SHI DAI YUN TU

2019 专业硕士联考系列

经济类联考综合能力

—数学攻略—

主编：仲毅 朱杰

●紧扣大纲，贴近考试 ●科学选题，杜绝题海
●解题技巧，应试秒杀 ●分层精练，一本高分

适用专业

- 经济类联考（396科目）
  金融/应用统计/税务/国际商务/保险/资产评估

中国政法大学出版社

专业硕士联考系列

经济类联考综合能力

—数学攻略—

主编：仲毅 朱杰

中国政法大学出版社

2018 · 北京

图书在版编目（CIP）数据

经济类联考综合能力. 数学攻略/仲毅，朱杰主编. —北京：中国政法大学出版社，2018.3
ISBN 978-7-5620-8184-5

Ⅰ.①经… Ⅱ.①仲… ②朱… Ⅲ.①高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ.①G643

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 058263 号

出版者　中国政法大学出版社
地　址　北京市海淀区西土城路 25 号
邮寄地址　北京 100088 信箱 8034 分箱　邮编 100088
网　址　http://www.cuplpress.com（网络实名：中国政法大学出版社）
电　话　010-58908285(总编室)　58908433（编辑部）58908334(邮购部)
承　印　三河市天利华印刷装订有限公司
开　本　787mm×1092mm　1/16
印　张　11.5
字　数　287 千字
版　次　2018 年 3 月第 1 版
印　次　2018 年 3 月第 1 次印刷
定　价　36.80 元

PREFACE 前言

经济类联考于2011年出现在广大考研学子面前，适用于金融硕士、应用统计硕士、税务硕士、国际商务硕士、保险硕士及资产评估硕士的研究生招生考试。随着越来越多的高校加入该考试，考生对其关注度越来越高，因此竞争也愈加激烈。同时，经济类联考数学仍然覆盖了微积分、概率论、线性代数的大部分知识点，其复习具有一定难度，科学备考尤为重要。本书特别结合考试大纲以及历年真题的特点，对考生的数学复习提出如下规划：

一、构建知识体系

相比考研数学三的试卷，经济类联考综合能力数学试题更加注重考查考生对基础知识、基本方法的掌握，更强调培养考生的基本能力，考题中基础题所占的比重较大。这就要求考生要牢牢掌握每个基本知识点和考点的具体内容，更要从整体上把握它们之间的关系，打好基础是考生复习时首要的、根本的任务。因此，考生在复习时不要偏离基础这个根本的方向。

为了大家更好的复习经济类联考的知识点和考点，本书在每一章节的开头都给出了知识点概述，方便考生明确每章节的复习重点，重点突出又涵盖全面。让考生能够对本章节的知识一目了然，建立完整的知识体系。

二、精练典型题型

学习数学，练习是不可或缺的，而题目的类型、难度、考点是经典题目的关键指标。通过典型题型练习掌握解题方法。例题的内容要抓住重点，理顺考生的复习思路，将考生的复习引上明路。

因此，本书在编写时，首先保证了例题内容的权威性。严格依据考试大纲和真题规律编写例题，精选适合考生复习备考，包含经济类联考的典型题及考研数学三个别真题，使考生举一反三，迅速掌握重难点。另外，本书在一些例题后设置了评注，使考生对于例题中需要重视的知识点、考试技巧、命题方向等有更深的认识。

三、注重体系服务

知识点学习固然重要，大量的针对性练习和研究真题同样不容忽视，本书作为经济类联考丛书的教材书籍适合考生基础阶段使用，在强化阶段应和《经济类联考综合能力·题源探析经典1000题(数学)》的练习题相互配套使用，并在暑假阶段学习真题。配套图书还有相应的视频讲解和直播课程。为了确保视频内容的系统性，本书的所有视频均由我来亲自讲解，让广大考生在学习过程中体系完整，思路清晰。

总之,《经济类联考综合能力·数学攻略》从知识体系、典型题型、体系服务三方面入手,帮助考生夯实经济类联考综合能力数学基础知识,从而为考生在数学部分获取满分奠定基础。

在这里要感谢时代云图的编辑和同事,为本书的题目校正提出了宝贵的建议和意见。

由于作者水平有限,本书难免存在不足之处,欢迎同学和同行提出宝贵意见,不吝赐教。

祝考研一切顺利!

