

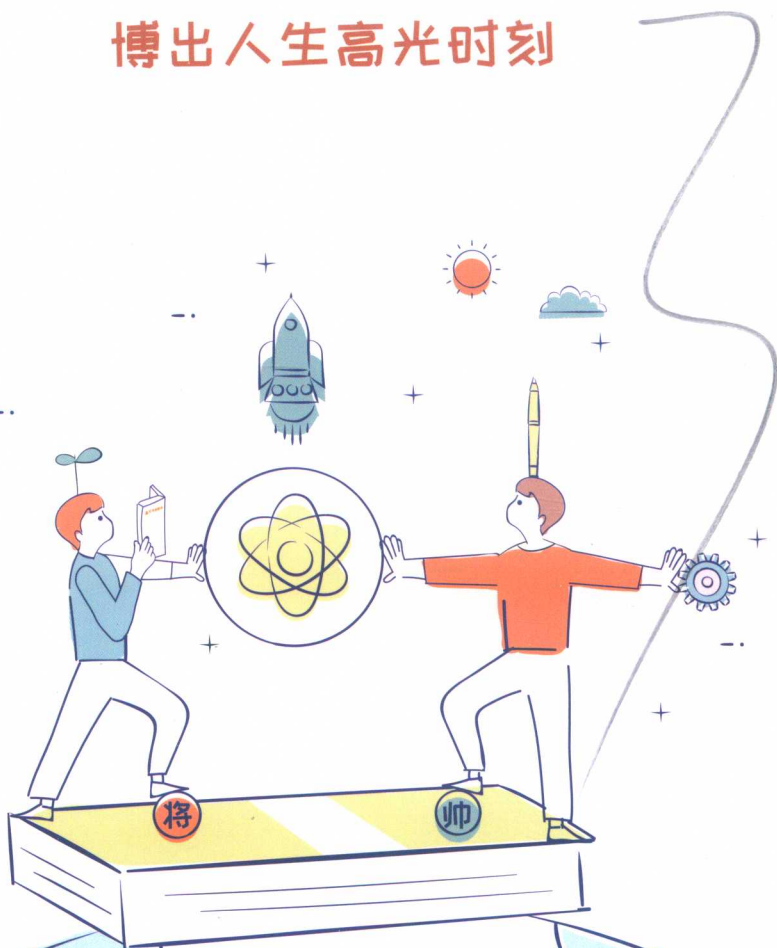
离不开的数学

无数学 不生活

数学中的博弈思维

焦宝聪 编著

博出人生高光时刻



 中国工信出版集团

 电子工业出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
<http://www.phei.com.cn>

离不开的数学

数学中的博弈思维

焦宝聪 编著

电子工业出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京·BEIJING

未经许可，不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有，侵权必究。

图书在版编目 (CIP) 数据

离不开的数学·数学中的博弈思维 / 焦宝聪编著. —北京: 电子工业出版社, 2019.6

ISBN 978-7-121-36722-9

I. ①离… II. ①焦… III. ①博弈论—普及读物 IV. ①O1-49 ②O225-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2019) 第 106681 号

责任编辑: 张贵芹 文字编辑: 仝赛赛

印 刷: 三河市良远印务有限公司

装 订: 三河市良远印务有限公司

出版发行: 电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编 100036

开 本: 720×1000 1/16 印张: 9.75 字数: 152 千字

版 次: 2019 年 6 月第 1 版

印 次: 2019 年 6 月第 1 次印刷

定 价: 36.80 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题, 请向购买书店调换。若书店售缺, 请与本社发行部联系, 联系及邮购电话: (010) 88254888, 88258888。

质量投诉请发邮件至 zltts@phei.com.cn, 盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

本书咨询联系方式: (010) 88254510, tongss@phei.com.cn。

序 言

本人以兴奋的心情和极大的兴趣，看完了焦宝聪教授编写的《离不开的数学》丛书。书中内容广泛，涉及社会、科技、管理、生活等多个领域，从各种不同的角度展现数学的内涵和数学应用的广泛性。书中的很多事例就发生在我们身边，其中处理问题的很多方法，对我们日常工作和生活都有极其重要的指导意义，如决策与优化、遗产分配、合作的利益分配等，确实体现了“离不开的数学”。这套书有如下特点：

