	245
第二章 矩阵	254
第三章 向量	272
第四章 线性方程组	285
第五章 特征值与特征向量	307
第六章 二次型	327

一、选择题(1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.)

- (1) 当 $x \rightarrow 0$ 时,若 $x - \tan x$ 与 x^k 是同阶无穷小,则 $k =$
 (A)1. (B)2. (C)3. (D)4.
- (2) 曲线 $y = x \sin x + 2 \cos x \left(-\frac{\pi}{2} < x < 2\pi\right)$ 的拐点是
 (A)(0, 2). (B)(π , -2). (C) $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. (D) $\left(\frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}\right)$.
- (3) 下列反常积分发散的是
 (A) $\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx$. (B) $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$.
 (C) $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$. (D) $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$.
- (4) 已知微分方程 $y'' + ay' + by = ce^x$ 的通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^{-x} + e^x$, 则 a, b, c 依次为
 (A)1, 0, 1. (B)1, 0, 2. (C)2, 1, 3. (D)2, 1, 4.
- (5) 已知平面区域 $D = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq \frac{\pi}{2}\}$, 记 $I_1 = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, $I_2 = \iint_D \sin \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$,
 $I_3 = \iint_D (1 - \cos \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy$ 则
 (A) $I_3 < I_2 < I_1$. (B) $I_2 < I_1 < I_3$.
 (C) $I_1 < I_2 < I_3$. (D) $I_2 < I_3 < I_1$.
- (6) 设函数 $f(x), g(x)$ 的 2 阶导函数在 $x = a$ 处连续, 则 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - g(x)}{(x-a)^2} = 0$ 是两条曲线 $y = f(x), y = g(x)$ 在 $x = a$ 对应的点处相切及曲率相等的
 (A)充分不必要条件. (B)充分必要条件.
 (C)必要不充分条件. (D)既不充分与不必要条件.
- (7) 设 A 是 4 阶矩阵, A^* 为 A 的伴随矩阵, 若线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系中只有 2 个向量, 则 $r(A^*) =$
 (A)0. (B)1. (C)2. (D)3.
- (8) 设 A 是 3 阶实对称矩阵, E 是 3 阶单位矩阵. 若 $A^2 + A = 2E$, 且 $|A| = 4$, 则二次型 $x^T A x$ 的规范形为
 (A) $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$. (B) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$.
 (C) $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$. (D) $-y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$.

二、填空题(9~14 小题,每小题 4 分,共 24 分.)

- (9) $\lim_{x \rightarrow 0} (x + 2^x)^{\frac{2}{x}} =$ _____.
- (10) 曲线 $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases}$ 在 $t = \frac{3\pi}{2}$ 对应点处的切线在 y 轴上的截距为 _____.
- (11) 设函数 $f(u)$ 可导, $z = yf\left(\frac{y^2}{x}\right)$, 则 $2x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} =$ _____.
- (12) 曲线 $y = \ln \cos x \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}\right)$ 的弧长为 _____.
- (13) 已知函数 $f(x) = x \int_1^x \frac{\sin t^2}{t} dt$, 则 $\int_0^1 f(x) dx =$ _____.

(14) 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, A_{ij} 表示 $|A|$ 中 (i, j) 元的代数余子式, 则 $A_{11} - A_{12} =$

三、解答题 (15 ~ 23 小题, 共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^{2x}, & x > 0, \\ xe^x + 1, & x \leq 0, \end{cases}$ 求 $f'(x)$, 并求 $f(x)$ 的极值.

(16) (本题满分 10 分)

求不定积分 $\int \frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)} dx$.

(17) (本题满分 10 分)

设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y' - xy = \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\frac{x^2}{2}}$ 满足条件 $y(1) = \sqrt{e}$ 的特解.

(I) 求 $y(x)$;

(II) 设平面区域 $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq y(x)\}$, 求 D 绕 x 轴旋转所得旋转体的体积.

(18) (本题满分 10 分)

已知平面区域 $D = \{(x, y) \mid |x| \leq y, (x^2 + y^2)^3 \leq y^4\}$, 计算二重积分 $\iint_D \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy$.