仲毅

新浪微博:@仲毅老师

朱杰

新浪微博:@考研数学朱杰老师

CONTENTS

目录

第一部分　微积分

第一章　函数、极限与连续性 …… (003)
第一节　函数 …… (003)
一、函数的概念 …… (003)
二、函数的性质 …… (004)
【题型一】定义域 …… (005)
【题型二】分段函数 …… (006)
【题型三】复合函数 …… (006)
【题型四】奇偶性 …… (007)
【题型五】有界性 …… (007)
第二节　极限 …… (008)
一、数列极限和函数极限的概念 …… (008)
二、极限的定理与性质 …… (008)
三、无穷小量和无穷大量 …… (010)
【题型一】常见极限的类型 …… (011)
【题型二】两个重要极限 …… (013)
【题型三】无穷小量与无穷大量 …… (013)
第三节　连续性 …… (015)
一、函数的连续性与间断点 …… (015)
二、闭区间上连续函数的性质定理 …… (016)
【题型一】函数的连续性 …… (016)
【题型二】间断点的分类 …… (018)
【题型三】闭区间连续函数的性质 …… (019)
第二章　一元函数微分学 …… (020)
第一节　导数与微分 …… (020)
一、导数与微分的概念 …… (020)
二、导数与微分的计算 …… (021)
【题型一】导数的定义 …… (022)
【题型二】求导法则 …… (025)
【题型三】二阶导数 …… (027)
【题型四】微分 …… (028)
第二节　导数的应用 …… (029)
一、洛必达法则——用导数 $f'(x)$ 研究极限 …… (029)

二、单调性——用导数 $f'(x)$ 研究函数单调性 …… (030)
三、极值与最值——用导数 $f'(x)$ 研究函数极值最值 …… (030)
四、曲线的凹凸性与拐点 …… (031)
五、渐近线 …… (031)
六、函数作图步骤 …… (032)
【题型一】洛必达法则 …… (032)
【题型二】切线和法线方程 …… (035)
【题型三】函数的单调性和极值 …… (036)
【题型四】函数的凹凸性及拐点 …… (040)
第三节 微分中值定理 …… (042)
一、罗尔定理 …… (042)
二、拉格朗日中值定理 …… (042)
第三章 一元函数积分学 …… (044)
第一节 不定积分 …… (044)
一、不定积分的概念 …… (044)
二、不定积分的计算 …… (044)
【题型一】不定积分的概念 …… (047)
【题型二】第一类换元积分 …… (048)
【题型三】第二类换元积分 …… (050)
【题型四】分部积分法 …… (051)
【题型五】有理函数的不定积分 …… (056)
【题型六】三角函数有理式的不定积分 …… (058)
【题型七】求解原函数 …… (059)
第二节 定积分 …… (060)
一、定积分的概念、性质及定理 …… (060)
二、定积分的计算 …… (061)
【题型一】定积分的性质和定义 …… (062)
【题型二】变限积分函数 …… (063)
【题型三】定积分的计算 …… (065)
第三节 定积分的几何应用 …… (071)
一、平面图形的面积 …… (071)
【题型一】计算平面图形的面积 …… (072)
第四章 多元函数微分学 …… (078)
一、多元函数的连续性 …… (078)
二、多元函数的最值与介值定理 …… (078)
三、偏导数的概念与计算 …… (078)
【题型一】一阶偏导数 …… (080)
【题型二】复合函数的偏导数 …… (081)
【题型三】隐函数求导 …… (084)
【题型四】全微分 …… (086)

第二部分 概率论

第一章 随机事件和概率 …… (089)

一、随机试验和随机事件 …… (089)

二、随机事件的关系与运算 …… (089)

三、事件的概率及其性质 …… (090)

四、两个概率模型 …… (090)

五、复杂事件的概率计算 …… (090)

六、事件的独立性与 n 重伯努利概型 …… (091)

【题型一】事件的运算 …… (092)

【题型二】古典概型与条件概率 …… (093)