丛书虽然是面向青少年的数学读物，但它不同于数学课程标准规定的课程教学内容，在扩展学生的数学视野、提高数学在各个领域层面应用的认识方面，将会起到非常大的作用。

丛书从数学角度阐述了资源的合理利用、冲突与合作，公平与正义、逻辑推理、创意思维等方面应有的分析框架和科学态度，将会促进人们的文化、科技创新思维的提高。

丛书从基本概念入手，由浅入深，循序渐进。其中的诸多故事、例子生动而有趣，读之有赏心悦目之感，因而有很好的可读性。虽然内容主要围绕数学中的运筹学、博弈论、创意思维方面的科学知识，但由于作者对许多高深数学知识都做了通俗化处理，可打破许多人对数学的畏惧，具有中小学数学水

平的大众都可以学会、看懂，使数学变得更有趣、更快乐，使数学与生活变得更紧密。

这套书在这方面的努力，将会在数学的普及教育上起到积极的推动作用，这也是焦宝聪教授在首都师范大学为本科生教授运筹学、博弈论等大学通识课程，受到学生们的广泛赞誉后，在数学普及教育上又一次有力的尝试。不仅对学生，而且将会在社会上引起积极反响，将在人们的理性思维培养、正确处理问题方式及推动精神文明建设上起到推动作用。虽然在数学教育这个方向上，已经有许多大师和先知们在不断地努力，但这套丛书无疑在这个方面是一部力作，相信会受到社会的广泛关注。

一个强大的国家需要国民具有较高的国民素质和文化素养，这其中数学自然不可或缺。这套丛书作为宣扬现代数学思维的著作，应当具有扩展学生的数学视野、提升大众数学素养的价值，我们期待着。

赖炎连

2019年5月

于中国科学院

前 言

在日常生活与工作中，我们经常要面临在多个方案中进行选择的问题，这是伴随我们一生的事情，每个人都无法回避。其中有一大类选择问题是在互动环境下进行的。在互动环境下的选择，就是我们通常所说的博弈。博弈时时存在，就在你我身边，可以说生活处处皆博弈。有没有一套理论和方法，能指导我们的博弈，使我们在参与博弈时，让自己立于不败之地？有！博弈论（Game Theory）就可以提供这套理论和方法。

博弈论是数学的一个重要分支，是从一系列有关合作、竞争、对抗的生活事件中提炼出来的理论方法和行为准则，它为人们提供了一个智慧的分析框架。博弈论主要研究如何在博弈中巧妙地选择策略，把复杂的问题简单化，并在合作、竞争、对抗的互动环境中客观地审视自己的得与失，做出正确的选择。

只要了解了博弈论的思想方法，懂得了博弈论的原理，并将这些原理应用到你的生活和工作中，你就会打开一扇思维的新窗户，出奇制胜。关于学习博弈论的重要性，1970年诺贝尔经济学奖获得者保罗·萨缪尔森（Paul A. Samuelson, 1915—2009）曾经说过：“要想在现代社会做一个有文化的人，你必须对博弈论有一个大致了解。”这已经成为越来越多人的共识。

本书以通俗易懂的语言介绍博弈论中的非合作博弈、合作博弈等精彩内容，在介绍内容时紧密联系当今社会发展中的热点与难点，通过对经典博弈模型和典型实例的深入剖析，让读者准确地把握博弈论的精髓，将博弈思维运用到学习、生活与工作中，

在参与博弈时，让自己立于不败之地。

在本书编著过程中，参考了大量中外文献，在此向文献的作者们表示衷心感谢！感谢赖炎连教授、陈兰平教授和王鹏远教授对书提出的中肯修改意见！同时还要感谢我的研究生宋强平同学提供的部分资料，感谢刘梦亭为本书精心设计的手绘图表！

第1章

- 001 什么是博弈论
- 003 1.1 认识博弈论
- 005 1.2 两个有趣的问题
- 010 1.3 博弈论的基本概念

目 录

contents

第2章

- 017 如何让“囚徒”走出困境
- 019 2.1 再看囚徒困境
- 020 2.2 烟草广告博弈
- 023 2.3 国际贸易战的博弈分析
- 025 2.4 古巴导弹危机

第1章

什么是博弈论

1

导 言

纵观人类发展历史，对抗与冲突、妥协与合作从来都是一个重大的主题，它一直吸引着人们的注意力。时至今日更是如此，只要浏览一下网络、新闻媒体上的国内外新闻，注意一下自己身边发生的事情，你就会强烈地感受到生活中充满了对抗与冲突、妥协与合作。博弈论是一门以数学为基础，研究发生对抗与冲突、妥协与合作时如何选择最优策略的学问。博弈的思想源远流长，我国春秋时期的《孙子兵法》不但是一部军事专著，也被认为是一部最早的博弈论专著。大家熟悉的文学名著《三国演义》中也充满了博弈思想。一般认为，博弈论作为一门学科的创立是以数学家约翰·冯·诺伊曼（John von Neumann，1903—1957）和经济学家奥斯卡·摩根斯特恩（Oskar Morgenstern，1902—1977）在1944年合作出版的《博弈论与经济行为》一书为重要标志。该书概括了经济主体的典型行为特征，提出了策略型与广义型（扩展型）等基本的博弈模型、解的概念和分析方法，奠定了博弈论的基石。在我国，博弈论也称为对策论。本讲将介绍什么是博弈论。