(19) (本题满分 10 分)

设 n 是正整数, 记 S_n 为曲线 $y = e^{-x} \sin x (0 \leq x \leq n\pi)$ 与 x 轴所围图形的面积. 求 S_n , 并求 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

(20) (本题满分 11 分)

已知函数 $u(x, y)$ 满足 $2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3 \frac{\partial u}{\partial y} = 0$, 求 a, b 的值, 使得在变换 $u(x, y) = v(x, y)e^{ax+by}$ 之下, 上述等式可化为函数 $v(x, y)$ 的不含一阶偏导数的等式.

(21) (本题满分 11 分)

已知函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上具有 2 阶导数, 且 $f(0) = 0, f(1) = 1, \int_0^1 f(x) dx = 1$, 证明:

(I) 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f'(\xi) = 0$;

(II) 存在 $\eta \in (0, 1)$, 使得 $f''(\eta) < -2$.

(22) (本题满分 11 分)

已知向量组 I: $\alpha_1 = (1, 1, 4)^T, \alpha_2 = (1, 0, 4)^T, \alpha_3 = (1, 2, a^2 + 3)^T$

II: $\beta_1 = (1, 1, a+3)^T, \beta_2 = (0, 2, 1-a)^T, \beta_3 = (1, 3, a^2 + 3)^T$

若向量组 I 与 II 等价, 求 a 的取值, 并将 β_3 用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

(23) (本题满分 11 分)

已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 2 & x & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ 与 $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix}$ 相似.

(I) 求 x, y ;

(II) 求可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = B$.

2019年全国硕士研究生入学统一考试

数学(二) 参考答案

一、选择题

(1)【答案】 C

【解析】 由于当 $x \rightarrow 0$ 时, $x - \tan x \sim -\frac{1}{3}x^3$, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x^3} = -\frac{1}{3},$$

所以 $k = 3$, 故应选(C).

(2)【答案】 B

【解析】 $y' = \sin x + x \cos x - 2 \sin x = x \cos x - \sin x$ $y'' = \cos x - x \sin x - \cos x = -x \sin x$ 令 $y'' = 0$ 得 $x = 0, x = \pi$.又在 $x = 0$ 的两侧, y'' 不变号, 则 $(0, 2)$ 不是拐点;在 $x = \pi$ 的两侧, y'' 变号, 则 $(\pi, -2)$ 是拐点.

(3)【答案】 D

【解析】 $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \Big|_0^{+\infty} = \infty$,

则该反常积分发散.

(4)【答案】 D

【解析】 由题知, 齐次方程的通解为 $(C_1 + C_2 x)e^{-x}$,非齐次方程的特解为 e^x .因而特征方程 $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ 有二重根 -1 , 所以 $a = 2, b = 1$.把 $y = e^x$ 代入方程 $y'' + ay' + by = ce^x$ 得 $c = 4$.

(5)【答案】 A

【解析】 在区域 D 上, $0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq \frac{\pi}{2}$,显然 $\sin \sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2}$.下比较 $1 - \cos \sqrt{x^2 + y^2}$ 与 $\sin \sqrt{x^2 + y^2}$ 的大小.令 $u = \sqrt{x^2 + y^2}, 0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}$

$$1 - \cos u - \sin u = 1 - \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + u\right) \leq 0$$

因而 $1 - \cos \sqrt{x^2 + y^2} \leq \sin \sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ 所以 $I_3 < I_2 < I_1$, 选(A).

(6)【答案】 A

【解析】 充分性: 由泰勒公式知

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + o(x-a)^2$$

$$g(x) = g(a) + g'(a)(x-a) + \frac{g''(a)}{2!}(x-a)^2 + o(x-a)^2$$

$$\text{则 } 0 = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f(a) - g(a)) + (f'(a) - g'(a))(x-a) + \frac{1}{2}(f''(a) - g''(a))(x-a)^2 + o(x-a)^2}{(x-a)^2}$$

$$\text{即 } f(a) = g(a), f'(a) = g'(a), f''(a) = g''(a),$$

由此可知两条曲线 $y = f(x), y = g(x)$ 在 $x = a$ 对应的点处相切及曲率相等.

必要性: 由两条曲线 $y = f(x), y = g(x)$ 在 $x = a$ 对应的点处相切及曲率相等可知

$$f(a) = g(a), f'(a) = g'(a),$$

$$\frac{|f''(a)|}{[1 + f'^2(a)]^{\frac{3}{2}}} = \frac{|g''(a)|}{[1 + g'^2(a)]^{\frac{3}{2}}}.$$

由此可知, $|f''(a)| = |g''(a)|$. 则 $f''(a) = g''(a)$ 或 $f''(a) = -g''(a)$.