【题型三】独立性 …… (097)

【题型四】常见公式 …… (098)

第二章 一维随机变量及其分布 …… (101)

一、随机变量与分布函数 …… (101)

二、离散型随机变量 …… (101)

三、连续型随机变量 …… (102)

【题型一】随机变量及其分布 …… (103)

【题型二】常见分布 …… (110)

第三章 数字特征 …… (115)

一、数学期望 …… (115)

二、方差 …… (115)

【题型一】数学期望 …… (116)

【题型二】计算方差 …… (118)

【题型三】常见分布的期望与方差 …… (120)

第三部分 线性代数

第一章 行列式 …… (127)

一、行列式的定义 …… (127)

二、行列式的性质 …… (127)

三、行列式的计算 …… (128)

【题型一】化成上(下)三角的形式求解 …… (129)

【题型二】行列式按某一行(列)展开 …… (131)

【题型三】高阶行列式的计算 …… (134)

第二章 矩阵 …… (136)

一、矩阵的定义 …… (136)

二、基本运算法则 …… (136)

三、逆矩阵 …… (137)

四、伴随矩阵 …… (137)

五、矩阵类型 …… (137)

六、矩阵的初等变换 …… (138)

【题型一】矩阵的定义及运算 …… (140)
【题型二】逆矩阵与伴随矩阵 …… (142)
【题型三】矩阵的秩及初等变换 …… (147)
【题型四】矩阵方程 …… (149)
第三章 向量 …… (152)
一、向量及其线性运算 …… (152)
二、线性组合与线性表示 …… (152)
三、线性相关与线性无关 …… (152)
【题型一】向量组线性相关性的判别 …… (154)
【题型二】向量的线性表示 …… (157)
【题型三】向量组的秩 …… (159)
第四章 线性方程组 …… (162)
一、齐次线性方程组 …… (162)
二、非齐次线性方程组 …… (163)
【题型一】方程组解的判定 …… (164)
【题型二】解的结构 …… (168)

第一部分

微积分

微积分在历年真题中考查 6 道小题，6 道大题，共计 42 分，分值比例在历年真题数学部分中占到 60%，微积分既是复习中的重点也是复习中的基石。考试的范围涵盖函数极限、连续、一元函数微分学、一元函数积分学、多元函数求解偏导数和全微分的内容。

第一章　函数、极限与连续性

第一节　函数

【知识点概述】

一、函数的概念

定义 1　函数

$y=f(x), x\in D$,其中 x 称为自变量,y 称为因变量,D 称为定义域.

定义 2　分段函数

在自变量的不同变化范围中,用不同式子来表示的函数称为分段函数.

例如:函数 $y=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 1+x, & x>1,\end{cases}$ 定义域为 $D=[0,1]\cup(1,+\infty)=[0,+\infty)$.

定义 3　隐函数

由方程 $F(x,y)=0$ 唯一确定的函数 $y=f(x)$ 称为隐函数.

定义 4　反函数

一般地,$y=f(x), x\in D$ 的反函数记成 $y=f^{-1}(x), x\in f(D)$.

若 $f(x)$ 是定义在 D 上的单调函数,则 $f^{-1}(x)$ 也是 $f(D)$ 上的单调函数.

在同一直角坐标系下,函数 $y=f(x)$ 与函数 $x=f^{-1}(y)$ 的图形是同一条曲线;而函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

求反函数的基本步骤:

(1) 由 $y=f(x)$ 解出 x,得到关系式 $x=\varphi(y)$;

(2) 将 x 与 y 互换,即得所求函数的反函数 $y=\varphi(x)$.

定义 5　基本初等函数

幂函数:$y=x^{\mu}$($\mu\in\mathbf{R}$ 是常数).

指数函数:$y=a^{x}$($a>0$ 且 $a\neq 1$).

对数函数:$y=\log_a x$($a>0$ 且 $a\neq 1$,特别当 $a=\mathrm{e}$ 时,记为 $y=\ln x$).

三角函数:$y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$.

反三角函数:$y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$.