1.1

认识博弈论

前人通过对室内游戏的观察，提出“博弈”这一词。如图 1.1 所示，游戏中何时出奇制胜，往往取决于对手的行动，甚至是同伙的行动。而且这些游戏通常定义明确，有一套详细而有效的规则。参与者可获得的信息在每一点上都有明确规定，且有完整的记分体系。

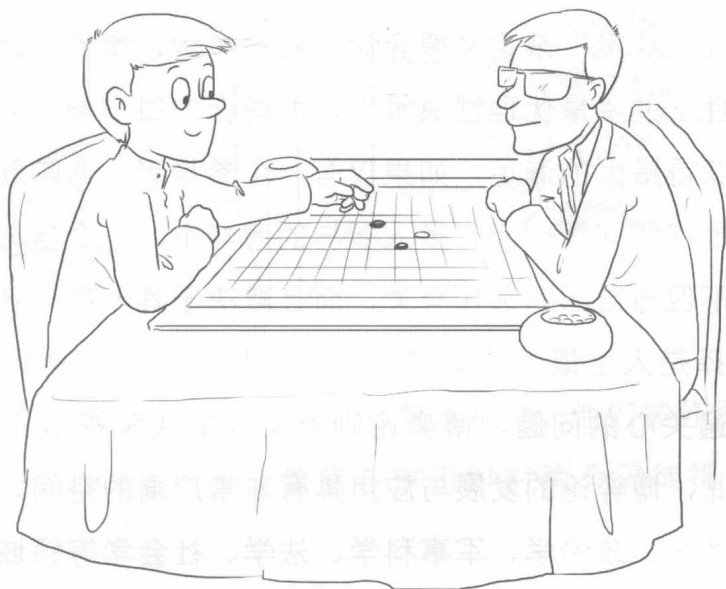


图 1.1 简单的博弈场景

爱因斯坦 (Albert Einstein, 1879—1955)，见图 1.2，曾经指出：“所有科学不过是日常思考的提炼而已。”博弈论这门学科也是如此。2005 年诺贝尔经济学奖获得者罗伯特·奥曼 (Robert J.Aumann)，见图 1.3，定义博弈论是“交互的决策论”。

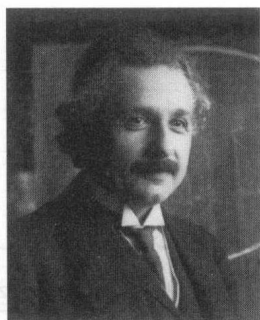


图 1.2 爱因斯坦

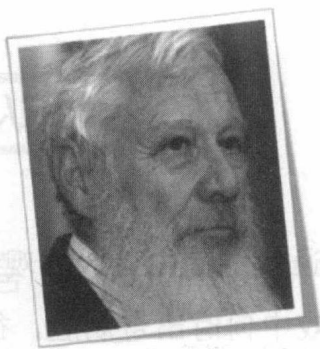


图 1.3 罗伯特·奥曼

博弈论研究决策者的行为发生直接相互作用时的决策以及这种决策的均衡问题，也就是说，人们之间的决策与行为将形成互为影响的关系，此时一个人在决策时必须考虑到对方的反应。因此，用“交互的决策”来定义博弈论。进一步地，奥曼认为博弈论是交互式条件下的“最优理性决策”，即博弈的每个参与者都希望能以其偏好获得最大的满足。如果仅有一个参与者，通常就会产生划分明确的最优化问题。而在多人参与的博弈中，一个参与者选择后的得与失不但与自己的选择有关，而且取决于其他参与者的选择。

选择是人生最大的智慧，在互动局势下如何选择最优策略是人们普遍关心的问题，博弈论则为交互的决策提供了一个分析框架。因此，博弈论的发展与应用具有非常广阔的空间。博弈论正在成为经济学、政治学、军事科学、法学、社会学等领域极其有用的分析工具。博弈论的精髓在于它丰富的思想内涵，随着现代社会的发展，不断注入新的思想和方法，博弈论显示出其强大的生命力。著名经济学家、1970年诺贝尔经济学奖获得者保罗·萨缪尔森曾经说过：“要想在现代社会做一个有文化的人，你必须对博弈论有一个大致了解。”这已经成为越来越多人的共识。