当 $f''(a) = -g''(a)$, 此时,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - g(x)}{(x-a)^2} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - g'(x)}{2(x-a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x) - g''(x)}{2} = f''(a)$$

$f''(a)$ 不一定为零.

$$\text{例如 } f(x) = (x-a)^2, g(x) = -(x-a)^2.$$

故必要性不成立, 故应选(A).

(7)【答案】 A

【解析】 由 $n - r(A) = 4 - r(A) = 2$

$$\text{知 } r(A) = 2, \text{ 再由 } r(A^*) = \begin{cases} n, & r(A) = n, \\ 1, & r(A) = n-1, \\ 0, & r(A) < n-1, \end{cases}$$

$\therefore r(A^*) = 0$, 选(A).

(8)【答案】 C

【解析】 规范形由 p, q 而定, 判断特征值入手.

设 $A\alpha = \lambda\alpha, \alpha \neq 0$. 由 $A^2 + A = 2E$

有 $A^2\alpha + A\alpha - 2\alpha = 0$ 即 $(\lambda^2 + \lambda - 2)\alpha = 0$,

知 $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, 矩阵 A 的特征值只能是 1 或 -2.

又因 $|A| = 4$, 所以矩阵 A 的特征值是: 1, -2, -2.

从而二次型的规范形是 $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$. 选(C).

二、填空题

(9)【答案】 $4e^2$

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0} (x + 2^x)^{\frac{2}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} [1 + (x + 2^x - 1)]^{\frac{2}{x}}$

$$\text{又 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(x + 2^x - 1)}{x} = 2(1 + \ln 2).$$

则原式 $= e^{2+2\ln 2} = 4e^2$.

(10)【答案】 $\frac{3}{2}\pi + 2$

【解析】 切点为 $(\frac{3}{2}\pi + 1, 1)$,

$$\text{斜率: } k = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\frac{3}{2}\pi} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} \Big|_{t=\frac{3}{2}\pi} = -1$$

所求切线方程为: $y = -x + \frac{3}{2}\pi + 2$,

则 y 轴上截距为 $\frac{3}{2}\pi + 2$.

(11)【答案】 $yf\left(\frac{y^2}{x}\right)$

【解析】 $\frac{\partial z}{\partial x} = yf'\left(\frac{y^2}{x}\right) \cdot \left(-\frac{y^2}{x^2}\right) = -\frac{y^3}{x^2}f'\left(\frac{y^2}{x}\right)$,

$\frac{\partial z}{\partial y} = f\left(\frac{y^2}{x}\right) + yf'\left(\frac{y^2}{x}\right)\frac{2y}{x} = f\left(\frac{y^2}{x}\right) + \frac{2y^2}{x}f'\left(\frac{y^2}{x}\right)$

则 $2x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = yf\left(\frac{y^2}{x}\right)$.

(12)【答案】 $\frac{1}{2}\ln 3$

【解析】 $S = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1+y'^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1+\tan^2 x} dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sec x dx = \ln(\sec x + \tan x) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= \ln\sqrt{3} = \frac{1}{2}\ln 3.$$

(13)【答案】 $\frac{1}{4}(\cos 1 - 1)$

【解析】 $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(x \int_1^x \frac{\sin t^2}{t} dt\right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\int_1^x \frac{\sin t^2}{t} dt\right) dx^2$

$$= \frac{x^2}{2} \int_1^x \frac{\sin t^2}{t} dt \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2 \sin x^2}{x} dx$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^1 x \sin x^2 dx$$

$$= \frac{1}{4} \cos x^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{4}(\cos 1 - 1).$$

(14)【解】 由 $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -4$

按第 1 行展开又有 $|A| = 1 \cdot A_{11} + (-1)A_{12} = A_{11} - A_{12}$

$\therefore A_{11} - A_{12} = -4$.

(15)【解】 当 $x > 0$ 时, $f'(x) = (e^{2x \ln x})'$

$$= e^{2x \ln x} (2x \ln x + 2) = 2x^{2x} (\ln x + 1)$$

当 $x < 0$ 时, $f'(x) = (x+1)e^x$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{2x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{2x \ln x} - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x \ln x}{x} = \infty$$

则 $f'(0)$ 不存在.

令 $f'(x) = 0$ 得 $x = -1, x = \frac{1}{e}$, 而 $f'(0)$ 不存在.