定义 6　复合函数

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1,函数 $u=g(x)$ 在 D 上有定义且 $g(D)\subset D_1$,则函数 $y=f[g(x)], x\in D$ 称为由函数 $u=g(x)$ 和函数 $y=f(u)$ 构成的复合函数,它的定义域为 D,变量 u 称为中间变量. 简单地说:$y=f(u), u=g(x)$,u 是中间变量,x 是自变量.

定义 7　初等函数

由常数、基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合运算构成可以用一个表达式表示的函数.

二、函数的性质

定义 8　函数的单调性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的；如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的.

【注】① 判断抽象函数的单调性，在考试时采用举反例排除法，尽量不用单调性的定义进行证明.

② 导数大于零的函数一定单调增加，但单调增加的可导函数的导数不一定严格大于零，其导数也可能等于零.

定义 9　函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称（即若 $x\in D$，则 $-x\in D$）. 如果对于任一 $x\in D$，有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；如果对于任一 $x\in D$，有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数.

奇偶函数的图形特点：偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称.

【注】判断奇偶性：不管 $f(x)$ 的具体形式是什么，均计算 $f(-x)$ 的值. 如果 $f(-x)=f(x)$，则由定义知 $f(x)$ 为偶函数；如果 $f(-x)=-f(x)$，则由定义知 $f(x)$ 为奇函数.

定义 10　函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D. 如果存在一个正数 T，使得对于任一 $x\in D$ 有 $x\pm T\in D$，且 $f(x\pm T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数，T 称为 $f(x)$ 的周期.

周期函数的图形特点：在函数的定义域内，每个长度为 T 的相邻区间上，函数的图形有相同的形状.

定义 11　函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X\subset D$. 如果存在数 K_1，使对任一 $x\in X$，有 $f(x)\leqslant K_1$，则称函数 $f(x)$ 在 X 上有上界，且称 K_1 为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个上界.

如果存在数 K_2，使对任一 $x\in X$，有 $f(x)\geqslant K_2$，则称函数 $f(x)$ 在 X 上有下界，且称 K_2 为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个下界.

如果存在正数 M，使对任一 $x\in X$，有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界；如果这样的 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在 X 上无界. 函数 $f(x)$ 无界，就是说对任何 M，总存在 $x_1\in X$，使 $|f(x_1)|>M$. 有界函数的图形特点是，函数 $y=f(x)$ 的图形在直线 $y=-M$ 和 $y=M$ 之间.

(1) 无界变量与无穷大量的区别：无穷大量一定是无界变量，但无界变量不一定是无穷大量.

(2) 非零的无界变量与无穷大量的乘积是无界变量，但不一定是无穷大量.

【注】① 无界变量与有界变量是函数有界性的正反两个方面.

② 用无穷大量的定义和无界变量的定义来区分这两个概念.

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$ 是指，给定 $M>0$，在 $x=x_0$ 处的充分小邻域内，对于所有的 x，$|f(x)|$ 都大于 M，而“无界”不要求“所有的 x”.

【题型一】定义域

例 1　求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{3x-9}-\sqrt{\ln(3x-5)}$；　　　　(2) $y=\sqrt{3-x}+\arctan\dfrac{1}{x-1}$；

(3) $y=\arcsin\dfrac{x-6}{x}$.

【解析】(1) 由题意可知：$\begin{cases}3x-9\geqslant 0,\\ \ln(3x-5)\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geqslant 3,\\ 3x-5\geqslant 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geqslant 3,\\ x\geqslant 2\end{cases}\Rightarrow x\geqslant 3$，即 $x\in[3,+\infty)$.

(2) 由 $f(x)=\arctan x,x\in\mathbf{R}$，可知 $\begin{cases}3-x\geqslant 0,\\ x-1\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\leqslant 3,\\ x\neq 1\end{cases}\Rightarrow x\in(-\infty,1)\cup(1,3]$.

(3) 由 $f(x)=\arcsin x,x\in[-1,1]$，可知 $-1\leqslant\dfrac{x-6}{x}\leqslant 1\Rightarrow -1\leqslant 1-\dfrac{6}{x}\leqslant 1\Rightarrow 0\leqslant\dfrac{6}{x}\leqslant 2\Rightarrow x\geqslant 3$，即 $x\in[3,+\infty)$.