1.2 两个有趣的问题

★ 1. 囚徒困境

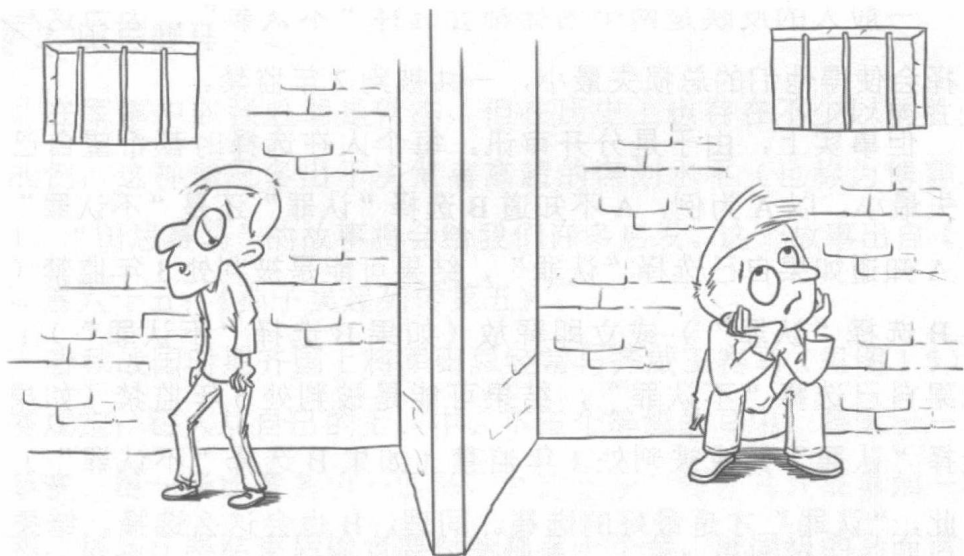


图 1.4 囚徒困境

A、B 两个窃贼在偷盗地点附近被警察抓住，他们被分别关押，以防止串供，如图 1.4 所示。警官在审讯时对两个囚徒提出如下警告。

如果两个人都认罪，则可能各被判处 3 年监禁；如果一个囚徒认罪并愿意作证，另一个囚徒不认罪，则坦白者立即释放，另一个囚徒可能被判处 5 年监禁；如果两人都不认罪，则因证据不足不能判处两人的偷窃罪，将可能按照“私入民宅罪”将两人各判处 1 年监禁。“囚徒困境”博弈见表 1.1。

表 1.1 “囚徒困境” 博弈

		B	
		认罪	不认罪
A	认罪	3, 3	0, 5
	不认罪	5, 0	1, 1

两个囚徒都想得到比较轻的惩罚，他们会如何选择呢？

一般人的反映是两个囚徒都会选择“不认罪”，因为这样的选择会使得他们的总损失最小，一共被判 2 年监禁。

但事实上，由于是分开审讯，每个人在选择时都希望自己的损失最小。以 A 为例，A 不知道 B 选择“认罪”还是“不认罪”，但 A 知道如果自己选择“认罪”，结果可能是被判处 3 年监禁（如果 B 选择“认罪”）或立即释放（如果 B 选择“不认罪”）；A 如果自己选择“不认罪”，结果可能是被判处 5 年监禁（如果 B 选择“认罪”）或被判处 1 年监禁（如果 B 选择“不认罪”）。因此，“认罪”才是最好的选择。同理，B 也会这么选择。结果就出现了 A、B 都会选择“认罪”的结果。

看到这里，你会感到惊讶吗？为什么选择结果与局外人的反应相悖呢？这是博弈论中的一个经典例子。博弈论就是研究参与人之间的决策与行为互为影响的关系，一个人在决策时必须考虑到对方的反应，换位思考是博弈论的重要思维。

在这个思维框架中，囚徒 A、B 为博弈的参与人，“认罪”“不认罪”称为可供参与人选择的策略，简称策略，集合 {“认罪”，“不认罪”} 称为参与人的策略集，表 1.1 中的数据称为参与人的支付，支付是参与人在这场博弈中选择某个策略时的量化结果，也称收益，本书中统称为支付。参与人每人选定一个策略，就构成一