【评注】① $\sqrt{f(x)}\Rightarrow f(x)\geqslant 0$；$\log_a f(x)\Rightarrow f(x)>0$；$\dfrac{1}{f(x)}\Rightarrow f(x)\neq 0$.

② 反三角函数的定义域需注意取值范围.

例 2　函数 $y=\sqrt{e^x-1}+\dfrac{1}{2-x}$ 的定义域是(　　).

A. $[0,2)$　　B. $(2,+\infty)$　　C. $[0,2)\cup(2,+\infty)$　　D. $(-\infty,2)$

【解析】由题意可知：$\begin{cases}e^x-1\geqslant 0,\\ x-2\neq 0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x\geqslant 0,\\ x\neq 2.\end{cases}$ 因此函数定义域为 $[0,2)\cup(2,+\infty)$. 选 C.

例 3　设 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，求下列函数的定义域：

(1) $f(e^x)$；　(2) $f(\ln x)$；　(3) $f(\arctan x)$.

【解析】(1) 由题意可知：$0\leqslant e^x\leqslant 1\Rightarrow x\leqslant 0$，即 $x\in(-\infty,0]$.

(2) 由题意可知：$0\leqslant\ln x\leqslant 1\Rightarrow 1\leqslant x\leqslant e$，即 $x\in[1,e]$.

(3) 由题意可知：$0\leqslant\arctan x\leqslant 1\Rightarrow 0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{4}$，即 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$.

【评注】已知 $f(x)$ 的定义域为 $[a,b]$，求解 $y=f[g(x)]$ 的定义域时，只须令 $a\leqslant g(x)\leqslant b$，再结合 $g(x)$ 的定义域即可.

例 4　已知 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1)$，求 $f(x+2a)$ 及 $f\left(2-\dfrac{1}{\ln x}\right)$ 的定义域.

【解析】由题意可得，$f(x+2a)$ 的定义域应满足 $0\leqslant x+2a<1\Rightarrow -2a\leqslant x<1-2a$，即 $f(x+2a)$ 的定义域为 $[-2a,1-2a)$.

由 $f(x)$ 定义域为 $[0,1)$ 可知：$0\leqslant 2-\dfrac{1}{\ln x}<1$ 且 $x>0,x\neq 1\Rightarrow 1<\dfrac{1}{\ln x}\leqslant 2\Rightarrow\dfrac{1}{2}\leqslant\ln x<1\Rightarrow\sqrt{e}\leqslant x<e$，即 $f\left(2-\dfrac{1}{\ln x}\right)$ 的定义域为 $[\sqrt{e},e)$.

【评注】题目中含 $\dfrac{1}{\ln x}$，解题时也应注意 $x>0$ 且 $x\neq 1$.

【题型二】分段函数

例 5 已知 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0,\\ x^2-1, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 求 $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$，$f(3)$，$f(t^2)$，$f(x+4)$.

【解析】$f(x)$ 为分段函数对应不同区间有不同函数表达式，可知：

当 $x=-\dfrac{1}{2}$ 时，$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\left(-\dfrac{1}{2}\right)+1=\dfrac{1}{2}$.

当 $x=3$ 时，$f(3)=3^2-1=8$.

因为 $t^2\geqslant 0$，所以 $f(t^2)=(t^2)^2-1=t^4-1$.

由 $f(x+4)=\begin{cases}(x+4)+1, & x+4<0,\\ (x+4)^2-1, & x+4\geqslant 0,\end{cases}$ 因此 $f(x+4)=\begin{cases}x+5, & x<-4,\\ x^2+8x+15, & x\geqslant -4.\end{cases}$

【评注】$f(x+4)$ 求解时，只须将 $x+4$ 看成一个整体，将表达式中 x 分段替换成 $x+4$ 即可.

【题型三】复合函数

例 6 已知 $f\left(\dfrac{1}{x+4}\right)=\dfrac{1-x}{2+x}$，则 $f(x)=($　　$)$.

A. $\dfrac{5x-1}{1-2x}$　　B. $\dfrac{x}{3+x}$　　C. $\dfrac{x}{2x+3}$　　D. $\dfrac{1-x}{2+x}$

【解析】方法一　令 $\dfrac{1}{x+4}=t$，则 $x=\dfrac{1}{t}-4$，代入原函数可得

$$f(t)=\frac{1-\left(\dfrac{1}{t}-4\right)}{2+\left(\dfrac{1}{t}-4\right)}=\frac{5-\dfrac{1}{t}}{\dfrac{1}{t}-2}=\frac{5t-1}{1-2t},$$

即 $f(x)=\dfrac{5x-1}{1-2x}$. 选 A.

方法二　由题意得 $$f\left(\frac{1}{x+4}\right)=\frac{5-(x+4)}{(x+4)-2}=\frac{\dfrac{1}{x+4}\times 5-1}{1-\dfrac{1}{x+4}\times 2},$$

即将 $\dfrac{1}{x+4}$ 看成整体，得 $f(x)=\dfrac{5x-1}{1-2x}$. 选 A.

【评注】此类题两种方法殊途同归，最后都是整体代换.

例 7 设 $f(x)=\dfrac{1}{2-x}$，求 $f\{f[f(x)]\}$，$f\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]$.

【解析】由题意可得

$$f[f(x)]=\frac{1}{2-f(x)}=\frac{1}{2-\dfrac{1}{2-x}}=\frac{2-x}{3-2x}\left(x\neq 2,x\neq\frac{3}{2}\right),$$

$$f\{f[f(x)]\}=f\left(\frac{2-x}{3-2x}\right)=\frac{1}{2-\dfrac{2-x}{3-2x}}=\frac{3-2x}{4-3x}\left(x\neq 2,x\neq\frac{3}{2},x\neq\frac{4}{3}\right),$$

$$f\left[\frac{1}{f(x)}\right]=\frac{1}{1-\dfrac{1}{f(x)}}=\frac{1}{2-(2-x)}=\frac{1}{x}(x\neq 2,x\neq 0).$$

【评注】① 复合函数从内向外依次化简，按照运算法则化简计算.

② 应注意定义域的确定，大题中应标注清楚.

【题型四】奇偶性

例 8　判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=(x+2)^2$；　　(2) $f(x)=x\mid x^3\mid$；

(3) $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$；　　(4) $f(x)=\ln(\sqrt{1+x^2}-x)$.

【解析】(1) 因为 $f(-x)=(-x+2)^2\neq f(x)$，$f(-x)\neq -f(x)$，故 $f(x)$ 为非奇非偶函数.

(2) 因为 $f(-x)=(-x)\mid(-x)^3\mid=(-x)\mid -x^3\mid=(-x)\mid x^3\mid=-f(x)$，故 $f(x)$ 为奇函数.

(3) 因为 $f(-x)=\dfrac{e^{-x}+e^{-(-x)}}{e^{-x}-e^{-(-x)}}=\dfrac{e^{-x}+e^x}{e^{-x}-e^x}=-\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=-f(x)$，故 $f(x)$ 为奇函数.

(4) 因为 $f(-x)+f(x)=\ln(\sqrt{1+x^2}+x)+\ln(\sqrt{1+x^2}-x)=\ln(1+x^2-x^2)=\ln 1=0$，所以 $f(-x)=-f(x)$，故 $f(x)$ 为奇函数.

【评注】在处理本题时，也可利用奇×偶＝奇，奇×奇＝偶的奇偶函数运算来判定. 复习时应记住 $\mid x\mid$ 为偶函数，$\ln(\sqrt{1+x^2}-x)$ 与 $\ln(\sqrt{1+x^2}+x)$ 为奇函数，这些是常用的奇偶函数.

例 9　判断函数的奇偶性：$f(x)=\begin{cases}x(2-x), & x\geqslant 0,\\ x(2+x), & x<0.\end{cases}$

【解析】由题意得，当 $x<0$ 时，$f(x)=x(2+x)\Rightarrow -x>0$，$f(-x)=(-x)[2-(-x)]$，所以当 $x<0$ 时，$f(-x)=-x(2+x)=-f(x)$，为奇函数.