个局势，在本例中一共有4个局势，表示为：

（认罪，认罪）、（认罪，不认罪）、（不认罪，认罪）、（不认罪，不认罪）。

囚徒 A、B 的最终选择构成的局势（认罪，认罪），称为这个博弈的解。

★ 2. 田忌赛马

在军事中以强胜弱是常态，但在历史上也存在不少以弱胜强的战例，这种情况多出于决策者高超的谋划水平（也称为博弈水平）。“田忌赛马”的故事将会给我们许多启发。这个故事出自《史记》卷六十五：《孙子吴起列传第五》。

春秋战国时期齐国上将军田忌经常与齐威王赛马（见图 1.5）。比赛规定：每人从自己的上、中、下三个等级的马中，各选出一匹马参赛，每一场比赛各出一匹马，共比三场。每匹马只能参加一场比赛，每场比赛结束后输者要付给赢者一千金。就同级的马而言，齐王的马都比田忌的马强一些。在这场赛马博弈中，参与人是如何决策的呢？

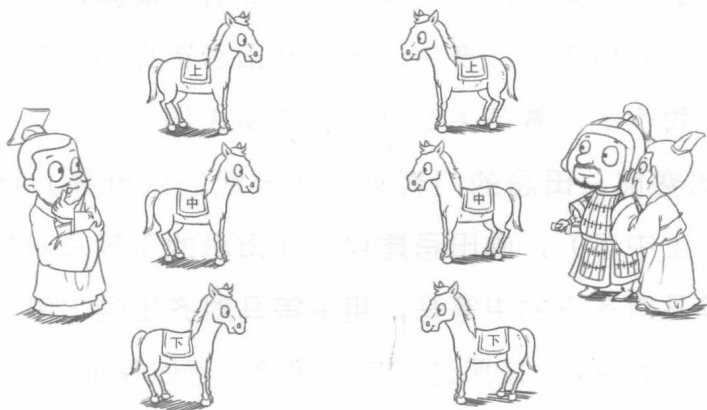


图 1.5 田忌赛马

在这场比赛中，参与人为齐王和田忌。我们约定：策略（上中下）表示先用上等马，再用中等马，最后用下等马，以此类推。以马出场的顺序而言，齐王的策略集为：（上中下），（上下中），（中上下），（中下上），（下中上），（下上中）。田忌的策略集与齐王的策略集相同，两位参与人的策略集各含有六个策略，他们选择不同的策略，将会产生 36 种不同的局势。齐王和田忌的支付（在这 3 场比赛中，净赢一场记为 1，净输一场记为 -1）情况见表 1.2。每个数据对中左边的数字表示齐王的支付，右边的数字表示田忌的支付。

表 1.2 齐王与田忌赛马的支付

		田忌					
		上中下	上下中	中上下	中下上	下中上	下上中
齐王	上中下	3, -3	1, -1	1, -1	1, -1	1, -1	-1, 1
	上下中	1, -1	3, -3	1, -1	1, -1	-1, 1	1, -1
	中上下	1, -1	-1, 1	3, -3	1, -1	1, -1	1, -1
	中下上	-1, 1	1, -1	1, -1	3, -3	1, -1	1, -1
	下中上	1, -1	1, -1	-1, 1	1, -1	3, -3	1, -1
	下上中	1, -1	1, -1	1, -1	-1, 1	1, -1	3, -3

从表 1.2 可以看出，田忌仅在六种局势下能赢，比赛形势显然对田忌不利。在以前的比赛中，齐王和田忌选择的策略都是（上中下），所以每次的比赛结果都是田忌连输 3 场。

这次比赛前，田忌的门客孙臆（孙武的六世孙）针对齐王选择的策略（上中下），向田忌建议：让田忌的下等马对齐王的上等马，用上等马对齐王的中等马，用中等马对齐王的下等马，即田忌选择策略（下上中）。按照这个应对策略，可以保证田忌一负二胜，净胜一局，赢得齐王的一千金。由于田忌得到了孙臆的指导，根据

齐王预先告知的出马顺序，采取了针对性的策略，才使得这场比赛被传为后世的佳话。

借此机会，田忌把孙臧推荐给齐王，齐王向孙臧请教兵法，并拜孙臧为齐国军师。

孙臧的赛马谋略再次验证了“知己知彼，百战不殆”的真理。但读者思考一下：在这场比赛中，如果齐王不预先告诉田忌自己的出马顺序，而要求同时出马，比赛的结果又会是怎样的呢？

试着从表 1.2 中找出田忌能获胜的另外 5 种局势。

也许人类最有趣的行为就是竞争了，而研究对抗与冲突之道的博弈论，将从理论上说明理性的人怎样与对手对抗才能取得优势。