另一方面，当 $x>0$ 时，$f(x)=x(2-x)\Rightarrow -x<0$，$f(-x)=-x(2-x)=-f(x)$，因此 $f(x)$ 为奇函数.

综上所述，$f(x)$ 为奇函数.

【评注】本题如果为小题时，可以借助图像(如图 1－1)，确定奇偶性.

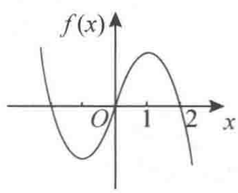

图 1－1

【题型五】有界性

例 10　讨论下列函数在其定义域内的有界性：

(1) $f(x)=\dfrac{4x}{1+x^2}$；　　(2) $f(x)=x\sin x$.

【解析】(1) 因为 $(\mid x\mid-1)^2\geqslant 0$，所以 $x^2+1\geqslant 2\mid x\mid$，即 $\dfrac{2\mid x\mid}{x^2+1}\leqslant 1\Rightarrow\dfrac{4\mid x\mid}{x^2+1}\leqslant 2\Rightarrow -2\leqslant\dfrac{4x}{x^2+1}\leqslant 2$，所以 $f(x)=\dfrac{4x}{1+x^2}$ 有界.

(2) 因为 $f(x)=x\sin x\Rightarrow\mid f(x)\mid=\mid x\sin x\mid=\mid x\mid\cdot\mid\sin x\mid$，$\left|f\left(\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)\right|=\left|\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right|$，因此当 $k\to\infty$ 时，$f(x)=x\sin x$ 无界.

第二节 极限

【知识点概述】

一、数列极限和函数极限的概念

定义 1 数列极限

对于数列$\{x_n\}$，如果当n无限增大时，数列的一般项x_n无限地接近于某一确定的数值a，则称常数a是数列$\{x_n\}$的极限，或称数列$\{x_n\}$收敛a. 记为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. 如果数列没有极限，就说数列是发散的. 常用语言是：

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbf{N},\text{当 }n>N\text{ 时，有 }|x_n-a|<\varepsilon.$$

定义 2 函数极限

如果当x无限接近于x_0，函数$f(x)$的值无限接近于常数A，则称当x趋于x_0时，$f(x)$以A为极限. 记作$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$或$f(x)\to A$(当$x\to x_0$). 写成$\varepsilon-\delta$语言是：

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\text{当 }0<|x-x_0|<\delta\text{ 时，}|f(x)-A|<\varepsilon.$$

单侧极限：

若当$x\to x_0^-$时，$f(x)$无限接近于某常数A，则常数A叫作函数$f(x)$当$x\to x_0$时的左极限，记为$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$或$f(x_0^-)=A$；

若当$x\to x_0^+$时，$f(x)$无限接近于某常数A，则常数A叫作函数$f(x)$当$x\to x_0$时的右极限，记为$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$或$f(x_0^+)=A$.

二、极限的定理与性质

定理 1 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

定理 2 极限的唯一性

(1) 数列$\{x_n\}$不能收敛于两个不同的极限；

(2) 如果极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，那么这个极限唯一.

定理 3 极限的有界性

(1) 如果数列$\{x_n\}$收敛，那么数列$\{x_n\}$一定有界；

(2) 如果$f(x)\to A$(当$x\to x_0$时)，那么存在常数$M>0$和$\delta>0$，使得当$0<|x-x_0|<\delta$时，有$|f(x)|\leqslant M$.

定理 4 极限的局部保号性

如果$f(x)\to A$(当$x\to x_0$)，而且$A>0$(或$A<0$)，那么存在常数$\delta>0$，使当$0<|x-x_0|<\delta$时，有$f(x)>0$(或$f(x)<0$).

定理 5 函数极限与数列极限的关系

如果当$x\to x_0$时$f(x)$的极限存在，$\{x_n\}$为$f(x)$的定义域内任一收敛于x_0的数列，且满足$x_n\neq x_0(n\in\mathbf{N})$，那么相应的函数值数列$\{f(x_n)\}$必收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$.

定理 6 极限的运算法则

如果$\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，那么

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$；